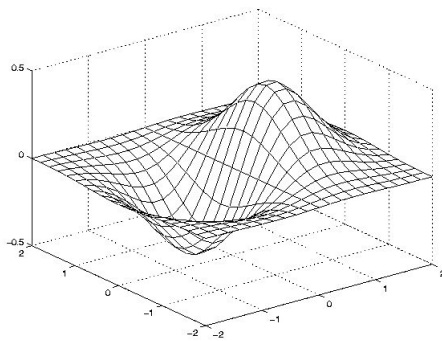


Chapitre 25

Fonctions de deux variables



Les fonctions considérées ici sont définies sur une partie $E \subset \mathbb{R}^2$ définie par des conditions simples.

$\mathbb{R}^2$ est muni de la norme euclidienne usuelle (notée $\|\cdot\|$).

Ce chapitre se généralise aisément aux fonctions de 3 variables.

25.1 Parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$

Les opérations sur les ouverts, ainsi que les notions de partie fermée, de voisinage, d'intérieur et d'adhérence d'une partie sont hors programme.

En notant a un élément de $\mathbb{R}^2$, on sous-entend que $a = (a_1, a_2)$ avec a_1 et a_2 des réels.

On rappelle que $\mathbb{R}^2$ possède une structure de $\mathbb{R}$ -ev sur lequel on définit une norme euclidienne par :

$$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

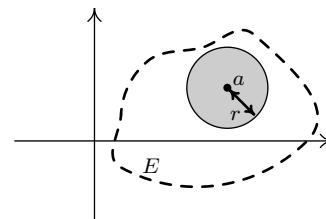
Une boule ouverte de centre $a \in \mathbb{R}^2$, de rayon $r > 0$

est l'ensemble $\mathcal{B}(a, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - a\| < r \right\}$

Une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$

qui vérifie $\forall a \in E, \exists r > 0 \quad \mathcal{B}(a, r) \subset E$

(On dit que E est un voisinage de chacun de ses points.)



Montrer qu'une boule ouverte est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Test 658

Montrer que le complémentaire de la boule fermée $\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - a\| \leq r \right\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Test 659

Montrer que, si E et F sont deux parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$, il en est de même pour $E \cup F$ et $E \cap F$.

25.2 Limites, continuité

25.2.1 Fonctions de deux variables

Une fonction réelle de deux variables réelles est

une application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ où $E \subset \mathbb{R}^2$

Muni des opérations usuelles $(+, \cdot, \times)$

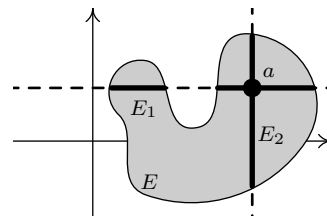
$\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ est une algèbre commutative non intègre.

A tout point $a = (a_1, a_2) \in E$, on associe les "traces sur E " des droites d'équations $x = a_1$ et $y = a_2$.

Ce sont les ensembles

$$E_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid (x, a_2) \in E \right\}$$

$$E_2 = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid (a_1, y) \in E \right\}$$



Les applications partielles¹ associées à $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ au point $a = (a_1, a_2) \in E$

$$\text{sont les applications } \begin{cases} f(\cdot, a_2) : E_1 \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x, a_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(a_1, \cdot) : E_2 \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(a_1, x) \end{cases}$$

Test 660

Déterminer les ensembles de définitions, puis les applications partielles en $(0, 0)$ de $f : (x, y) \mapsto xy$ et $g : (x, y) \mapsto \sin(x) \ln(1 + x + y^2)$

25.2.2 Limites

La notion de "limite en a " n'a de sens que si E contient des points arbitrairement proches de a , c'est-à-dire quand $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E - \{a\} \quad \|x - a\| < \varepsilon$. Si E est ouvert, cette condition est vérifiée.



Important:

Désormais, on supposera f définie sur un ouvert E contenant a .

