

Devoir Maison 5 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. (a) On a $z_K = \frac{1+i}{2}$.

(b) On a $2zz' = i(z+z') \Leftrightarrow 2zz' = iz + iz' \Leftrightarrow z'(2z-i) = iz \Leftrightarrow z' = \frac{iz}{2z-i}$, pour $z \neq \frac{i}{2}$.

Donc $z_{I'} = \frac{i}{2-i} = \frac{i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{i(2+i)}{4+1} = \frac{-1+2i}{5}$.

$z_{J'} = \frac{ii}{2i-i} = \frac{-1}{i} = i = z_J$.

$z_{K'} = \frac{i\frac{1+i}{2}}{1+i-i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

(c) K est le milieu de [IJ] et K' n'est pas le milieu de [I'J'] : $\mathcal{T}$ ne conserve pas les milieux.

2. On a $z' = z \Leftrightarrow 2zz = i(z+z) \Leftrightarrow 2z^2 = 2zi \Leftrightarrow$

$$2z(z-i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2z = 0 \\ z-i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = i \end{cases}$$

L'origine O et le point J sont les seuls points invariants par $\mathcal{T}$.

3. Pour $z \neq \frac{i}{2}$, $\left(z' - \frac{i}{2}\right)\left(z - \frac{i}{2}\right) + \frac{1}{4} = zz' - \frac{i}{2}(z+z') = \frac{1}{2}[2zz' - i(z+z')]$.

Mais par définition $2zz' - i(z+z') = 0$ si et seulement si z' est l'afixe de M' image par $\mathcal{T}$ du point M d'afixe z .

Donc $M' = \mathcal{T}(M) \Leftrightarrow \left(z' - \frac{i}{2}\right)\left(z - \frac{i}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

4. $M(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow AM = 1 \Leftrightarrow \left|z - \frac{i}{2}\right| = 1$.

D'après la question précédente en prenant le module de chaque membre d'égalité trouvée :

$$\left|z - \frac{i}{2}\right| \times \left|z' - \frac{i}{2}\right| = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}.$$

Donc pour un point M de $\mathcal{C}$, on a $1 \times \left|z' - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{4}$.

Cette égalité signifie que le point M' d'afixe z' appartient au cercle $\mathcal{C}'$ de centre A et de rayon $\frac{1}{4}$.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle (E) suivante définie sur l'intervalle $I =]0; \frac{1}{2}[$: $xy' + y = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

1. Equation homogène : (EH) : $y' + \frac{1}{x}y = 0$

Soit la fonction a définie sur I par $a(x) = \frac{1}{x}$. Elle est continue sur I donc admet des primitives sur I . Soit A une primitive de a sur I .

$\forall x \in I, A(x) \ln|x| = \ln x$ car $x > 0$ alors $e^{-A(x)} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$

Conclusion : $\mathcal{S}_{EH} = \{f_k : x \mapsto \frac{k}{x}, \quad k \in \mathbb{R}\}$

2. On pose $y_0(x) = \frac{k(x)}{x}$ où k est une fonction dérivable sur I . Alors $\forall x \in I, y'_0(x) = \frac{k'(x)x - k(x)}{x^2}$ et on reporte dans (E) : $x \frac{k'(x)x - k(x)}{x^2} + \frac{k(x)}{x} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \Leftrightarrow k'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ d'où $k(x) = \text{Arcsin}(2x)$

Une solution particulière de (E) est donc la fonction y_0 définie par :

$\forall x \in I, y_0(x) = \frac{\text{Arcsin}(2x)}{x}$

3. Les solutions de (E) sur I sont obtenues en faisant la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.

Conclusion : $\mathcal{S}_E = \{f_k : x \mapsto \frac{k}{x} + \frac{\text{Arcsin}(2x)}{x}, \quad k \in \mathbb{R}\}$

4. $g(\frac{1}{4}) = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 4k + 4 \text{Arcsin}(\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 4k + 4\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow k = 0$

g est donc la fonction définie par : $\forall x \in I, \quad g(x) = \frac{\text{Arcsin}(2x)}{x}$