

Devoir Maison 05

Pour le lundi 12 Octobre 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A le point d'affixe $z_A = \frac{i}{2}$.

$\mathcal{T}$ est l'application qui, à tout point M , d'affixe z , distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que

$$2zz' = i(z + z').$$

1. On appelle I et J les points d'affixes respectives : $z_I = 1$, $z_J = i$. Soit K le milieu du segment [IJ].
 - (a) Déterminer l'affixe z_K de K.
 - (b) Déterminer les affixes des images des points I, J, K par l'application $\mathcal{T}$.
 - (c) En déduire que $\mathcal{T}$ ne conserve pas les milieux.
2. Déterminer les points invariants par $\mathcal{T}$.
3. Montrer que $M' = \mathcal{T}(M)$ si et seulement si $\left(z' - \frac{i}{2}\right)\left(z - \frac{i}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.
4. En déduire l'image par $\mathcal{T}$ du cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 1.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle (E) suivante définie sur l'intervalle $I =]0; \frac{1}{2}[$

$$xy' + y = \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Déterminer une solution particulière de (E) à l'aide de la méthode de la variation de la constante (voir chapitre 5 pour une primitive à la fin de la méthode).
3. En déduire les solutions de (E) sur I .
4. Déterminer la solution g vérifiant $g(\frac{1}{4}) = \frac{2\pi}{3}$