Devoir Maison 07

Pour le lundi 23 Novembre 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x \cos x}{(1+\cos x)^2}$

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Etudier la parité de f.
3. Démontrer que : $\forall x \in D, f(x+2\pi) = f(x)$. Interpréter graphiquement.
4. (a) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0;\pi[$.
   (b) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers π par valeurs inférieures.
5. Construire la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 2

Soit $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2+y^2 \leq 1\}$.

1. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\triangleleft$ par

$$(x,y) \triangleleft (x',y') \Leftrightarrow ((x<x') \text{ ou } (x=x' \text{ et } y \leq y'))$$

   (a) Démontrer que ceci définit une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Cet ordre est-il total ?
   (c) Donner l'ensemble des majorants de $\mathcal{D}$
   (d) Représenter $\mathcal{D}$ et l'ensemble de ses majorants dans le plan euclidien
   (e) $\mathcal{D}$ admet-il une borne supérieure ? Un plus grand élément ?
2. On munit $\mathbb{R}^2$ de la relation notée $\ll$ définie par $(x,y) \ll (x',y') \Leftrightarrow x \leq x'$ et $y \leq y'$.
   (a) Démontrer que $\ll$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$
   (b) L'ordre est-il total ?
   (c) $\mathcal{D}$ a-t-il des majorants ?
   (d) Représenter $\mathcal{D}$ et l'ensemble de ses majorants dans le plan euclidien
   (e) $\mathcal{D}$ a-t-il une borne supérieure ? un plus grand élément ?