

## Devoir Surveillé 02 - Eléments de Correction

**Exercice 1**

1. Binôme de Newton avec  $1^k 1^{n-k}$ .
2. Binôme de Newton avec  $(-1)^k 1^{n-k}$ .
3. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{k=0, k \text{ impair}}^n (-1)^k \binom{n}{k} + \sum_{k=0, k \text{ pair}}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

4. A la question 1), on a trouvé une somme égale à  $2^n$  et  $2^n$  divisé par 2 fait  $2^{n-1}$ .

**Exercice 2**

La partie **B** peut être traitée indépendamment de la partie **A**.

**Partie A**

1. (a) On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^x = 1$  et par quotient de limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = 0.$$

- (b) En multipliant chaque terme par  $e^{-x}$ , on obtient  $f_0(x) = \frac{1}{e^{-x} + 1}$ .

On sait que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = 0$ , donc par quotient de limites  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = 1$ .

- (c) Les résultats montrent que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à  $\mathcal{C}_0$  au voisinage de moins l'infini et que la droite d'équation  $y = 1$  est asymptote horizontale au voisinage de plus l'infini.

2. Posons  $X = x$  et  $Y = y - \frac{1}{2}$  soit  $x = X$  et  $y = Y + \frac{1}{2}$ , d'où en remplaçant l'équation  $y = \frac{e^x}{1 + e^x}$ , on obtient  $Y + \frac{1}{2} = \frac{e^X}{1 + e^X}$  soit  $Y = \frac{e^X}{1 + e^X} - \frac{1}{2} = \frac{2e^X - 1 - e^X}{1 + e^X} = \frac{e^X - 1}{e^X + 1}$ .

On a  $Y(-X) = \frac{e^{-X} - 1}{e^{-X} + 1} = \frac{1 - e^X}{1 + e^X}$  (en multipliant chaque terme par  $e^X$ )  
 $= \frac{e^X - 1}{e^X + 1} = -\frac{e^X - 1}{e^X + 1} = -Y(X)$ , ce qui montre la symétrie de  $\mathcal{C}_0$  autour du point K.

3. Etudier les variations de  $f_0$ . Quotient de fonctions dérivables le dénominateur supérieur ou égal à 1 étant non nul,  $f_0$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sur cet intervalle :

$$f'_0(x) = \frac{e^x(1 + e^x) - e^x \times e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}.$$

Quotient de deux termes supérieur à zéro cette dérivée est supérieure à zéro : la fonction  $f_0$  est donc strictement croissante de 0 à 1 (limites respectives en  $-\infty$  et  $+\infty$ ).

4. (a) Une équation est  $y - f_0(0) = f'_0(0)(x - 0)$ .

On a  $f_0(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$  et  $f'_0(0) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$ , d'où l'équation :

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x \text{ ou } y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

- (b) Soit  $d$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $d(x) = f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) =$

$$\frac{e^x}{1 + e^x} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = \frac{4e^x - x - xe^x - 2 - 2e^x}{4(1 + e^x)} = \frac{2e^x - xe^x - x - 2}{4(1 + e^x)}$$

Comme  $4(1 + e^x) > 0$  quel que soit le réel  $x$ , le signe de cette différence est le signe du numérateur  $g(x) = 2e^x - xe^x - x - 2$ .

- (c)  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sur cet intervalle :

$$g'(x) = 2e^x - e^x - xe^x - 1 = e^x - xe^x - 1;$$

$$g''(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x \text{ qui est du signe de } -x$$

- (d) Donc  $g''(x) < 0$  sur  $\mathbb{R}_+$  et  $g''(x) > 0$  sur  $\mathbb{R}_-$  ;

$g'$  est donc croissante sur  $\mathbb{R}_-$  et décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = -1$  ;  $g'(0) = 1 - 1 = 0$  ; enfin comme  $g'(x) = e^x(1 - x) - 1$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = -\infty$ .

$g'(x) < 0$  sur  $\mathbb{R}$  sauf en 0.

La fonction  $g$  est donc décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

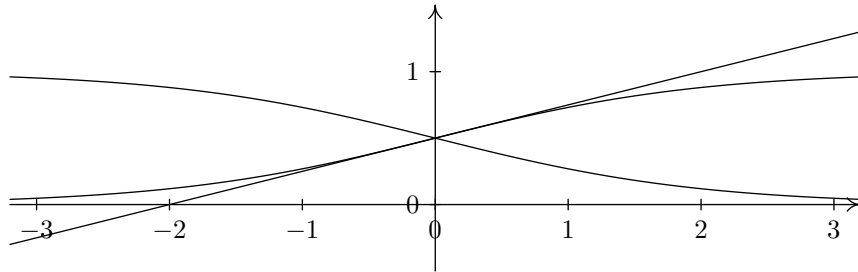
Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$  ;

$$g(0) = 2 - 2 = 0 ;$$

et comme la fonction  $g$  est décroissante  $g(x) < 0$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

- (e) Le résultat précédent montre que  $g$  est positive sur  $\mathbb{R}_-$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{C}_0$  est au dessus de T sur  $\mathbb{R}_-$  et en dessous sur  $\mathbb{R}_+$  avec un point de contact par définition en 0.

