

Devoir Maison 01

Pour le lundi 7 Septembre 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Remarque : certaines notions comme la parité ou les asymptotes n'ont pas forcément été vues en terminale, n'hésitez pas à venir poser vos questions si nécessaire ! Mais cela nécessite de commencer le DM un peu avant le dernier week-end.

Exercice 1

On considère les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + 1 - \ln(x)$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
(b) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de f .
(c) Montrer que $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $[1, +\infty[$ et en dessous de $\mathcal{D}$ sur $]0, 1]$.
2. (a) Calculer la dérivée de g . En déduire le sens de variation de g sur $]0, +\infty[$.
(b) Montrer que

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln(2)$$

En déduire que $g(x)$ est positif strictement sur $]0, +\infty[$.

- (c) Montrer que la dérivée de f vérifie pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

- (d) Déduire des questions précédentes le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites trouvées en 1.a)

3. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

4. (a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geq n + 1$.
(b) Déterminer le sens de variation et la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.