$f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ admet une limite finie ℓ en a ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, \|x - a\| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On note $\lim_a f = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

$f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ admet $+\infty$ pour limite en a ssi

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in E, \|x - a\| < \eta \Rightarrow f(x) > A$$

On note $\lim_a f = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

$f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ admet $-\infty$ pour limite en a ssi

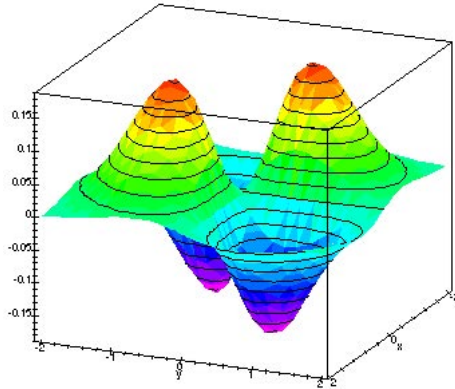
1. On dit aussi "fonctions partielles"

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in E, \|x - a\| < \eta \Rightarrow f(x) < A$$

$$\text{On note } \boxed{\lim_a f = -\infty} \quad \text{ou} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty}$$

Remarques : comme pour les fonctions d'une variable

- on peut utiliser des inégalités larges $\|x - a\| \leq \eta$ et/ou $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$, etc.
- Quand elle existe, la limite est unique
- Les résultats sur les limites restent valables (opérations, ordre, ect.)
- Il en est de même pour la "limite séquentielle".



Un outil

$$\max(|x|, |y|) \leq \|(x, y)\| \leq \sqrt{2} \max(|x|, |y|)$$

Ceci permet de traiter séparément x et y :

$$\begin{aligned} \|(x, y)\| < \eta &\Rightarrow (|x| < \eta \text{ et } |y| < \eta) \\ (|x| < \frac{\eta}{\sqrt{2}} \text{ et } |y| < \frac{\eta}{\sqrt{2}}) &\Rightarrow \|(x, y)\| < \eta \end{aligned}$$

ce qui revient à utiliser la norme $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$



Test 661

Trouver, si elle existe, la limite en $(0, 0)$ de $(x, y) \mapsto x \sin \frac{y}{x}$.

Th. $\triangleright$ **Limite et applications partielles**

Si $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ admet une limite ℓ en $a = (a_1, a_2) \in \bar{E}$ (limite finie ou infinie) alors les fonctions partielles admettent la même limite en a_1 et a_2 .

$$\lim_{(a_1, a_2)} f = \ell \Rightarrow \begin{cases} \lim_{a_1} f(\cdot, a_2) = \ell \\ \lim_{a_2} f(a_1, \cdot) = \ell \end{cases}$$

Attention : la réciproque est fautive. **Remarque :** pour E_1 ou E_2 vide, alors l'application partielle n'existe pas et la limite non plus.



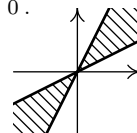
Remarques :

- Ceci permet souvent de déterminer la valeur de la limite de f en a (si cette limite existe)
- **La réciproque est fautive :** $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ et $a = (0, 0)$:
 - Les deux fonctions partielles en $(0, 0)$ ont la même limite $\ell = 0$
 - Pourtant, f n'a pas de limite en $(0, 0)$.

En effet : $f(x, x) = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers 0 quand $x \rightarrow 0$.

1. **Exemple :**

en $(0, 0)$, la fonction $f : (x, y) \mapsto \sqrt{(y - 2x)(x - 2y)}$ est continue, mais les fonctions partielles en ce point ne sont définies qu'en $\{0\}$.



Test 662

1. Rappeler les formules trigonométriques de sommes en produits.
2. Soit $f : (x, y) \mapsto \frac{\sin x + \sin y}{x + y}$. Déterminer son ensemble de définition.
3. Déterminer la limite en 0 de chacune des applications partielles de f .
4. Montrer que cette limite commune est celle de f en $(0, 0)$.