5.



6. (a) On a  $M\left(x; \frac{e^x}{1+e^x}\right)$  et  $M'\left(x; \frac{1}{1+e^x}\right)$ .  
 Or  $\frac{1}{2} \left[ \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^x} \right] = \frac{1}{2} \frac{1+e^x}{1+e^x} = \frac{1}{2}$  : ceci montre que les points  $M$  et  $M'$  sont symétriques autour de la droite (d) d'équation  $y = \frac{1}{2}$ .  
 (b) D'après le résultat précédent  $\mathcal{C}_1$  est la symétrique de  $\mathcal{C}_0$  autour de l'horizontale  
 (d) d'équation  $y = \frac{1}{2}$  (voir le tracé ci-dessus).

### Partie B

Etude de la suite  $u$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

1.  $u_0 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$  : le numérateur étant la dérivée du dénominateur, on a :

$$u_0 = [\ln(1+e^x)]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(1+1) = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

2.  $u_0 + u_1 = 1 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx + \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{1+e^x}{1+e^x} dx = \int_0^1 1 dx = 1.$

$$\text{Donc } u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

3. Quel que soit le naturel  $n$ ,  $f_n$  quotient de termes supérieurs à zéro est un nombre supérieur à zéro ; les intégrales de ces fonctions positives sur l'intervalle  $[0; 1]$  sont donc des nombres supérieurs à zéro.

4. (a) Quel que soit le réel  $x$ ,  $k(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{e^x}{e^{(n+1)x}(1+e^x)} - \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} = \frac{1}{e^{nx}(1+e^x)} - \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} = \frac{1-e^x}{e^{nx}(1+e^x)}.$

- (b) Etudier le signe de  $k(x)$  pour  $x \in [0; 1]$ . Le dénominateur est supérieur à zéro comme produit de deux nombres supérieurs à zéro ; le signe de  $k(x)$  est donc celui du numérateur  $1 - e^x$ .

$$1 - e^x > 0 \Leftrightarrow 1 > e^x \Leftrightarrow 0 > x; k(x) > 0 \text{ si } x < 0;$$

$$1 - e^x < 0 \Leftrightarrow 1 < e^x \Leftrightarrow 0 < x; k(x) < 0 \text{ si } x > 0.$$

$$k(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

- (c) D'après la question précédente l'intervalle d'intégration ne contient que des valeurs positives, donc  $k(x) < 0$ , ce qui signifie que la suite  $(f_n)$ , donc aussi  $(u)$  est décroissante.

5. (a) Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on a :

$$\begin{aligned} u_{n-1} + u_n &= \int_0^1 \frac{e^x}{e^{(n-1)x}(1+e^x)} dx + \int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} dx = \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{e^x \times e^x}{e^{nx}(1+e^x)} + \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} \right] dx = \int_0^1 \frac{e^x(1+e^x)}{e^{nx}(1+e^x)} dx = \\ &= \int_0^1 e^{(1-n)x} dx = \left[ \frac{e^{(1-n)x}}{1-n} \right]_0^1 = \frac{e^{(1-n)} - 1}{1-n} = \frac{1 - e^{-(n-1)}}{n-1}. \end{aligned}$$

- (b) Avec  $n = 3$ , la relation précédente donne :

$$u_2 + u_1 = \frac{1 - e^{-(3-1)}}{3-1} = \frac{1 - e^{-2}}{2}, \text{ soit } u_2 = \frac{1 - e^{-2}}{2} - u_1 = \frac{1 - e^{-2}}{2} - 1 + \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

6. (a) On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

- (b) On a démontré que la suite  $(u)$  est décroissante, donc pour  $n$  supérieur ou égal à 2, soit

$$u_n < u_{n-1} \Rightarrow u_n + u_n < u_{n-1} + u_n \Rightarrow u_n < \frac{u_{n-1} + u_n}{2}, \text{ soit } u_n < v_n.$$

- (c) D'après la question précédente la suite  $(u_n)$  positive est majorée par une suite positive qui a pour limite 0 en plus l'infini. D'après le théorème des gendarmes la suite  $(u_n)$  converge elle aussi vers 0.

### Exercice 3

1. (a) Pour  $n$  naturel quelconque :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} = \left( \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \right) - \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ &= \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) u_n + \left( \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) v_n = -\frac{1}{12} u_n + \frac{1}{12} v_n = \frac{1}{12} (v_n - u_n); \end{aligned}$$

d'où :

$$w_{n+1} = \frac{1}{12} w_n, \text{ égalité qui montre que la suite } w \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{12}.$$

Le premier terme est  $w_0 = v_0 - u_0 = 12 - 1 = 11 > 0$ .

