

Devoir Surveillé 01 - Eléments de Correction

Exercice 1
Partie A

1. (a) Calculons : $u_1 = 0,9 \times u_0 + 60 = 0,9 \times 400 + 60 = 420$
puis : $u_2 = 0,9 \times u_1 + 60 = 0,9 \times 420 + 60 = 438$.
- (b) Avec ces premiers termes calculés (et en regardant les termes suivants à la calculatrice), la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ semble être croissante.
2. Pour tout entier naturel n , on nomme I_n l'inégalité : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600$.

Démontrons par récurrence sa véracité :

Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 400$ et $u_{0+1} = u_1 = 420$. À l'indice 0, on a donc effectivement : $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 600$: l'inégalité I_0 est vraie.

Hérédité : Pour un entier naturel n quelconque, on suppose que l'inégalité I_n est vraie. On a :

$$I_n \implies 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600$$

$$\implies 0 \times 0,9 \leq u_n \times 0,9 \leq u_{n+1} \times 0,9 \leq 600 \times 0,9 \quad \text{car } 0,9 > 0$$

$$\implies 0 + 60 \leq 0,9u_n + 60 \leq 0,9u_{n+1} + 60 \leq 540 + 60 \quad \text{en ajoutant } 60 \text{ à chaque membre}$$

$$\implies 60 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 600 \quad \text{avec la relation de récurrence de la suite } (u_n)$$

$$\implies 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 600 \quad \text{par transitivité, car } 0 \leq 60$$

$$\implies I_{n+1}$$

La véracité de l'inégalité est donc héréditaire.

Conclusion : L'inégalité est vraie à l'indice 0, et pour tout indice n entier naturel, la véracité est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, on peut donc conclure que, pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600$.

3. (a) Tirons les conclusions de la question précédente pour la suite. On a :
 - $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$. Autrement dit : la suite est croissante.
 - $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 600$. Autrement dit : la suite est bornée par 0 et 600.

La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 600, et donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle est convergente, vers une limite ℓ , qui vérifie ici : $0 \leq \ell \leq 600$.

- (b) Posons f , la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,9x + 60$.

La suite (u_n) est donc définie par récurrence, et la fonction de récurrence est la fonction f , définie ci-dessus. Or, la suite est convergente (d'après la question précédente) et la fonction est continue sur $\mathbb{R}$ (c'est une fonction affine). En vertu du théorème du point fixe, la limite ℓ de la suite est une des solutions à l'équation $f(x) = x$.

Comme f est une fonction affine, de coefficient directeur $0,9 \neq 1$, les droites d'équations $y = f(x)$ et $y = x$ sont donc sécantes, en un seul point, donc l'équation n'a qu'une seule solution, et on a déjà identifié une solution évidente : $f(600) = 600$, donc 600 est la seule solution de l'équation. Donc $\ell = 600$.

La suite (u_n) converge vers 600.

4. *Remarque :* La justification ci-après est assez longue, elle vise à vous aider à comprendre la fonction "mystère". Autant de détail n'est pas attendu sur votre copie, rassurez-vous. Vous pouvez notamment programmer la fonction sur votre calculatrice et donner ce qu'elle renvoie.

La fonction est ce que l'on appelle une fonction "seuil", c'est d'ailleurs le nom qui est donné à l'argument avec lequel on appelle la fonction.

Le principe de cette fonction, c'est d'utiliser deux variables : n et u , qui contiennent respectivement un indice n et la valeur du terme u_n correspondant.

Ainsi, dans la phase d'initialisation, on commence avec la variable n contenant l'indice 0, et la variable u contenant la valeur 400, c'est-à-dire u_0 .

Ensuite, dans la boucle **while**, à chaque exécution de cette boucle, pour la variable n , on passe d'un indice n à l'indice suivant $n + 1$, et pour u , du terme u_n à $0,9u_n + 60$, c'est-à-dire à u_{n+1} .

Ceci va se poursuivre tant que le terme u_n dont la valeur est stockée dans la variable u est inférieur ou égal au seuil. Autrement dit, on s'arrête dès que u contient un terme de la suite strictement supérieur au seuil.

