

Chapitre 28

Déterminants

28.1 Groupe symétrique

28.1.1 Permutations

Soit E un ensemble fini et non vide.

Une permutation de E est une bijection de E dans E .

Th. $\triangleright$ Groupe symétrique

$n \in \mathbb{N}^*$. Muni de la loi $\circ$ de composition des applications, l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ a une structure de groupe.

C'est le groupe symétrique d'ordre n noté $\mathfrak{S}_n$

Vocabulaire et notations :

- Un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est noté $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$
- La composée $\sigma_1 \circ \sigma_2$ de deux éléments de $\mathfrak{S}_n$ se dit encore produit.
- Le groupe $\mathfrak{S}_n$ est fini. Il comporte $n!$ permutations.
- Si $n \geq 3$, le groupe $\mathfrak{S}_n$ n'est pas abélien.

Test 700

$\sigma \in \mathfrak{S}_{15}$ est un cycle qui vérifie $\sigma^2 = \sigma^8$ et $\sigma^{14} = \text{Id}$.
Que peut-on en déduire ?

28.1.2 Cycles

Seule, la définition d'un cycle est explicitement au programme.

Les autres résultats sont admis. Ils ne figurent qu'à titre indicatif.

$a_1, a_2, \dots, a_p$ sont p éléments distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ($p \geq 2$).

Le p -cycle $\sigma = [a_1, a_2, \dots, a_p]$ est la permutation définie par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{si } x = a_i, i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket & \sigma(a_i) = a_{i+1} \\ \text{si } x = a_p & \sigma(a_p) = a_1 \\ \text{sinon} & \sigma(x) = x \end{array} \right.$$

L'ensemble $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ est le **support** du cycle, p son **ordre**.

Remarques : on bouge les nombres et non les places.

Test 701 Les cycles $[1, 5, 6, 4, 2]$, $[5, 6, 4, 2, 1]$ et $[1, 2, 4, 5, 6]$ sont-ils égaux ?

Test 702 Montrer que, si σ est le cycle $[a_1, a_2, \dots, a_p]$, alors σ^{-1} est un cycle qu'on précisera.

Test 703 Si σ est un cycle, en est-il de même pour $\sigma \circ \sigma$?

Test 704 Montrer que si ρ et σ sont deux cycles de supports disjoints, alors $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$.

Remarques :

- Un cycle σ d'ordre p vérifie $\sigma^p = \text{Id}$ (et $\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $\sigma^k \neq \text{Id}$)
- Deux cycles de supports disjoints commutent.
- Toute permutation σ se décompose en produit de cycles de supports disjoints.

(Ces cycles commutent, ce qui permet de calculer les puissances de σ .)



Décomposition en cycles de supports disjoints :

Test 705 Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ en produit de cycles de supports disjoints. En déduire σ^{1000} .

28.1.3 transpositions

Une **transposition** est une permutation qui laisse invariant tous les éléments, sauf deux éléments distincts qui sont échangés.

On la note $[a, b]$ ou $\tau_{a,b}$ $a, b \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a \neq b$

Propriétés :

- Une transposition est un cycle d'ordre 2.
- Donc, une transposition est involutive.
- La composée de deux transpositions de supports disjoints commutent.

Test 706 Dans $\mathfrak{S}_8$, calculer $\tau_{1,2} \circ \tau_{1,3}$ et $\tau_{1,3} \circ \tau_{1,2}$, puis $\tau_{1,2} \circ \tau_{1,3} \circ \tau_{1,4} \circ \dots \circ \tau_{1,8}$.

Th. ▷ **Décomposition en transpositions**

Soit $n \geq 2$, Toute permutation se décompose en produit de transpositions.

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\exists \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$ transpositions $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_p$

Notes :

- La décomposition n'est pas unique
- Le nombre p de transpositions n'est pas unique.