On sait que quel que soit le naturel  $n$  :

$w_n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n$  ; ce produit est positif car produit de deux facteurs positifs.

(b) Comme  $-1 < \frac{1}{12} < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$ , d'où par produit de limites  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ .

2. (a) Pour  $n$  naturel quelconque  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n = \frac{2}{3}(v_n - u_n) = \frac{2}{3}w_n > 0$ .

On a vu à la question précédente que  $w_n > 0$ , donc  $u_n$  produit de deux facteurs positifs est lui aussi supérieur à zéro.

Finalement  $u_{n+1} - u_n > 0$ , signifie que la suite  $u$  est croissante.

(b) De même  $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) - v_n = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}v_n = -\frac{1}{4}(v_n - u_n) = -\frac{1}{4}w_n < 0$ , car produit d'un facteur négatif par un facteur positif.  $v_{n+1} - v_n < 0$ , signifie que la suite  $v$  est décroissante.

(c) La suite  $u$  croissante est minorée par  $u_0 = 1$  et la suite  $v$  décroissante est majorée par  $v_0 = 12$ .

D'autre part  $w_n > 0 \Leftrightarrow v_n - u_n > 0 \Leftrightarrow v_n > u_n \Leftrightarrow u_n < v_n$ , donc finalement quel que soit le naturel  $n$  :

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

3. Soit  $\ell$  la limite de  $u$  et  $\ell'$  la limite de la suite  $v$ .

On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ , soit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  et enfin  $\ell - \ell' = 0 \Leftrightarrow \ell = \ell'$ .

Les deux suites sont respectivement croissante et décroissante, ont la même limite et leur différence a pour limite zéro : elles sont adjacentes.

4. (a) On sait que  $t_n = 3u_n + 8v_n$ .

Pour tout entier naturel  $n$  :  $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n = 3u_n + 8v_n = t_n$  : la suite  $t$  est donc constante et  $t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 3 + 96 = 99$ .

Conclusion  $t_n = 99$  quel que soit le naturel  $n$ .

(b) En prenant les limites égales à l'infini, on obtient :

$$3\ell + 8\ell = 99 \Leftrightarrow 11\ell = 99 \Leftrightarrow \ell = 9.$$

Les deux suites ont pour limite 9.

#### Exercice 4

On note  $\mathcal{C}_f$  la représentation graphique de  $f$ , relativement à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

#### Etude de $f$ .

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  est bien définie pour tout réel  $x$ .

$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{1}{\sqrt{(-x)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = f(x) \Rightarrow f$  est paire sur  $\mathbb{R}$

2.  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1 + x^2)^{-1/2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} \times 2x \times (1 + x^2)^{-3/2}$

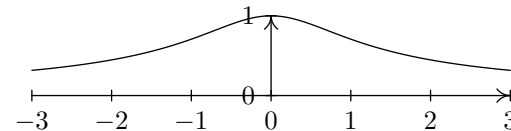
Donc  $f'(x) < 0, \forall x \in ]0, +\infty[$  et  $f'(0) = 0$  donc la fonction continue  $f$  est strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$ .

3.  $x \xrightarrow{\lim} +\infty \sqrt{x^2 + 1} = +\infty \Rightarrow x \xrightarrow{\lim} +\infty f(x) = 0$ , donc  $\mathcal{C}_f$  admet l'axe  $(Ox)$  pour asymptote horizontale en  $+\infty$ .

4.  $f$  est continue sur chaque intervalle  $]-\infty; 0]$  et  $[0; +\infty[$ .

Par parité :  $\left( f \text{ strictement décroissante sur } [0; +\infty[ \text{ et } x \xrightarrow{\lim} +\infty f(x) = 0 \right) \Rightarrow \left( f \text{ strictement croissante sur } ]-\infty; 0] \text{ et } x \xrightarrow{\lim} -\infty f(x) = 0 \right)$

avec  $f(0) = 1$  donc  $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < f(x) \leq 1$



5.  $f$  est continue, strictement décroissante sur l'intervalle  $I = [0, +\infty[$ , à valeurs dans  $J = ]0, 1]$  donc  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $J$ . On note  $f^{-1}$  la bijection réciproque de  $f$  restreinte à l'intervalle  $I$ .

6.  $\forall y \in ]0, 1], x \in [0, +\infty[, f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} = y^2 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} = 1+x^2$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{y^2} - 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1-y^2}{y^2}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$

7.  $\forall y \in ]0, 1], x \in [0, +\infty[, f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$  donc  $\forall y \in ]0, 1], f^{-1}(y) = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$ .