25.2.3 Continuité

f est continue en $a \in E$ ssi $\lim_a f = f(a)$.

f est continue sur E ssi f est continue en tout point $a \in E$

On note $f \in \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ ou $f \in \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$

Les résultats sur les limites finies montrent que :

- les résultats sur la continuité restent valables (somme, produit, quotient, etc.)
- muni des opérations usuelles :
 - $\left\{ f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R}) \mid f \text{ continue en } a \right\}$ a une structure d'algèbre commutative.
 - $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ a une structure d'algèbre commutative (non intègre).

- Composition :

$$\circ E \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} I \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R} \quad \text{et} \quad a \in E$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continue en } a \\ \varphi \text{ continue en } f(a) \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi \circ f \text{ continue en } a$$

$$\circ \varphi_1 : I \rightarrow E_1, \varphi_2 : I \rightarrow E_2, f : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad t_0 \in I$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \text{ continues en } t_0 \\ f \text{ continue en } (\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)) \end{array} \right\} \Rightarrow t \mapsto f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \text{ continue en } t_0$$

- Si f est continue en $a = (a_1, a_2)$ alors les applications partielles en a sont continues en a_1 et a_2 (sous réserve qu'elles soient localement définies²).

Attention : la réciproque est fausse.

Th. ▷ Continuité des projections canoniques

Les applications $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Ce sont les projections canoniques

Intérêt

Ceci permet d'établir rapidement la continuité de la plupart des fonctions.

Test 663

Justifier que les fonctions suivantes sont continues sur leur ensemble de définition :
 $f : (x, y) \mapsto x + y$ $g : (x, y) \mapsto x \sin(y) + \ln(x + y^2)$

Test 664

Ensemble de continuité de $f : (x, y) \mapsto x \sin \frac{y}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0, y) = 0$.

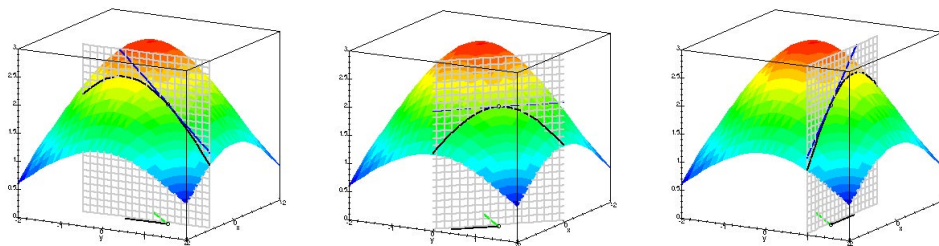
25.3 Dérivées partielles

25.3.1 Dérivées selon un vecteur

$f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ où E est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. u est un vecteur de $\mathbb{R}^2$

La dérivée en a suivant le vecteur u notée $D_u f(a)$

est, si elle existe, la dérivée en 0 de $\varphi_u : t \mapsto f(a + tu)$.



Remarques

- Si $u = 0$, φ_0 est constante et définie sur $\mathbb{R}$.
- Si $u \neq 0$, E étant un ouvert, il existe une boule ouverte $\mathcal{B}(a, r)$ incluse dans E . La fonction φ_u est au moins définie sur $\left] -\frac{r}{\|u\|}, \frac{r}{\|u\|} \right[$.
- Si elle existe : $D_u f(a) = \varphi'_u(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}$

Test 665

Soit la demi-sphère $(x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ et $a = (\frac{1}{2}, 0)$. Calculer les dérivées en a suivant les vecteurs $(1, 0)$, puis $(0, 1)$ puis $(1, 1)$. Pouvez-vous confirmer géométriquement ces résultats.