Cycle

Un cycle $[a_1 \dots a_k]$ peut se décomposer en $[a_1 a_k] \circ [a_1 a_{k-1}] \circ [a_1 a_{k-2}] \circ \dots \circ [a_1 a_2]$



Test 707

Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 8 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ en transpositions.
(on donnera deux décompositions de longueurs différentes)

28.1.4 Signature d'une permutation

Th. ▷ Signature (admis)

Il existe une et une seule application ε de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$ telle que :

- $\varepsilon(\tau) = -1$ pour toute transposition τ
- $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$ pour toutes permutations σ et σ'

On appelle signature cette application.

Conséquences :

- $\varepsilon(\text{Id}) = 1$ et $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.
- Si une permutation σ se décompose en p transpositions, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$.
- La longueur de la décomposition en transpositions n'est pas déterminée, mais les longueurs de toutes les décompositions ont même parité.

Une permutation σ est paire quand $\varepsilon(\sigma) = 1$
impaire quand $\varepsilon(\sigma) = -1$

- Donc une transposition est impaire.



Le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est constitué des permutations paires de $\mathfrak{S}_n$:

- $\mathcal{A}_n$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

Signature d'un k -cycle (on peut passer en première lecture)

Test 708

- Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Quelle est la signature du cycle $[1, 2, \dots, k]$?
- En déduire la signature de tout k -cycle $[a_1, a_2, \dots, a_k] \in \mathfrak{S}_n$

Quelle est la signature de

Test 709

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 7 & 4 & 9 & 12 & 2 & 5 & 10 & 11 & 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Test 710

Montrer que le cardinal du groupe alterné est $\frac{n!}{2}$.

Test 711

Soient $c_1, c_2, \dots, c_p$ des cycles à supports disjoints de longueurs respectives $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p$. Soit $\sigma = c_1 \cdots c_p$. Quelle est la signature de σ ?

28.2 Applications multilinéaires

28.2.1 Définitions

E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

L'application $f : E^p \rightarrow F$ est p -linéaire¹ si et seulement si

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_p \in E,$$

$$f_i \begin{cases} E & \rightarrow & F \\ u & \mapsto & f(a_1, \dots, a_{i-1}, u, a_{i+1}, \dots, a_p) \end{cases} \quad \text{est linéaire}$$

Exemples

- Le produit scalaire est une forme 2-linéaire.
- L'application $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ ((a, b), (c, d)) & \mapsto & ad - bc \end{cases}$ est bilinéaire.

Attention :

Ne pas confondre " n -linéaire sur E^n " avec "linéaire sur E^n "

Exemple : $\circ$ si f est linéaire sur E^2 , alors $f(\lambda u, \lambda v) = \lambda f(u, v)$

$\circ$ si g est bilinéaire sur E , alors $g(\lambda u, \lambda v) = \lambda^2 g(u, v)$

Test 712

Que se passe-t-il si f est linéaire sur E^n et g est n -linéaire sur E ?

Test 713

Dire si l'application $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = z$ est linéaire ou bilinéaire dans les cas suivants :

$$\begin{array}{llll} z_1 = 0 & z_2 = 1 & z_3 = x_1 & z_4 = x_1 + x_2 \\ z_5 = x_1 x_2 & z_6 = x_1 + y_1 & z_7 = x_1 y_1 & z_8 = x_1 + y_2 \\ z_9 = x_1 y_2 & & & \end{array}$$

Th. ▷ Expression analytique d'une application multilinéaire

Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , et si

$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, a_k = \sum_{i=1}^n x_{i,k} e_i$, alors

- si f est p -linéaire sur E nous avons

$$f(a_1, a_2, \dots, a_p) = \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in \llbracket 1, n \rrbracket^p} x_{i_1, 1} x_{i_2, 2} \cdots x_{i_p, p} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p})$$

- Réciproquement, pour toute famille $\left(f_\omega\right)_{\omega \in \llbracket 1, n \rrbracket^p}$, l'application $f : E^p \rightarrow F$ définie par

$$f(a_1, a_2, \dots, a_p) = \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in \llbracket 1, n \rrbracket^p} x_{i_1, 1} x_{i_2, 2} \cdots x_{i_p, p} f_{i_1, i_2, \dots, i_p} \quad \text{est } p\text{-linéaire.}$$

Test 714

Relativement à la base $\mathcal{B} = (i, j)$, l'expression analytique de f est (avec les notations naturelles) $f(u_1, u_2) = x_1 x_2 + 2x_1 y_2 + 3y_1 y_2$.