## Calcul d'aire

On considère la fonction numérique  $F$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$$F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$1. \bullet \forall x \in \mathbb{R}^+, x \geq 0, \sqrt{x^2 + 1} > 0 \implies x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}^-, x < 0 \implies x \neq \sqrt{x^2 + 1} \implies x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{x^2 - (x^2 + 1)}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$$

  m  thode des expressions conjuguées

$$\bullet a + b = \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)} = \frac{a^2 - b^2}{a-b}, a \neq b$$

$$\text{donc } \forall x \in \mathbb{R}^-, x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{-x + \sqrt{x^2 + 1}} \text{ où } -x + \sqrt{x^2 + 1} > 0.$$

Ainsi :  $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} > 0 \implies F = \ln(u(x))$  est définie sur  $\mathbb{R}$

$$2. \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \ln(u(x)) \text{ avec } u'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$, F'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} \times \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = f(x) \Leftrightarrow F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$3. \forall x \in \mathbb{D}_F, -x \in \mathbb{D}_F \text{ et } F(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x + \sqrt{x^2 + 1} \neq 0 \implies \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{x^2 + 1 - x^2}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\text{donc } \forall x \in \mathbb{D}_F, F(-x) = \ln\left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right) = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -F(x).$$

$\Leftrightarrow F$  est impaire sur son ensemble de définition.

$$4. x \xrightarrow[\lim]{+\infty} x + \sqrt{x^2 + 1} = +\infty \implies x \xrightarrow[\lim]{+\infty} F(x) = +\infty. F \text{ étant impaire, } x \xrightarrow[\lim]{-\infty} F(x) = -\infty.$$

$$5. \text{ Pour tout réel } \lambda \text{ strictement positif, } \mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^{2\lambda} f(x) dx = [F(x)]_{\lambda}^{2\lambda} = \ln\left(\frac{2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}}\right).$$

$$\text{Donc } \forall \lambda > 0, \mathcal{A}(\lambda) = \ln\left(\frac{2\lambda + \sqrt{4\lambda^2} \times \sqrt{1 + 1/(4\lambda^2)}}{\lambda + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2}} \times \sqrt{1 + 1/\lambda^2}}\right) =$$

$$\ln\left(2 \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 1/(4\lambda^2)}}{1 + \sqrt{1 + 1/\lambda^2}}\right)\right)$$

$$\text{avec } \lambda \xrightarrow[\lim]{+\infty} \frac{1}{\lambda^2} = 0 \implies \lambda \xrightarrow[\lim]{+\infty} \frac{1 + \sqrt{1 + 1/(4\lambda^2)}}{1 + \sqrt{1 + 1/\lambda^2}} = \frac{2}{2} = 1 \text{ et}$$

$$\boxed{\lambda \xrightarrow[\lim]{+\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \ln 2}$$

##   tude de la suite

$$1. \bullet \text{Calcul de } u_0 : u_0 = [F(x)]_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2})$$

$$\bullet \text{Calcul de } u_1 : u_1 = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} dx = [\sqrt{x^2 + 1}]_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

$$2. u_3 = \int_0^1 x^3 f(x) dx = \int_0^1 x^2 x f(x) dx.$$

$$\text{Posons } \begin{cases} u'(x) = x f(x) \implies u(x) = \sqrt{x^2 + 1} \\ v(x) = x^2 \implies v'(x) = 2x \end{cases}, \text{ les fonctions } u \text{ et } v \text{ sont de}$$

classe  $C^1$  sur le segment  $[0, 1]$ , donc on peut procéder à une intégration par parties :

$$u_3 = [x^2 \sqrt{x^2 + 1}]_0^1 - \int_0^1 2x \sqrt{x^2 + 1} dx = \sqrt{2} - \left[ \frac{(x^2 + 1)^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{3}$$

$$3. \text{ Sens de variation de } (u_n) : \text{Posons } x^0 = 1, \forall x \in [0, 1]$$

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n) f(x) dx \text{ (linéarité de l'intégrale) avec } (x^{n+1} - x^n) = x^n(x - 1) \leq 0, f(x) > 0, \forall x \in [0, 1] \dots$$

Par positivité de l'intégrale entre des bornes croissantes,  $u_{n+1} - u_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

La suite  $u$  est donc décroissante.

4. La suite  $(u_n)$  est décroissante, positive donc minorée par 0, elle est donc convergente.

5.  $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < f(x) \leq 1. \forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq x^n \leq 1$  donc :

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1 + x^2}} \leq x^n$$

Par positivité de l'intégrale entre des bornes croissantes :

$$0 \leq \int_0^1 x^n f(x) dx \leq \int_0^1 x^n dx \text{ avec } \int_0^1 x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$6. n \xrightarrow[\lim]{+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ donc, par le théorème de l'encadrement : } \boxed{n \xrightarrow[\lim]{+\infty} u_n = 0}$$