La fonction renvoie alors l'indice correspondant audit terme.

Avec la commande `mystere(500)` dans la console Python, on a donc 7, car $u_6 \approx 494$ et $u_7 \approx 504$. (Ces valeurs sont obtenues à la calculatrice.)

Partie B

Puisque, chaque année l'arboriculteur vend 10 % des arbres de son verger, il lui en reste donc 90 % et puis il replante 60 nouveaux arbres. Si on appelle (u_n) une suite donnant le nombre d'arbres dans son verger, la suite aura la relation de récurrence $u_{n+1} = 0,9u_n + 60$, comme la suite qui a été étudiée dans la partie A.

Le verger compte 400 arbres en 2023, donc si on précise que u_n représente le nombre d'arbre plantés dans le verger en $(2023+n)$, alors on a $u_0 = 400$ et la suite est effectivement exactement la suite étudiée dans la partie A.

S'il conserve ce rythme de plantation, alors notre étude dit que le nombre d'arbres dans son verger va croître et se stabiliser aux alentours de 600 arbres, c'est donc problématique, car il est limité à 500 arbres.

Notamment, à ce rythme, la fonction Python mystère nous a appris que à l'indice 7 c'est-à-dire en $2023 + 7 = 2030$, le nombre d'arbres dans le verger serait strictement

supérieur à 500 (environ 504 arbres), donc il devra modifier son rythme de plantation à ce moment là.

Exercice 2

1. On a les coordonnées suivantes : $\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \\ z_N - z_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. figure...

3. Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont clairement non colinéaires (l'abscisse de l'un est nulle sans que celle l'autre ne le soit), donc les trois points M, N et P sont non alignés, et définissent donc un plan.

4. (a) Puisque le repère est orthonormé, on va calculer le produit scalaire avec les coordonnées :

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = (-1) \times 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1) + \frac{1}{4} \times (-2) = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Les vecteurs sont donc orthogonaux et non nuls, donc l'angle qu'ils définissent est un angle droit. On en déduit que le triangle est rectangle en M.

Calculons les longueurs MN et MP :

$$MN = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{4}. \quad MP = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

Comme $MN \neq MP$, le triangle est seulement un triangle rectangle en M (il n'est pas isocèle).

(b) L'aire du triangle MNP est la moitié du produit de la longueur d'une base par la longueur de la hauteur correspondante.

Comme le triangle est rectangle en M, on choisit [MN] comme base et donc [MP] est donc la hauteur correspondante.

$$\text{L'aire du triangle est donc } \mathcal{A}_{MNP} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{4} \times \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{105}}{8}$$

5. (a) Avec $\vec{n}(5; -8; 4)$ on a :

$$\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n} = (-1) \times 5 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-8) + \frac{1}{4} \times 4 = -5 + 4 + 1 = 0$$

$$\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n} = 0 \times 5 + (-1) \times (-8) + (-2) \times 4 = 0 + 8 - 8 = 0$$

Le vecteur non nul $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (MNP), il est donc orthogonal au plan.

C'est donc un vecteur normal de (MNP).

(b) On en déduit que le plan (MNP) a une équation cartésienne de la forme $5x - 8y + 4z + d = 0$, où d est un nombre réel.

Comme $M \in (\text{MNP})$, d est tel que :

$$\begin{aligned} 5x_M - 8y_M + 4z_M + d &= 0 \Leftrightarrow 5 \times 1 - 8 \times 1 + 4 \times \frac{3}{4} + d = 0 \\ &\Leftrightarrow 5 - 8 + 3 + d = 0 \\ &\Leftrightarrow d = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (MNP) est donc bien $5x - 8y + 4z = 0$.

6. Si une droite est orthogonale au plan (MNP), c'est donc qu'elle est dirigée par un vecteur normal à (MNP), donc Vect n , par exemple.

Le point F a pour coordonnées F(1; 0; 1) et $\vec{n}$ a pour coordonnées Vect $n(5; -8; 4)$ et donc la droite passant par F et dirigée par $\vec{n}$ admet pour

représentation paramétrique le système : $\begin{cases} x = x_F + t\vec{n} \\ y = y_F + t\vec{n} \\ z = z_F + t\vec{n} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{soit, ici :}$

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -8t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

7. Si L le projeté orthogonal du point F sur le plan (MNP), alors, c'est que L est l'intersection du plan (MNP) avec la droite d , orthogonale à (MNP) et passant par F.

