Devoir Maison 6 - Eléments de Correction

Exercice 1

Partie I - Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

Soient A et P les matrice définies par :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&-1\\-2&0&-2\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

1. Montrons que la matrice P est inversible en utilisant la méthode du pivot :

$$P=\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\0&5&-1\\0&3&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\L_2\longleftarrow L_1+2L_2\\L_3\longleftarrow L_1-2L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\0&5&-1\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\longleftarrow 3L_2-5L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\-2&6&10\end{pmatrix}$$

La matrice triangulaire obtenue ne contient pas zéro sur la diagonale, P est donc inversible.Continuons le calcul deP^{-1}

$$\begin{pmatrix}4&2&0\\0&10&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\longleftarrow 2L_1-L_3\\L_2\longleftarrow 2L_2+L_3\\L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}4&-6&-10\\0&10&10\\-2&6&10\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}20&0&0\\0&10&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\longleftarrow 5L_1-L_2\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}20&-40&-60\\0&10&10\\-2&6&10\end{pmatrix}$$

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\longleftarrow L_1/20\\L_2\longleftarrow L_2/10\\L_3\longleftarrow L_3/2\end{matrix}\boxed{\begin{pmatrix}1&-2&-3\\0&1&1\\-1&3&5\end{pmatrix}=\mathrm{P}^{-1}}$$

2. a.b. $PAP^{-1}=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-1&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}=\boxed{T=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=T}$,

$\boxed{T^2=\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}, T^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3\Longrightarrow\boxed{\forall n\geq 3, T^n=T^3T^{n-3}=O_3}$

3. $T=PAP^{-1}\Leftrightarrow P^{-1}TP=\overbrace{P^{-1}P}^{I}AP^{-1}P=A\Leftrightarrow\boxed{A=P^{-1}TP}$

Par une récurrence rapide, si on suppose $A^n=P^{-1}T^nP$, alors $A^{n+1}=A^n.A=P^{-1}T^n\overbrace{PP^{-1}}^{I}TP=PT^{n+1}P$ donc $\boxed{A^n=P^{-1}T^nP,\forall n\in\mathbb{N}^*}$

$$\forall n\geq 3, T^n=O_3\Longrightarrow\forall n\geq 3,\quad A^n=O_3$$

(a) $\forall\,(t,t')\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}E(t)E(t')&=\left(I+tA+\tfrac{t^2}{2}A^2\right)\left(I+t'A+\tfrac{t'^2}{2}A^2\right)\\&=I+t'A+\tfrac{t'^2}{2}A^2+tA+tt'A^2+\tfrac{t^2}{2}A^2\\&=I+(t+t')A+\frac{\overbrace{t^2+2tt'+t'^2}^{(t+t')^2}}{2}A^2\end{aligned}$$

en utilisant $A^3=A^4=O_3$

$$\Leftrightarrow\boxed{\forall\,(t,t')\in\mathbb{R}^2,\quad \mathrm{E}(t)\mathrm{E}(t')=\mathrm{E}(t+t')}$$

(b) Par a. :$E(t)E(-t)=E(t-t)=E(0)=I$. Donc la matrice $E(t)$ est inversible telle que $\boxed{(E(t))^{-1}=E(-t)=I-tA+\frac{t^2}{2}A^2}$

(c) $[E(t)]^2=E(t)E(t)=E(t+t)=E(2t)$.*Montrons* par récurrence que $[E(t)]^n=E(nt),\forall n\in\mathbb{N}$

On a évidemment la relation intialisée à $n=0(E(0)=I=(E(t))^0), n=1, n=2$

Supposons qu'il existe un entier n tel que :$[E(t)]^n=E(nt)$, alors $[E(t)]^{n+1}=[E(t)]^nE(t)=E(nt)E(t)=E(nt+t)=E((n+1)t)$, ce qui prouve l'hérédité de la relation et achève sa preuve en vertu du principe de récurrence.

Donc :$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ [E(t)]^n=E(nt)=I+ntA+\frac{n^2t^2}{2}A^2}$

Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soient B et D les matrices définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. La méthode du pivot en 3 colonnes permet d'obtenir Q inversible et

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Un produit matriciel permet de vérifier le résultat.

3. D matrice diagonale$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Or $Q^{-1}BQ = D \Leftrightarrow B = QDQ^{-1}$, ce qui entraîne par une récurrence rapide,$B^n = QD^nQ^{-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Relation encore vraie pour $n = 0$.

$$Donc\ B^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ -1 & -2 \times 2^n \end{pmatrix} Q^{-1}$$

4.

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ -1 & -2 \times 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ -2 + 2 \times 2^n & -1 + 2 \times 2^n \end{pmatrix}$$

$$Donc\ B^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$$

5. Pour tout entier naturel n non nul, et pour tout réel t,

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} B^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{(2-2^k)}{k!} t^k & \sum_{k=0}^n \frac{(1-2^k)}{k!} t^k \\ \sum_{k=0}^n \frac{(2^{k+1}-2)}{k!} t^k & \sum_{k=0}^n \frac{(2^{k+1}-1)}{k!} t^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n(t) & c_n(t) \\ b_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{a_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}}, \boxed{b_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{2(2t)^k - 2t^k}{k!}}$$

$$\boxed{c_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k - (2t)^k}{k!}}, \boxed{d_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{2(2t)^k - t^k}{k!}}$$

6. $n \xrightarrow{\lim} +\infty \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x, \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow n \xrightarrow{\lim} +\infty \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} = e^t$, $n \xrightarrow{\lim} +\infty \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} = e^{2t}$.