Donner l'expression analytique de f relativement à la base $\mathcal{B}' = (i + j, j)$.

1. Plus généralement, f peut être définie sur $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$, produit cartésien de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels

28.2.2 Applications symétriques, antisymétriques, alternées

Si f est une application p -linéaire de E dans F , alors :

f est symétrique ssi

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_p, \forall a_1, \dots, a_p \in E, \quad f(a_1, \dots, a_p) = f(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(p)})$$

f est antisymétrique ssi

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_p, \forall a_1, \dots, a_p \in E, \quad f(a_1, \dots, a_p) = \varepsilon(\sigma) f(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(p)})$$

f est alternée ssi

$$\forall a_1, \dots, a_p \in E, \quad \exists i \neq j, a_i = a_j \Rightarrow f(a_1, \dots, a_p) = 0_F$$

Th. ▷ Caractérisation par les transpositions

f p -linéaire sur E est symétrique [resp. antisymétrique] ssi

pour toute transposition $\tau \in \mathfrak{S}_p$:

pour toute famille $(a_1, a_2, \dots, a_p) \in E^p$

$$f(a_1, a_2, \dots, a_p) = f(a_{\tau(1)}, a_{\tau(2)}, \dots, a_{\tau(p)})$$

$$[\text{resp. } f(a_1, a_2, \dots, a_p) = -f(a_{\tau(1)}, a_{\tau(2)}, \dots, a_{\tau(p)})]$$

$$\text{c'est-à-dire } f(\dots, a, \dots, b, \dots) = f(\dots, b, \dots, a, \dots)$$

$$[\text{resp. } f(\dots, a, \dots, b, \dots) = -f(\dots, b, \dots, a, \dots)]$$

Th. ▷ Lien Antisymétrique $\leftrightarrow$ Alternée

f est p -linéaire sur le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

$$f \text{ est antisymétrique} \Leftrightarrow f \text{ est alternée}$$

Note :

$\Leftarrow$ est vraie pour tout corps $\mathbb{K}$

$\Rightarrow$ est fausse avec certains corps particuliers



Test 715

f est 3-linéaire antisymétrique sur E de base (i, j, k) .

- f vérifie $f(i, j, k) = 1$. Calculer $f(i, k, j)$, $f(j, i, k)$ etc.
- En déduire l'expression analytique de f .

Conséquences importantes :

- Si f est n -linéaire alternée, on ne change pas l'image $f(a_1, \dots, a_p)$ si, à un des vecteurs a_i , on ajoute une combinaison linéaire des autres vecteurs $(a_k)_{k \neq i}$.
- l'application p -linéaire f est alternée ssi ² l'image de toute famille liée est nulle.



Test 716

Que peut-on dire d'une forme p -linéaire alternée si $p > \dim(E)$?

2. **Attention :** ceci caractérise les formes alternées, et non les familles liées...

28.3 Déterminants

Dans toute la suite, E est de dimension n , et f est une forme n -linéaire alternée.

28.3.1 Formes n -linéaires alternées en dimension n

Th. $\triangleright$ **Détermination des formes $\dim(E)$ -linéaires alternées**³



Si E est de dimension n , alors
toutes les formes n -linéaires alternées sur E sont proportionnelles.

Elles sont déterminées par l'image d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E :

$$f(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{\sigma(i), i} \cdot f(\mathcal{B}) \quad (\text{où } a_k = \sum_{i=1}^n x_{i,k} e_i)$$

28.3.2 Déterminant dans une base $\mathcal{B}$

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E .

Le **déterminant dans la base $\mathcal{B}$** , noté $\text{Det}_{\mathcal{B}}$

est l'unique forme n -linéaire alternée sur E qui vérifie

$$\text{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$$

Test 717 Donner l'expression analytique du déterminant en dimension 2, puis en dimension 3.

