

Devoir Maison 02 - Eléments de Correction

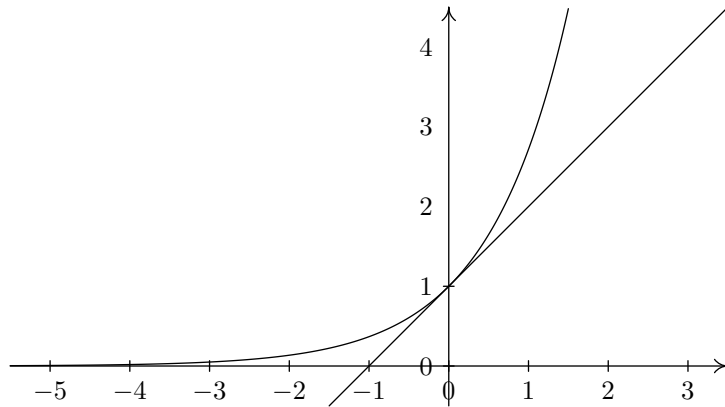
Exercice 1

$$f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x,$$

Partie A : Etude du cas particulier $n = 0$

f_0 est donc la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f_0(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

1.



2. Résolution graphique d'une inéquation :

(a) Avec $f(x) = e^x$, $f(0) = 1$, $f'(x) = e^x$ et $f'(0) = 1$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 est :

 $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, soit $y - 1 = x$ ou $y = x + 1$.On voit sur la figure que quel que soit le réel u , la courbe est au dessus de la tangente soit :

$$e^u \geq u + 1.$$

(b) En posant pour tout réel u , $x = -u$, l'inégalité précédente s'écrit :

$$e^{-x} \geq -x + 1 \Leftrightarrow e^{-x} + x - 1 \geq 0.$$

En multipliant chaque membre de l'inégalité précédente par e^x , on obtient :

$$1 + (x - 1)e^x \geq 0.$$

3. Limites :

(a) On a $f_0(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}$.Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc par somme de limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = +\infty.$$

(b) Avec la fonction $f(x) = e^x$, on a par définition $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = f'(0) = e^0 = 1. \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

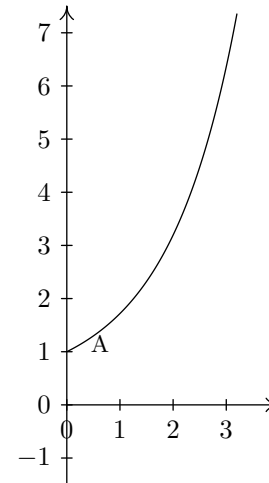
4. Sens de variations :

(a) La fonction f_0 quotients de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$, le dénominateur étant non nul est dérivable et sur cet intervalle :

$$f'_0(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x(x - 1) + 1}{x^2}.$$

(b) On a vu à la fin de la question précédente que $1 + (x - 1)e^x \geq 0$, donc $f'_0(x) \geq 0$ sur $]0 ; +\infty[$. La fonction f_0 est croissante de 1 à plus l'infini.

5.

**Partie B : Etude de la famille de fonctions f_n pour $n \geq 1$** 1. La fonction $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$ somme de quotient de fonctions dérivables le dénominateur ne s'annulant pas sur $]0 ; +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$$f'_n(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} + \frac{n}{x} = \frac{e^x(x - 1) + 1 + nx}{x^2}.$$

Or on a vu que $e^x(x - 1) + 1 \geq 0$, donc comme $nx > 0$, $e^x(x - 1) + 1 + nx > 0$: donc $f'_n(x) > 0$: les fonctions f_n sont croissantes sur $]0 ; +\infty[$.2. • On a vu que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} n \ln x = +\infty$, d'où par somme de limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

• On a vu que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ et on a $\lim_{x \rightarrow 0} n \ln x = -\infty$, d'où par somme de limites : $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = -\infty$.

Le dernier résultat montre que géométriquement l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathcal{C}_n$ au voisinage de zéro.

$$3. \text{ Soit } d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + (n+1) \ln x - \left(\frac{e^x - 1}{x} + n \ln x \right) = \ln x.$$

Or on sait que la fonction $\ln$ est négative entre 0 et 1, s'annule en 1 et est positive sur $]1; +\infty[$. Donc :

- Sur $]0; 1[$ $\mathcal{C}_{n+1}$ est au dessous de $\mathcal{C}_n$;
- Sur $]1; +\infty[$ $\mathcal{C}_{n+1}$ est au dessus de $\mathcal{C}_n$;
- Toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ contiennent le point de coordonnées $(1; e-1)$.

4. On a vu à la question précédente que $d_n(x) = n \ln x$, donc $d_n(1) = 0$: toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ contiennent donc le point $B(1; e-1)$.

$$5. (a) \text{ On a } f_1(x) = \frac{e^x - 1}{x} + \ln x.$$

On a vu que les fonctions f_n sont strictement croissantes de moins l'infini à plus l'infini ; comme elles sont continues car dérivables sur $]0; +\infty[$, il existe donc un réel unique $\alpha_1 \in]0; +\infty[$ tel que $f_1(\alpha_1) = 0$.

