Devoir Maison 06

Pour le lundi 16 Novembre 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

1. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{t^2}{(1+t^2)(2+t^2)} = \frac{a}{1+t^2} + \frac{b}{2+t^2}$$

2. Pour tout réel x on pose

$$f(x) = \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)(2+t^2)} \mathrm{d}t$$

   (a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = -\operatorname{Arctan} x + \sqrt{2} \operatorname{Arctan} \frac{x}{\sqrt{2}}$$

   (b) Déterminer la parité de f.

   (c) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

   (d) Etudier les variations de f. Dresser le tableau de variations.

3. (a) Pour tout réel u appartenant à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ on pose :

$$g(u) = \int_0^u \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x$$

   A l'aide du changement de variable $t = \tan x$ démontrer que : $\forall u \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, g(u) = f(\tan u)$.

   (b) En déduire le calcul de l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{1-t^2}\right) \mathrm{d}t$$

   (on effectuera le changement de variable $t = \sin(x)$.

Exercice 2

Soient A et P les matrice définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}

2. On pose $T = P\,A\,P^{-1}$.

   (a) Calculer la matrice T

(b) Calculer T^2, T^3, puis T^n pour out entier naturel $n \geq 3$.

3. En déduire que :
$$\forall n \geq 3, \quad A^n = 0$$
où 0 désigne la matrice nulle d'ordre 3.

4. Pour tout réel t, on défint la matrice $E(t)$ par :
$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$$
où I désigne la matrice unité d'ordre 3.

(a) Montrer que :
$$\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, \quad E(t) E(t') = E(t + t')$$

(b) Pour tout t réel, calculer $E(t) E(-t)$. En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de I, A, A^2, t.

(c) Pour tout t réel et pour tout entier naturel n, déterminer $[E(t)]^n$ en fonction de I, A, A^2, t et n.