Donc $n \xrightarrow{\lim} +\infty\ a_n(t) = 2e^t - e^{2t}$, $n \xrightarrow{\lim} +\infty\ b_n(t) = 2e^{2t} - 2e^t$, $n \xrightarrow{\lim} +\infty\ c_n(t) = e^t - e^{2t}$, $n \xrightarrow{\lim} +\infty\ d_n(t) = 2e^{2t} - e^t$

(a)

$$E(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} c_n(t) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} d_n(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow E(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$$

(b) $E(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^t \\ -2e^t & -e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{2t} & -e^{2t} \\ 2e^{2t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} = e^t \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}_{E_1} + e^{2t} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{E_2}$

(c) $E_1^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = E_1,\ E_2^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = E_2,\ E_1E_2 = O_2,\ E_2E_1 = O_2$

(d) Pour tout t réel, $E(t)E(-t) = \left(e^tE_1 + e^{2t}E_2\right)\left(e^{-t}E_1 + e^{-2t}E_2\right) = E_1^2 + E_2^2 = I$, donc $E(t)$ est inversible telle que $\boxed{(E(t))^{-1} = E(-t) = e^{-t}E_1 + e^{-2t}E_2}$

Exercice 2

1. Déterminons deux réels a et b tels que $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{t^2}{(1+t^2)(2+t^2)} = \frac{a}{1+t^2} + \frac{b}{2+t^2}$.

Or on a :

$$\frac{a}{1+t^2} + \frac{b}{2+t^2} = \frac{2a + at^2 + b + bt^2}{(1+t^2)(2+t^2)}$$

Les dénominateurs étant égaux, on peut identifier les coefficients des polynômes au numérateur : $2a + b = 0$ et $a + b = 1$ autrement dit $a = -1$ et $b = 2$.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \frac{t^2}{(1+t^2)(2+t^2)} = \frac{-1}{1+t^2} + \frac{2}{2+t^2}}$$

2. Pour tout réel x on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)(2+t^2)} \mathrm{d}t$.

La fonction intégrée étant définie et continue sur $\mathbb{R}$, f est définie sur $\mathbb{R}$.

(a) Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\operatorname{Arctan} x + \sqrt{2} \operatorname{Arctan} \frac{x}{\sqrt{2}}$

$$f(x) = \int_0^x \frac{-1}{1+t^2} + \frac{2}{2+t^2}\mathrm{d}t = [-\operatorname{Arctan}(t)]_0^x + \int_0^x \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\mathrm{d}t$$

$$f(x) = -\operatorname{Arctan} x + + \int_0^x \sqrt{2}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\mathrm{d}t = -\operatorname{Arctan} x + \sqrt{2}\operatorname{Arctan}\frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\operatorname{Arctan} x + \sqrt{2}\operatorname{Arctan}\tfrac{x}{\sqrt{2}}}$$

(b) Déterminons la parité de f.
Soit $x \in R$, on a $-x \in \mathbb{R}$ et

$$f(-x) = -\operatorname{Arctan}(-x) + \sqrt{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{-x}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{Arctan}(x) - \sqrt{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = -f(x)$$

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est impaire.}}$$

(c) Calculons la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}\frac{\pi}{2} = (\sqrt{2}-1)\frac{\pi}{2}$$

(d) Etudions les variations de f.
f est définie comme la primitive qui s'annule en 0 de $g : x \mapsto \frac{t^2}{(1+t^2)(2+t^2)}$ qui est de signe positif sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (\sqrt{2}-1)\frac{\pi}{2}$ et par imparité, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = (1-\sqrt{2})\frac{\pi}{2}$.

3. (a) Pour tout réel u appartenant à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ on pose $g(u) = \int_0^u \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.
Posons le changement de variable $t = \tan x$:
— tan est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.
— $\forall x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, $\tan'(x) = 1+\tan^2(x)$ donc $\mathrm{d}t = (1+t^2)\mathrm{d}x$.
— $tan(0) = 0$
On obtient pour tout u de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$:

$$g(u) = \int_0^u \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$g(u) = \int_0^u \frac{\sin^2 x}{1+1-\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$g(u) = \int_0^u \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{2-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\mathrm{d}x$$

$$g(u) = \int_0^u \frac{\tan^2(x)}{2-\tan^2(x)}\mathrm{d}x$$

$$g(u) = \int_0^{tan(u)} \frac{t^2}{2-t^2}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$\boxed{\forall u \in]-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}[, g(u) = f(\tan u)}$$

(b) Calculons l'intégrale $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{Arctan}\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$
Posons le changement de variable $t = \sin x$:
— sin est $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\frac{\pi}{6}]$.
— $\forall x \in [0;\frac{\pi}{6}]$, $\sin'(x) = \cos(x)$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{Arctan}\sqrt{1-\sin^2(x)}\cos(x)\mathrm{d}x$$

Or cos positif sur $[0;\frac{\pi}{6}]$ donc on obtient :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{Arctan}(\cos(x))\cos(x)\mathrm{d}x$$

Il reste à faire une intégration par parties avec pour fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\frac{\pi}{6}]$:
— $x \mapsto \operatorname{Arctan}(\cos(x))$ à dériver.
— $x \mapsto \cos(x)$ à primitiver.
On obtient :

$$I = [\operatorname{Arctan}(cos(x))sin(x)]_0^{\frac{\pi}{6}} + g\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Et le calcul se termine : on obtient une somme de 3 Arctan !