Conséquences :

- Son expression analytique est

$$\text{Det}_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n x_{\sigma(i), i} \right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n x_{i, \sigma(i)} \right)$$

- Toute forme n -linéaire alternée sur E est proportionnelle à $\text{Det}_{\mathcal{B}}$.



Important:

Soit f une forme n -linéaire alternée sur E :

$$f = \text{Det}_{\mathcal{B}} \cdot f(\mathcal{B}) \text{ c'est-à-dire } \forall S \in E^n, f(S) = \text{Det}_{\mathcal{B}}(S) \cdot f(\mathcal{B})$$

- Si la famille $(a_1, \dots, a_n)$ est liée, alors $f(a_1, \dots, a_n) = 0$.
(Nous n'avons pas (encore) la réciproque.)
- le déterminant $\text{Det}_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ d'une famille de vecteurs
 - **ne change pas si :**
 - ✖ à un des vecteurs, on ajoute une combinaison linéaire des autres vecteurs
 - ✖ on fait subir à la famille une permutation paire
 - **change de signe si :**
 - ✖ on fait subir à la famille une permutation impaire

Test 718

$\mathcal{B} = (i, j, k)$ est une base de E . Que vaut $\text{Det}_{\mathcal{B}}(i, j, k)$? En déduire

$$\text{Det}_{\mathcal{B}}(i + j + k, j, k), \text{Det}_{\mathcal{B}}(2i + 3j + 4k, j, k),$$

$$\text{Det}_{\mathcal{B}}(i + 2j + k, i + j, j + k) \text{ et } \text{Det}_{\mathcal{B}}(i + j + k, i + 2j + 2k, 2i + 3j - 3k)$$

3. Cette démonstration n'est pas exigible.

Test 719

Indispensable : montrer

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Det}_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

Changement de base : si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E , alors

$$\forall S \in E^n : \text{Det}_{\mathcal{B}}(S) = \text{Det}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}') \text{Det}_{\mathcal{B}'}(S)$$

Th. > Caractérisation des bases

dans un espace de dimension n ,

une famille de n vecteurs est liée ssi son déterminant est nul.

c'est-à-dire : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E

$$(a_1, \dots, a_n) \in E^n \text{ base de } E \Leftrightarrow \text{Det}_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_n) \neq 0$$



28.3.3 Déterminant d'un endomorphisme

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et φ un endomorphisme de E , alors

la quantité $\text{Det}_{\mathcal{B}}(\varphi(\mathcal{B}))$ est indépendante de la base $\mathcal{B}$ de E

C'est le déterminant de l'endomorphisme φ Noté

$$\text{Det}(\varphi)$$

Test 720

La matrice de $f \in \mathcal{L}(E)$ relativement à la base (i, j) est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Vérifier l'indépendance en calculant $\text{Det}(f)$ avec les bases (i, j) et $(i + j, i + 3j)$.

Propriétés :

- $\forall \varphi \in \mathcal{L}(E), \text{Det}_{\mathcal{B}}(\varphi(\mathcal{S})) = \text{Det}(\varphi) \text{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$

- *Déterminant d'une composée :*

$$\text{Det}(\varphi \circ \psi) = \text{Det}(\varphi) \times \text{Det}(\psi)$$

- $\text{Det}(\text{Id}_E) = 1$

- *Caractérisation des automorphismes :*

$$\varphi \in \mathcal{L}(E) : \varphi \text{ bijective} \Leftrightarrow \text{Det}(\varphi) \neq 0$$



- Si φ est bijective, alors $\text{Det}(\varphi^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(\varphi)}$.

- L'ensemble des automorphismes de E , de déterminant 1 est un sous-groupe du groupe linéaire $\text{GL}(E)$.