Si on considère le point L_t , de paramètre t sur la droite d , cherchons la valeur du paramètre t pour que $L_t \in (\text{MNP})$.

$$\begin{aligned} L_t \in (\text{MNP}) &\Leftrightarrow 5x_{L_t} - 8y_{L_t} + 4z_{L_t} = 0 \\ &\Leftrightarrow 5(1 + 5t) - 8(-8t) + 4(1 + 4t) = 0 \\ &\Leftrightarrow 5 + 25t + 64t + 4 + 16t = 0 \\ &\Leftrightarrow 105t + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = \frac{-9}{105} = \frac{-3}{35} \end{aligned}$$

Le point de paramètre $\frac{-3}{35}$ sur d a pour coordonnées : $\left(1 + 5 \times \frac{-3}{35}; -8 \times \frac{-3}{35}; 1 + 4 \times \frac{-3}{35}\right)$.

c'est donc bien le point L, de coordonnées $L\left(\frac{4}{7}; \frac{24}{35}; \frac{23}{35}\right)$.

8. On a donc $\overrightarrow{FL} \begin{pmatrix} \frac{-3}{7} \\ \frac{24}{35} \\ \frac{-12}{35} \end{pmatrix}$ et donc $FL = \sqrt{\left(\frac{-3}{7}\right)^2 + \left(\frac{24}{35}\right)^2 + \left(\frac{-12}{35}\right)^2} = \frac{3\sqrt{105}}{35}$.

Pour calculer le volume du tétraèdre FMNP, on va considérer le triangle MNP comme étant la base, avec $\mathcal{A}_{\text{MNP}} = \frac{\sqrt{105}}{8}$.

La hauteur correspondante est donc la distance du quatrième sommet F au plan contenant la base, c'est-à-dire le plan (MNP). D'après la question 7., c'est donc la distance FL, que l'on vient de calculer.

$$\text{On a donc } V_{\text{FMNP}} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\text{MNP}} \times \text{FL} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{105}}{8} \times \frac{3\sqrt{105}}{35} = \frac{105}{8 \times 35} = \frac{3 \times 35}{8 \times 35} = \frac{3}{8}$$

Le volume de FMNP est donc de $\frac{3}{8}$.

Exercice 3

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g définie par

$$g(x) = e^{2x} - e^x + 1$$

1. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = X = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^X = 0$; d'autre part $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$.

2. On peut écrire $g(x) = e^x (e^x - 1 + e^{-x})$.

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = 0$, on a par somme de limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 + e^{-x} = +\infty$ et enfin par produit de limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$.

3. g somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet intervalle et

$$g'(x) = 2e^{2x} - e^x = e^x (2e^x - 1).$$

4. D'après la question précédente comme $e^x > 0$, quel que soit le réel x , le signe de $g'(x)$ est celui de $2e^x - 1$.

- $2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$ (par croissance de la fonction logarithme népérien);

- $2e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$;

- $2e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow 2e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$.

La fonction g est donc décroissante sur $] -\infty ; -\ln 2[$ et croissante sur $] -\ln 2 ; +\infty[$.

Donc $g(-\ln 2) = e^{-2\ln 2} - e^{-\ln 2} + 1 = \frac{1}{e^{2\ln 2}} - \frac{1}{e^{\ln 2}} + 1 = \frac{1}{e^{\ln 4}} - \frac{1}{e^{\ln 2}} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$ est le minimum de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

5. Le minimum de la fonction g est supérieur à zéro, donc quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

6. En posant $X = e^x$, $g(x) = g(X) = X^2 - X + 1 = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

Sous cette écriture on voit que $g(X)$ est un trinôme somme de deux carrés dont l'un est supérieur à zéro, donc $g(X) > 0$.

Partie B

1. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln g(x)$.