On a $f_1(1) = e-1 > 0$, donc $\alpha_1 \in]0; 1[$;

$$f(0,2) = \frac{e^{0,2} - 1}{0,2} + \ln 0,2 \approx -0,502 \text{ et}$$

$$f(0,9) = \frac{e^{0,9} - 1}{0,9} + \ln 0,9 \approx 7,2, \text{ donc } \alpha_1 \in]0,2; 0,9[.$$

(b) On a vu à la question 3 que sur $]0; 1[$, $\mathcal{C}_{n+1}$ est au dessous de $\mathcal{C}_n$, donc en particulier que $\mathcal{C}_2$ est au dessous de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_3$ est au dessous de $\mathcal{C}_2$, ... et donc que pour $n > 1$, $\mathcal{C}_n$ est au dessous de $\mathcal{C}_1$, donc en particulier que pour tout $n > 1$, $f_n(\alpha_1) < f_1(\alpha_1)$.

Or $f_1(\alpha_1) = 0$, donc $f_n(\alpha_1) < 0$ pour tout $n > 1$.

(c) Quel que soit $n > 1$, on vient de voir que $f_n(\alpha_1) < 0$ et on sait que $f_n(1) > 0$; la fonction f_n étant continue car dérivable s'annule donc pour une unique valeur α_n de $] \alpha_1; 1[$.

6. (a) On a vu dans la partie A que la fonction f_0 est strictement croissante en particulier sur l'intervalle $[0; 1[$, donc

$$0 < x < 1 \Rightarrow 1 < \frac{e^x - 1}{x} < e - 1.$$

(b) Par définition α_n annule la fonction f_n , soit :

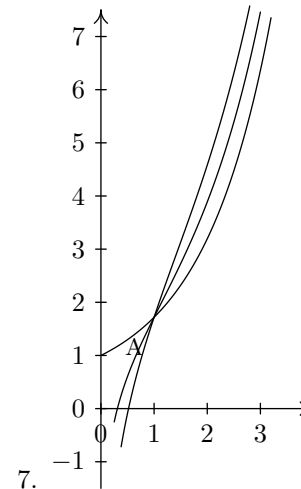
$$\frac{e^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n} + n \ln \alpha_n = 0.$$

On a vu au 6. a que si $x \in]0; 1[$, alors $\frac{e^x - 1}{x} < e - 1$ donc en particulier pour α_n , $\frac{e^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n} < e - 1 \Rightarrow \frac{e^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n} + n \ln \alpha_n < e - 1 + n \ln \alpha_n$ ou encore $0 < e - 1 + n \ln \alpha_n \Leftrightarrow n \ln \alpha_n > 1 - e \Leftrightarrow \ln \alpha_n > \frac{1 - e}{n}$.

La fonction exponentielle étant croissante, on a :

$$\ln \alpha_n > \frac{1 - e}{n} \Rightarrow e^{\ln \alpha_n} > e^{\frac{1 - e}{n}} \text{ ou encore } \alpha_n > e^{\frac{1 - e}{n}}.$$

(c) On a donc $e^{\frac{1 - e}{n}} < \alpha_n < 1$; or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e}{n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1 - e}{n}} = 1$, donc d'après le théorème des « gendarmes », $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$.



Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{(1 + \cos x)^2}$

1. La fonction est définie pour tout réel x tel que $1 + \cos x \neq 0$

or $1 + \cos x = 0 \Leftrightarrow x \equiv \pi[2\pi]$ donc le domaine de définition D de f est

$$D = \mathbb{R} - \{\pi[2\pi]\}.$$

2. $\forall x \in D, -x \in D$ et $f(-x) = \frac{\sin(-x) \cos(-x)}{(1 + \cos(-x))^2} = \frac{-\sin x \cos x}{(1 + \cos x)^2} = -f(x)$ donc f est impaire.

$$3. \forall x \in D, f(x+2\pi) = \frac{\sin(x+2\pi) \cos(x+2\pi)}{(1+\cos(x+2\pi))^2} = \frac{\sin x \cos x}{(1+\cos x)^2} = f(x).$$

f est périodique de période 2π donc on obtient toute la courbe représentative de f à partir de celle construite sur $] -\pi; \pi[$ par itération. Sachant que de plus f est impaire et que la courbe est donc symétrique par rapport à l'origine on peut encore restreindre l'étude à l'intervalle $[0; \pi[$.

4. (a) f est dérivable sur $[0; \pi[$ en tant que produit et quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0; \pi[$ avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $[0; \pi[$.

$$\begin{aligned} \forall x \in [0; \pi[, f'(x) &= \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(1 + \cos x)^2 + 2(1 + \cos x) \sin^2 x \cos x}{(1 + \cos x)^4} \\ &= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x + \cos^3 x - \sin^2 x \cos x + 2 \sin^2 x \cos x}{(1 + \cos x)^3} \\ &= \frac{\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos x - \cos^3 x}{(1 + \cos x)^3} \\ &= \frac{2 \cos^2 x + \cos x - 1}{(1 + \cos x)^3} \\ &= \frac{(2 \cos x - 1)(\cos x + 1)}{(1 + \cos x)^3} \\ &= \frac{2 \cos x - 1}{(1 + \cos x)^2} \end{aligned}$$

Pour tout réel x appartenant à $[0; \pi[$, $(1 + \cos x)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2 \cos x - 1$

$2 \cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; \frac{\pi}{3}]$ alors f est croissante sur $[0; \frac{\pi}{3}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{3}; \pi[$.

$$(b) \text{ Pour } x \text{ appartenant à } [0; \pi[, f(x) = \frac{\sin x \cos x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x} \cos x}{(1 + \cos x)^2}.$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \cos x}{(1 + \cos x)^2}.$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{(1 - \cos x)} \cos x}{(1 + \cos x)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\text{donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = -\infty}$$