C'est le groupe spécial linéaire de E noté $\text{SL}(E)$

28.3.4 Déterminant d'une matrice carrée

Le déterminant de $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}$

On le note $\boxed{\text{Det}(A)}$ ou encore

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$



Les trois notions coïncident :

$$\boxed{\text{Det}(A) = \text{Det}(f) = \text{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})}$$

où $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$

On en déduit immédiatement les propriétés suivantes

Propriétés :

- $\boxed{\text{Det}(A) = \text{Det}(A^T)}$
- Manipulations élémentaires :
 - $\text{Det}(A)$ ne change pas si, à une colonne, on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes
 - $\text{Det}(A)$ est multiplié par λ si on multiplie une colonne par λ .
 - $\text{Det}(A)$ est inchangé si on fait subir aux colonnes une permutation paire.
 - $\text{Det}(A)$ change de signe si on fait subir aux colonnes une permutation impaire.
 - Mêmes résultats en manipulant les lignes.
- $\text{Det}(I_n) = 1$
- $\boxed{\text{Det}(AB) = \text{Det}(A) \times \text{Det}(B)}$
- A est régulière ssi $\text{Det}(A) \neq 0$ et alors $\boxed{\text{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(A)}}$
- Le groupe spécial linéaire d'ordre n noté $\boxed{\text{SL}_n(\mathbb{K})}$ est le sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices de déterminant 1.

28.4 Calculs de déterminants

28.4.1 Développement par rapport à une ligne (ou colonne)

Introduction

ordre 1 : $\begin{vmatrix} a \end{vmatrix} = a$ (voir ⁴)

ordre 2 : $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

ordre 3 : $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - cb'a'' - ac'b'' - ba'c''$
 $= a'' \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} - b'' \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} + c'' \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$

Soit la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$

Le mineur d'indice (i, j) dans A est le déterminant de la matrice extraite obtenue en supprimant de A la ligne i et la colonne j .

$$M_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Le cofacteur d'indice (i, j) dans A est $C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$

La comatrice de A est la matrice des cofacteurs :

$$\text{com}(A) = (C_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$$

Th. $\triangleright$ Développement suivant une colonne (une ligne)

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \text{Det}(A) = \sum_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} a_{i,k} C_{i,k} = \sum_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} a_{k,i} C_{k,i}$$

où $C_{i,j}$ est le cofacteur d'indice (i, j) .

Test 721

Calculer les déterminants $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

28.4.2 Techniques de calculs

Déterminants d'ordre 2 ou 3

$$\bullet \quad \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x y' - y x' \quad (\text{A savoir par cœur.})$$

4. **Attention :** ne pas confondre $|a| = \text{Det} \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$ avec la valeur absolue...

- Règle de Sarrus⁵ (Ordre 3 seulement. Cette règle est non généralisable).

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = \underbrace{(xy'z'' + yz'x'' + zx'y'')}_{\begin{array}{c} |x \quad x' \quad x''| \\ | \searrow \quad \quad | \\ |y \quad y' \quad y''| \\ | \searrow \quad \searrow \quad | \\ |z \quad z' \quad z''| \\ \searrow \quad \searrow \\ x \quad x' \quad x'' \\ \searrow \\ y \quad y' \quad y'' \end{array}} - \underbrace{(zy'x'' + xz'y'' + yx'z'')}_{\begin{array}{c} |x \quad x' \quad x''| \\ | \quad \quad \nearrow \quad | \\ |y \quad y' \quad y''| \\ | \nearrow \quad \nearrow \quad | \\ |z \quad z' \quad z''| \\ \nearrow \quad \nearrow \\ x \quad x' \quad x'' \\ \nearrow \\ y \quad y' \quad y'' \end{array}}$$

Manipulations élémentaires souvent utilisées pour

- faire apparaître des "0" (afin de développer plus facilement).
- trouver des facteurs.
- pour obtenir un déterminant de forme connue.