Or on a vu dans la partie précédente que $g(x) > 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. $f(x) = \ln g(x)$ entraîne

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}.$$

3. Soit $\mathcal{T}_0$ la tangente au point d'abscisse 0 :

On a $M(x ; y) \in \mathcal{T}_0 \Leftrightarrow y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

- $f(0) = \ln(1 - 1 + 1) = \ln 1 = 0$;

- $f'(0) = \frac{2 - 1}{1 - 1 + 1} = 1$, donc :

$$M(x ; y) \in \mathcal{T}_0 \Leftrightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x.$$

4. On a vu que $f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} = \frac{g'(x)}{g(x)}$ et dans la partie que le dénominateur $g(x) > 0$; le signe de $f'(x)$ est donc celui de $g'(x)$ étudié dans la partie A.

Donc $f'(x) < 0$ sur $] -\infty ; -\ln 2[$, d'où la fonction f est décroissante sur cet intervalle et $f'(x) > 0$ sur $] -\ln 2 ; +\infty[$, d'où la fonction f est croissante sur cet intervalle.

5. • $f(-\ln 2) = \ln g(-\ln 2) = \ln \frac{3}{4} \approx -0,29$;

- On a vu que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln g(x) = +\infty$.

La fonction f est continue car dérivable sur $] -\ln 2 ; +\infty[$, strictement croissante de $f(-\ln 2) < 2$ à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel unique

$\alpha \in] - \ln 2 ; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

La calculatrice donne :

$f(1) \approx 1,7$ et $f(2) \approx 3,8$, donc $1 < \alpha < 2$;

$f(1,1) \approx 1,9$ et $f(1,2) \approx 2,2$, donc $1,1 < \alpha < 1,2$;

$f(1,12) \approx 1,99$ et $f(1,13) \approx 2,01$, donc $1,12 < \alpha < 1,13$.

Partie C

Conjecture 1 : d'après le résultat précédent elle est vraie ;

Conjecture 2 : elle est fausse f est croissante sur $] - \ln 2 ; +\infty[$;

Conjecture 3 : on a vu que l'équation de cette tangente est $y = x + 1$: la conjecture est fausse.

Exercice 4

Partie A - Etude d'une fonction

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1},$$

1. Pour tout réel x :

$f(-x) = \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1}$ soit en multipliant chaque terme par e^{2x} :

$$f(-x) = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} = -\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -f(x) : \text{la fonction } f \text{ est impaire.}$$

2. • Calculons : $f(x) + 1 = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} + 1 = \frac{e^{2x} - 1 + e^{2x} + 1}{e^{2x} + 1} = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} > 0$ comme quotient de deux termes supérieurs à zéro. Donc pour tout réel x , $f(x) > -1$.

• Calculons de même : $f(x) - 1 = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} - 1 = \frac{e^{2x} - 1 - e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{-2}{e^{2x} + 1} < 0$ car le dénominateur est positif.

$$f(x) - 1 < 0 \Leftrightarrow f(x) < 1.$$

f est minorée par -1 et majorée par 1 .

3. • On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Ce résultat signifie que la droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à Γ au voisinage de moins l'infini.

• En multipliant chaque terme par e^{-2x} , on peut écrire $f(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Ce résultat signifie que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à Γ au voisinage de plus l'infini.

4. La fonction f est dérivable comme quotients de fonctions dérivables le dénominateur ne s'annulant pas et sur $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x} + 1) - 2e^{2x}(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} > 0, \text{ car quotient de termes supérieurs à zéro.}$$

Conclusion f est strictement croissante de -1 à 1 .

f étant continue sur $\mathbb{R}$ de -1 à 1 , s'annule d'après le théorème des valeurs intermédiaires une fois, en α tel que $f(\alpha) = 0$.

