

Devoir Maison 4 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. Sous forme résolue, l'équation devient $y'' = -\frac{4}{x}y' - \frac{2}{x^2}y$.

Ceci est possible

sur tout intervalle ne contenant pas 0

2. Sur I , x ne s'annule pas. On pose $y = \frac{z}{x^2}$, soit $z = yx^2$ qui se dérive en $z' = y'x^2 + 2xy$, puis $z'' = y''x^2 + 4xy' + 2y$. L'équation (E) devient immédiatement

$$z'' = 0$$

D'où $z' = A$ puis $z = Ax + B$. Finalement, avec $y = \frac{z}{x^2}$, il vient

$$y = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$$

3. Cette fois, nous effectuons le changement de variable $t = \ln(x)$ (valable sur I)
 $y(x) = y(e^t) = \phi(t)$ donc $\phi'(t) = e^t y'(e^t)$ et $\phi''(t) = e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t)$
 (E) s'écrit $e^{2t} y''(e^t) + 4e^t y'(e^t) + 2y(e^t) = 0$ soit encore

$$(E_2) : \phi'' + 3\phi' + 2\phi = 0$$

C'est une équation linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique $\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0$ admet deux racines distinctes $\alpha = -2$ et

$\alpha = -1$, d'où les solutions de (E_2) : $\phi = A e^{-t} + B e^{-2t}$. On retrouve

$$y = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$$