Test 722

Faire apparaître une ligne ou une colonne comportant un maximum de zéros puis développer le déterminant par rapport à cette ligne ou colonne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Test 723

Montrer que les deux déterminants suivants sont factorisables par $(x - 1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & x & -1 & -1 \\ x & -1 & -1 & x \\ -1 & -1 & x & x \\ -1 & x & x & -1 \end{vmatrix}$$

28.4.3 Déterminants particuliers

- Le déterminant d'une **matrice triangulaire** (supérieure ou inférieure) est

égal au produit des termes de la diagonale :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$$

5. Pierre Frédéric SARRUS (1798-1861) mathématicien Français.

- Déterminant de **Vandermonde**⁶

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

28.5 Applications

28.5.1 Familles libres, bijections

pour mémoire (propriétés déjà connues)

E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

- $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in E^n$ est une base de E ssi $\text{Det}_{\mathcal{B}}(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0$
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi $\text{Det}(A) \neq 0$
- $f \in \mathcal{L}(E)$ est bijective ssi $\text{Det}(f) \neq 0$

Test 724

(i, j, k) est une base de E . Pour quelles valeurs de λ la famille $\left(i + (\lambda + 6)j + (\lambda + 3)k, (\lambda + 2)i + \lambda j + 2k \right)$ est-elle liée ? (piège !)

Rappel : *les déterminants permettent un calcul simple d'équations d'hyperplans vectoriels ou affines.*

Test 725

$\mathcal{B} = (i, j, k)$ est une base de E .
Former une équation cartésienne du plan vectoriel engendré par $(i + j, j + 2k)$

28.5.2 Inverse d'une matrice

Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nous avons

$$A \text{ Com}(A)^T = \text{Det}(A) I_n$$

Ainsi,

pour toute matrice A inversible

$(\text{Det}(A) \neq 0)$

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \text{Com}(A)^T$$

Test 726

Quel est l'inverse de la matrice de rotation d'angle θ : $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$?

6. Alexandre Théophile VANDERMONDE (1735-1796) mathématicien français.
Cette notion très classique n'est pas explicitement au programme.

Utiliser cette méthode pour inverser (si possible)

Test 727

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

28.5.3 Application aux systèmes de Cramer

Pour un système de Cramer⁷ d'ordre n ,
d'écriture matricielle $AX = B$,

l'unique solution est $(x_1, \dots, x_n)$ où $\forall i \in \left[\begin{smallmatrix} 1, n \end{smallmatrix} \right], x_i = \frac{\text{Det}(A_i)}{\text{Det}(A)}$

A_i étant la matrice obtenue en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par B .

Note : on peut également inverser la matrice A .

Utiliser cette méthode pour résoudre

Test 728

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 3z = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

Montrer que le système suivant est compatible, et le résoudre

Test 729

$$\begin{cases} x + 2y - 4z - t = -1 \\ -x - y + z + 2t = 3 \\ 2x + y + z + 2t = 6 \\ 3x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

28.5.4 Orientation d'un espace vectoriel

E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

Deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E sont de même sens ssi $\text{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$
de sens contraires ssi $\text{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0$

Sur l'ensemble des bases de E :

- "être de même sens" est une relation d'équivalence.
- Pour tout espace E non nul, il y a exactement deux classes d'équivalences.
- Orienter E , c'est choisir une de ces deux classes.
 - Les bases de cette classe sont alors dites bases directes
 - Les autres bases sont dites indirectes
 - Pour orienter l'espace, il suffit de choisir une base $\mathcal{B}_0$ quelconque.
 - Cette base sert de référence.
 - Par ce choix, elle est directe.
 - Toute base de même sens est directe.

7. Le programme se limite aux systèmes de Cramer. La technique des matrices bordantes est hors programme.

Remarque

Pour comparer deux bases quelconques $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, il est souvent plus commode de les comparer à la base $\mathcal{B}_0$ de référence.

Test 730

E est orienté par la base (i, j, k) . Dire si les bases suivantes sont directes ou indirectes :
 (j, k, i) (k, j, i) $(-i, k, j)$ $(i + j, j + k; k + i)$

Test 731

Les bases $(i + j + k, i - k, j + k)$ et $(i - j - 2k, i - 2j + k, 2i + j - k)$ sont-elles de même sens ?

$\varphi \in \text{GL}(E)$ est un **automorphisme direct** (ou **conserve l'orientation**)

ssi pour toute base $\mathcal{B}$ de E , $\mathcal{B}$ et $\varphi(\mathcal{B})$ ont le même sens

Ceci se produit ssi $\text{Det}(\varphi) > 0$.