Propriétés : si f et g admettent des dérivées en a suivant u

- $f + g$ aussi et $D_u(f + g)(a) = D_u f(a) + D_u g(a)$
- λf aussi et $D_u(\lambda f)(a) = \lambda D_u f(a)$
- $f g$ aussi et $D_u(f g)(a) = D_u f(a) g(a) + f(a) D_u g(a)$
- si f ne s'annule pas sur E alors $\frac{1}{f}$ aussi et $D_u \frac{1}{f}(a) = -\frac{D_u f(a)}{f^2(a)}$
- si $\varphi : f(E) \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $f(a)$, alors $\varphi \circ f$ admet des dérivées selon u en a , et $D_u(\varphi \circ f)(a) = \varphi' \left(f(a) \right) D_u f(a)$

25.3.2 Dérivées partielles premières

Les dérivées partielles de $f : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto f(x_1, x_2) \end{cases}$ en $a = (a_1, a_2)$ sont

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$ ou $D_1 f(a)$ ou $f'_{x_1}(a)$ dérivée en a selon $u = (1, 0)$
c'est la dérivée en a_1 de la fonction partielle $f(\cdot, a_2)$

$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$ ou $D_2 f(a)$ ou $f'_{x_2}(a)$ dérivée en a selon $u = (0, 1)$
c'est la dérivée en a_2 de la fonction partielle $f(a_1, \cdot)$

Notes :

- le "1" de $D_1 f$ désigne la dérivée selon la première place (ou variable)
- La notation $\frac{\partial f}{\partial x}$ s'adapte suivant les notations utilisées.
- Comme ce sont des dérivées selon un vecteur u , les propriétés usuelles s'appliquent $\frac{\partial}{\partial x_1}(f+g) = \frac{\partial}{\partial x_1}f + \frac{\partial}{\partial x_1}g$, etc.
- Ces dérivées indiquent les pentes des tangentes des sections de la surface $z = f(x, y)$.

Test 666

Exprimer (quand elles existent) les dérivées partielles de $f g$ et de $\frac{f}{g}$.

Test 667

f est définie par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Montrer que, en tout point de $\mathbb{R}^2$, f admet des dérivées partielles qu'on calculera.



25.3.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$



Important:

$f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $E \subset \mathbb{R}^2$ ssi
 f admet des dérivées partielles en tout point de $a \in E$
 et les fonctions dérivées partielles $D_1 f$ et $D_2 f$ sont continues sur E

Test 668

Montrer que $(x, y) \mapsto x + y$ et $(x, y) \mapsto xy$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.Propriétés : d'après les résultats précédents (continuité et dérivées selon u)

- $\mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ a une structure d'algèbre commutative (non intègre)
- Si $f \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ ne s'annule pas sur E , alors $\frac{1}{f} \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$
- $\left. \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R}) \\ \varphi \in \mathcal{C}^1(f(E), \mathbb{R}) \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi \circ f \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$.
- Les projections canoniques $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
 (tout ceci permet de montrer rapidement qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$)

Th. ▷ Développement limité d'ordre 1 ⁽³⁾

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors,
 pour tous points $a = (a_1, a_2)$ et $x = (x_1, x_2)$ de E

$$f(x) = f(a) + (x_1 - a_1) \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + (x_2 - a_2) \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \|x - a\| \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$

Th. ▷ Corollaire

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur E est donc continue sur E .

3. La démonstration est hors programme.

Th. ▷ **Conséquences sur les dérivées selon u**

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors,
 pour tout point $a \in E$ et pour tout vecteur $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$
 f admet une dérivée en a selon u et

$$D_u f(a) = u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$$

L'application $u \mapsto D_u f(a)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$.

$$D_{u+\lambda v} f(a) = D_u f(a) + \lambda D_v f(a)$$

Th. ▷ **Plan tangent à la surface Γ d'équation $z = f(x, y)$**

▷ Soit le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

▷ Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur E ouvert de $\mathbb{R}^2$, au point $m_0(x_0, y_0)$

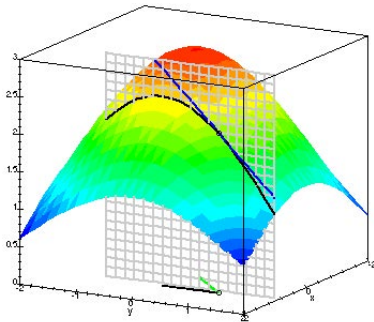
▷ Soit Γ la surface représentative de f dans $\mathcal{R}$ autrement dit

$$\Gamma = \{M(x, y, z) \text{ tel que } z = f(x, y) \text{ et } (x, y) \in E\}$$