$$\text{Or } f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = \ln 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Conclusion :

$$f(x) < 0, \text{ pour } x < 0;$$

$$f(0) = 0;$$

$$f(x) > 0, \text{ pour } x > 0.$$

5. (a) f étant continue sur $\mathbb{R}$ de -1 à 1 , f prend la valeur $\alpha \in] - 1 ; 1[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires une fois, en x_0 tel que

$$f(x_0) = \alpha.$$

$$\text{On a donc } f(x_0) = \alpha \Leftrightarrow \frac{e^{2x_0} - 1}{e^{2x_0} + 1} = \alpha \Leftrightarrow e^{2x_0} - 1 = \alpha(e^{2x_0} + 1) \Leftrightarrow e^{2x_0}(1 - \alpha) = 1 + \alpha \Leftrightarrow e^{2x_0} = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \text{ car } \alpha \neq 1.$$

$$\text{Donc } 2x_0 = \ln \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right) \text{ et enfin } x_0 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right).$$

$$(b) \text{ Pour } \alpha = \frac{1}{2}, \text{ on a donc } x_0 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \ln 3 = \ln \sqrt{3}.$$

Partie B - Tangentes à la courbe

1. $M(x; y) \in \Delta_1 \Leftrightarrow y - f(0) = f'(0)(x - 0)$. Or $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{4}{4} = 1$. D'où :

$$M(x; y) \in \Delta_1 \Leftrightarrow y = x.$$

$$2. \text{ Soit } 1 - f^2(t) = 1 - \left(\frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} \right)^2 = \frac{(e^{2t} + 1)^2 - (e^{2t} - 1)^2}{(e^{2t} + 1)^2} = \frac{4e^{2t}}{(e^{2t} + 1)^2} = f'(t).$$

On a vu que $-1 < f(t) < 1$, donc $0 \leq f(t) < 1$, puis $0 \leq [f(t)]^2 < 1$,
 $-1 < -[f(t)]^2 \leq 0$ et enfin $0 < 1 - [f(t)]^2 \leq 1$.

Finalement $0 < f'(t) \leq 1$.

La dérivée est supérieure à zéro (on le savait fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$), mais est majorée par 1 valeur atteinte comme on l'a vu en 0.

3. On vient de voir que $0 < f'(t) \leq 1$, donc par encadrement d'intégrales de fonctions positives sur l'intervalle $[0 ; x]$, avec $x \geq 0$,

$$\int_0^x 0 \, dt < \int_0^x f'(t) \, dt \leq \int_0^x 1 \, dt, \text{ soit : } 0 < \int_0^x f'(t) \, dt \leq x.$$

Mais on sait que la fonction f est l'intégrale de sa dérivée sur l'intervalle $[0 ; x]$ qui s'annule en $x = 0$, donc $\int_0^x f'(t) \, dt = f(x)$ et l'encadrement précédent devient $0 < f(x) \leq x$.

On en déduit que $f(x) - x \leq 0$ ce qui signifie que Γ est au dessous de Δ_1 sauf pour $x = 0$ où les deux courbes ont un point commun.

4. On a $f(x_A) = \frac{1}{2}$.

$$\text{On sait que } f'(x_A) = 1 - (f(x_A))^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$M(x ; y) \in \Delta_2 \Leftrightarrow y - f(x_A) = f'(\frac{1}{2})(x - x_A).$$

Or on a démontré à la question 5. b. que la solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ est le nombre $x_0 = \frac{1}{2} \ln 3$.

L'équation est donc :

$$M(x ; y) \in \Delta_2 \Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \left(x - \frac{1}{2} \ln 3 \right) \Leftrightarrow y = \frac{4ex}{(e+1)^2} + \frac{e-1}{e+1} - \frac{2e}{(e+1)^2}.$$

$$\text{Finalement } M(x ; y) \in \Delta_2 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} \ln 3.$$

5. Il faut résoudre l'équation $f'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 8e^{2x} = (e^{2x}+1)^2 \Leftrightarrow$

$$8e^{2x} = e^{4x} + 2e^{2x} + 1 \Leftrightarrow e^{4x} - 6e^{2x} + 1 = 0.$$

Posons $X = e^{2x} > 0$; l'équation devient $X^2 - 6X + 1 = 0$

On a $\delta = 36 - 4 = 32 = (4\sqrt{2})^2 > 0$; il y a deux solutions :

$$X_1 = e^{2x_1} = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2} \text{ et } X_2 = 3 - 2\sqrt{2} = e^{2x_2} \text{ qui n'a pas de}$$

solution.