Dans le cas contraire, on dit que

φ est un **automorphisme indirect** (ou **change l'orientation**).

28.6 Exercices

Permutations d'un ensemble fini

Exercice 1

Montrer que S_n est engendré par les transpositions de la forme $(1, j)$, où $j \in \llbracket 2; n \rrbracket$.

Exercice 2

Montrer que S_n est engendré par les transpositions de la forme $(i, i+1)$, où $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$.

Exercice 3

Soient τ et τ' deux transpositions. Montrer que $\tau\tau' = Id$ ou $(\tau\tau')^2 = Id$ ou $\tau\tau'^3 = Id$.

Déterminants

Exercice 4

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$; calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & & (0) \\ & a & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & a & a+b \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 5

Un exercice assez classique :

$\mathcal{B}$ est une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension 3. Soit $u, u_1, u_2, u_3 \in E$.

1. Transformer $\varphi(\lambda) = \text{Det}_{\mathcal{B}}(u_1 + \lambda u, u_2 + \lambda u, u_3 + \lambda u)$
2. Comment peut-on en déduire $\text{Det}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3)$ si on connaît $\varphi(\lambda_1)$ et $\varphi(\lambda_2)$ ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) ?

3. **Application :** sachant que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ déterminer un vecteur u et

deux valeurs particulières de λ pour lesquelles $\varphi(\lambda)$ est connu. En déduire $\text{Det}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3)$. (Vérifiez)

Exercice 6

Un résultat classique (et utile...)

$$\text{Soit } D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad \text{un déterminant d'ordre } n.$$

1. Montrer que $D(x) \in \mathbb{K}_{n-1}[x]$.
2. Donner $D'(x)$ (sous forme d'un déterminant d'ordre n).
Quelles sont les dérivées d'ordre supérieur ?

3. *Application* : soit $P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Montrer, sans calculer P , que $P(1) = P'(1) = 0$. Qu'en déduit-on ?

Confirmer ceci par un calcul direct de $P(x)$.

Exercice 7

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Soit la matrice carrée $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \mathbf{0} & C \end{array} \right)$, où A et C sont des matrices carrées.

1. Mettre M sous la forme du produit $M = \left(\begin{array}{c|c} I & ? \\ \hline \mathbf{0} & ? \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} ? & ? \\ \hline \mathbf{0} & I \end{array} \right)$
2. En déduire que $\text{Det}(M) = \text{Det}(A) \times \text{Det}(C)$

Exercice 8

Déterminer les réels x et y tels qu'il existe deux matrices A et B vérifiant

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} x & 14 \\ 14 & y \end{pmatrix}$$

Indication : ça peut laisser des traces.

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et f , l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé et $\mathcal{C}$ la base canonique.

1. Montrer que le polynôme $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$ possède deux racines réelles distinctes λ_i ($i = 1, 2$).
2. Pour tout $i = 1, 2$: déterminer le sous-espace $E_i = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E)$, montrer qu'il s'agit d'une droite vectorielle, dont on notera $\vec{b}_i$ un vecteur directeur.
3. Vérifier que $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Que vaut D , la matrice de f relativement à cette base $\mathcal{B}$?
4. Quel lien y-a-t-il entre les matrices A et D ? En déduire la valeur de A^n pour $n \geq 1$.
5. Déterminer les expressions des termes des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où

$$u_0 = v_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = & 2v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 3v_n \end{cases}$$

6. Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = & 2y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

Exercice 10

Soit $P_1 = 1 + X - X^2$, $P_2 = 3 - X + 5X^2$, $P_3 = -1 + 2X + 3X^2$.
La famille (P_1, P_2, P_3) est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 11

Soit $P_1 = 2 + 3X - X^2$, $P_2 = 1 + X + X^2$, $P_3 = a - X + aX^2$.
A quelle condition sur a la famille (P_1, P_2, P_3) est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 12

