

Devoir Maison 01 - Eléments de Correction

Exercice 1

On considère les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + 1 - \ln(x)$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, donc :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty.}$$

Et, par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow > 0} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow > 0} \ln(x) \times \frac{1}{x} = -\infty$, donc :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow > 0} f(x) = -\infty.}$$

- (b) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de f .

D'après la question précédente :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

donc la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

- (c) Montrer que $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $[1, +\infty[$ et en dessous de $\mathcal{D}$ sur $]0, 1]$.

$$f(x) - (x + 1) = \frac{\ln(x)}{x} > 0 \text{ ssi } \ln(x) > 0 \text{ ssi } x > 1$$

Donc la courbe est au-dessus de son asymptote sur $]1, +\infty[$ et en dessous sur $]0, 1[$.

2. (a) Justifier que g est dérivable sur $]0, +\infty[$, puis calculer la dérivée de g . En déduire le sens de variation de g sur $]0, +\infty[$.

g est dérivable sur $]0, +\infty[$ par somme de fonctions usuelles (polynôme et logarithme) dérivables sur cet intervalle. On a alors :

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}.$$

Sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$g'(x) \geq 0 \text{ ssi } 2x^2 - 1 \geq 0 \text{ ssi } x^2 \geq \frac{1}{2} \text{ ssi } x \geq \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

On en déduit les variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$:

x	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$\parallel$	$- \quad 0 \quad +$	$\parallel$
		$\searrow \quad \nearrow$	

- (b) Montrer que $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln(2)$. En déduire que $g(x)$ est positif strictement sur $]0, +\infty[$.

Le minimum global de g sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$g\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}^2 + 1 - \ln\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln(2) > 0$$

car $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$ pour tout $a > 0$ et $\ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2)$.

Le minimum de g sur $\mathbb{R}_+^*$ est strictement positif, donc :

$$\boxed{g \text{ est strictement positive sur } \mathbb{R}_+^*}.$$

- (c) Montrer que la dérivée de f vérifie pour tout réel x strictement positif :
- $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme et quotient de fonctions usuelles dérivables sur cet intervalle, avec le dénominateur ne s'annulant pas. Il vient :

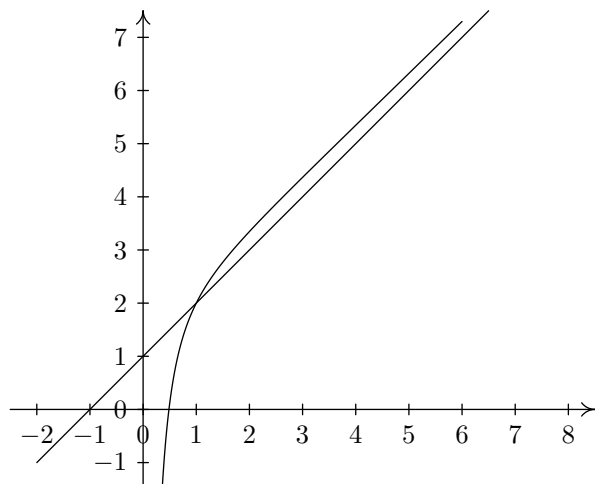
$$\forall x > 0, \quad f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

- (d) Déduire des questions précédentes le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites trouvées en 1.a)

On a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout $x > 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$, donc f' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$-\infty \nearrow +\infty$

3. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ dans un repère orthonormé d'unité 2cm.



On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

4. (a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geq n + 1$.

Procédons par récurrence :

- Pour $n = 0$: $u_0 = 1$ donc $u_0 \leq 0 + 1$.
- Supposons $u_n \geq n + 1$ pour un entier naturel $n \geq 0$ fixé, et montrons que $u_{n+1} \geq n + 2$.

Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq n + 1 > 0$, et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

u_n et $n + 1$ étant éléments de $\mathbb{R}_+^*$, il vient : $f(u_n) \geq f(n + 1)$.

Or, $f(u_n) = u_{n+1}$, et :

$$f(n + 1) = n + 2 + \frac{\ln(n + 1)}{n} \geq n + 2$$

car $\frac{\ln(n + 1)}{n} \geq 0$ puisque $n + 1 \geq 1$.

On a donc établi : $u_{n+1} \geq n + 2$.

— D'après le principe de récurrence simple, l'inégalité est démontrée pour tout entier naturel n :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq n + 1.}$$

(b) Déterminer le sens de variation et la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= f(u_n) - u_n \\ &= u_n + 1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n} - u_n \\ &= 1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

car $u_n \geq n + 1 \geq 1$ donc $\ln(u_n) \geq 0$ pour tout entier naturel n .

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

Par ailleurs, en utilisant le théorème de minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 = +\infty$ implique $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.}$