$$e^{2x_1} = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow 2x_1 = \ln(3 + 2\sqrt{2}) \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2} \ln(3 + 2\sqrt{2}).$$

Or $3 + 2\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} + 1)^2$, donc finalement :

$$x_1 = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2})^2 = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Pour calculer l'image de ce nombre on utilise la relation : $1 - f(t)^2 = f'(t)$.

$$f(\ln(1 + \sqrt{2}))^2 = 1 - f'(\ln(1 + \sqrt{2})) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \text{ donc } f(\ln(1 + \sqrt{2})) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Partie C - Calcul d'intégrales

1. En multipliant chaque terme de $f(x)$ par e^{-x} , on obtient $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

En posant $u(x) = e^x + e^{-x}$, on a $u'(x) = e^x - e^{-x}$. Donc $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$. On reconnaît la dérivée de $\ln|u(x)| = \ln u(x)$, car $u(x)$ est la somme de deux termes supérieurs à zéro.

Conclusion : $\ln u(x)$ est une primitive de $f(x)$.

2. On a vu que pour $x > 0$, donc en particulier sur $[0 ; 1]$, $f(x) \geq 0$, donc l'aire de la surface comprise entre Γ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale (en unités d'aire) à $\int_0^1 f(x) \, dx$.

On a vu que pour $x > 0$ la courbe est sous la droite d'équation $y = x$, donc l'aire en unité d'aire de la surface comprise entre Γ , la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \, dx - \int_0^1 f(x) \, dx &= \\ \int_0^1 [x - f(x)] \, dx &= \left[\frac{x^2}{2} - \ln(e^x + e^{-x}) \right]_0^1 = \\ \frac{1^2}{2} - \ln(e^1 + e^{-1}) - \frac{0^2}{2} + \ln(e^0 + e^{-0}) &= \frac{1}{2} - \ln(e + e^{-1}) + \ln 2 = \frac{1}{2} + \ln 2 - \ln(e + e^{-1}). \end{aligned}$$

L'unité d'aire étant égale à 16 cm^2 , l'aire demandée est égale à

$$8 + 16 \ln 2 - 16 \ln(e + e^{-1}).$$

Voir la surface hachurée plus haut.

3. On a vu que pour tout réel x , $[f(x)]^2 = 1 - f'(x)$, donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f(x)]^2 \, dx &= \int_0^1 (1 - f'(x)) \, dx = [x - f(x)]_0^1 = 1 - f(1) - 0 + f(0) = \\ 1 - f(1) &= 1 - \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} = \frac{e^2 + 1 - e^2 + 1}{e^2 + 1} = \frac{2}{e^2 + 1} \end{aligned}$$

4. Toujours en utilisant la relation entre f et f' :

$$\int_0^1 x (1 - [f(x)]^2) \, dx = \int_0^1 x f'(x) \, dx.$$

En posant $u(x) = x$ et $v'(x) = f'(x)$, on a :

$u'(x) = 1$ et $v(x) = f(x)$. Toutes ces fonctions sont continues car dérivables sur $[0 ; 1]$; on peut donc intégrer par parties :

C. 1. : $\int_0^1 x f'(x) dx = [x f(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx$, soit en utilisant le résultat de la question

$$\int_0^1 x f'(x) dx = [x f(x)]_0^1 - [\ln(e^x + e^{-x})]_0^1 = \frac{e - e^{-1}}{e + e^{-1}} - \ln(e + e^{-1}) - 0 + \ln 2 =$$

$$\frac{e - e^{-1}}{e + e^{-1}} - \ln(e + e^{-1}) - \ln \frac{1}{2} = \frac{e - \frac{1}{e}}{e + \frac{1}{e}} - \ln\left(e + \frac{1}{e}\right) - \ln \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} - \ln\left(\frac{e^2 + 1}{2e}\right).$$

• Il suit :

$$\int_0^1 x [f(x)]^2 dx =$$

$$\int_0^1 x dx - \int_0^1 x [1 - f(x)^2] dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} - \ln\left(\frac{e^2 + 1}{2e}\right) =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} - \ln\left(\frac{e^2 + 1}{2e}\right).$$