Calculer les déterminants suivants (forme factorisée souhaitée) :

$$\begin{array}{ll} 1. \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} & 4. \Delta = \begin{vmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{vmatrix} \\ 2. \Delta = \begin{vmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{vmatrix} & 5. \Delta = \begin{vmatrix} 1 & \sin(a) & \cos(a) \\ 1 & \sin(b) & \cos(b) \\ 1 & \sin(c) & \cos(c) \end{vmatrix} \\ 3. \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} & \end{array}$$

Exercice 13

Calculer le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & 0 \\ 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & 0 & 1 & x & x^2 \\ x^2 & x^3 & 0 & 1 & x \\ x & x^2 & x^3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Indication : $L_j \leftarrow L_j - xL_{j+1}$.

Pour quelles valeurs de x la matrice M est-elle inversible ?

28.7 Exercices Complémentaires

Exercice 1

Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique réelle de taille n impair est nul.

Exercice 2

1. Montrer que le polynôme $P = X^3 - X + 1$ a trois racines complexes distinctes, qu'on note a , b et c .
2. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

Exercice 3

Pour chacune des questions suivantes, montrer que les applications considérées sont des endomorphismes de l'espace vectoriel E , et calculer leur déterminant.

1. $u : (x, y, z) \mapsto (x - y, y + z, x + y + z)$, $E = \mathbb{C}^3$.
2. $v : P \mapsto Q$ où $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = \int_x^{x+1} P(t) dt$, $E = \mathbb{R}_n[X]$.
3. $w : P \mapsto (X^2 - 1)P' - 3(X + 3)P$, $E = \mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 4

Calculer les déterminants suivants (pour a, b, c réels ou complexes quelconques) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ c & b & bc \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

Exercice 5

Déterminant circulant

Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, et M la matrice de coefficient $m_{i,j} = a_{j-i}$ si $i \leq j$, et $m_{i,j} = a_{n+j-i}$ sinon. Soit $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$, et U la matrice de coefficient général $u_{i,j} = \omega^{(i-1)(j-1)}$.

1. Ecrire les matrices M et U pour $n = 4$.
2. Calculer MU pour $n = 4$ puis pour n quelconque.
3. En déduire $\text{Det } M$ sous forme factorisée.
4. En déduire une factorisation de $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

Exercice 6

Soit $n \in \{2; 3\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - A + I_n = 0$. Calculer A^3 et en déduire $\text{Det } A$.

Exercice 7

Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$GL_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \text{Det } M > 0\}$$

$$GL_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \text{Det } M < 0\}$$

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \text{Det } M = 1\}$$

1. Montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$.
2. Montrer que $GL_n^+(\mathbb{R})$ également.
3. En est-il de même de $GL_n^-(\mathbb{R})$?

Exercice 8

Polynôme caractéristique et diagonalisation Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note χ_A le polynôme associée à la fonction polynomiale $\lambda \mapsto \text{Det}(A - \lambda I_n)$ (il est appelé le polynôme caractéristique de A).

1. Montrer que, si $n = 2$, $\chi_A(X) = X^2 - (\text{tr } A)X + \text{Det } A$.
2. Montrer que $\chi_A(A) = 0$ pour $n = 2$ (théorème de Cayley-Hamilton, vrai en fait pour toute valeur de n).
3. On dit que λ est valeur propre pour A s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$ (X est appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ). Montrer que les valeurs propres de A sont exactement les racines du polynôme caractéristique de A .
4. Soit $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ k vecteurs propres de A associés à k valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k$. Montrer que la famille $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ est libre. *On pourra utiliser le déterminant de Van der Monde.*
5. On suppose que χ_A est scindé à racines simples. Montrer qu'il existe D diagonale et P inversible tel que $A = PDP^{-1}$ (on dit que A est diagonalisable).

Exercice 9

Calculer les déterminants suivants avec $a \in \mathbb{R}$ et $s_i \in \mathbb{R}$:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a \end{vmatrix} \quad D_n = \begin{vmatrix} s_1 & \cdots & \cdots & \cdots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \cdots & \cdots & s_2 \\ \vdots & \vdots & s_3 & \cdots & s_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \end{vmatrix}$$