▷ Soit $M_0(\underbrace{x_0, y_0}_{=m_0}, z_0) \in \Gamma$ avec $z_0 = f(x_0, y_0)$

Alors Γ admet en ce point des tangentes dans toutes les directions et toutes ces tangentes forment le plan $P(M_0, \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(m_0) \cdot \vec{k}, \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(m_0) \cdot \vec{k})$. C'est le plan tangent à Γ en M_0 , d'équation :

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(m_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(m_0) - (z - z_0) = 0$$



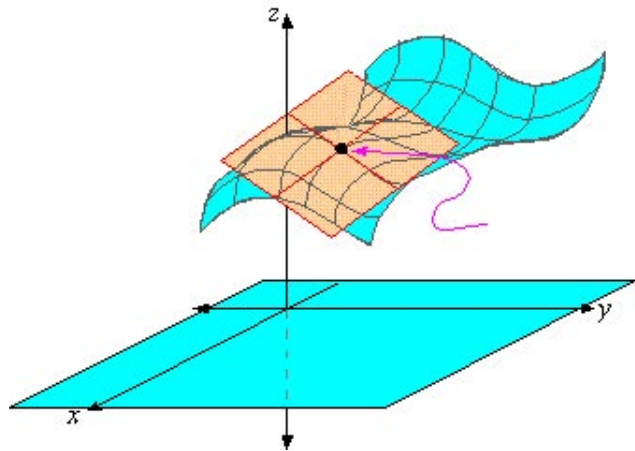
• La section de Γ par le plan $P(M_0, \vec{k}, \underbrace{a\vec{i} + b\vec{j}}_{=\vec{u} \neq \vec{0}})$ passant par M_0 et orienté

par les vecteurs $\vec{k}$ et $a\vec{i} + b\vec{j}$ est une courbe qui admet une tangente en A dirigée par $\vec{u} + D_u f(m_0) \vec{k}$

Cette droite est une tangente à Γ en M_0

• Toutes ces tangentes sont dans le plan $P(M_0, \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(m_0) \cdot \vec{k}, \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(m_0) \cdot \vec{k})$ passant par M_0 et dirigé par $\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(m_0) \cdot \vec{k}$ et $\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(m_0) \cdot \vec{k}$.

Ce plan est le plan tangent à Γ en M_0

**Test 669**

Former l'équation du plan tangent en (a, b) à la surface d'équation $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.
 Montrer que tous ces plans passent par un point fixe.
 Quelle est la nature de cette surface ?

25.3.4 Notation différentielle

**Important:**Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E , le $DL_1(a)$ peut s'écrire

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)}_{= df_a(h)} + o(\|h\|)$$

La **différentielle de f en a** notée $\boxed{df(a)}$ ou $\boxed{df_a}$
 est l'application $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h = (h_1, h_2) \mapsto h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$

Remarques :Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E :

$$\boxed{df_a(h) = D_h f(a) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)}$$

- En notant $\boxed{dx_1}$ et $\boxed{dx_2}$ les projections canoniques :

$$\forall a \in E, \forall h \in \mathbb{R}^2, df_a(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) dx(h) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) dy(h)$$

$$\forall a \in E, df_a = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) dx + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) dy$$

La **différentielle de f** est l'application :

$$df : a \mapsto df_a, E \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

et les notations

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx + \frac{\partial f}{\partial x_2} dy} \quad \text{et} \quad \boxed{df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) dx + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) dy}$$

25.4 Notion de gradient

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E , df_a est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ autrement dit appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Il existe donc un unique vecteur $u_a \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}^2, df_a(h) = \left(u_a \mid h \right)$

le **gradient** de f est l'application, $\nabla f : \begin{cases} E & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ a & \mapsto & u_a \end{cases}$

- $\forall a \in E, \forall h \in \mathbb{R}^2, \left(\nabla f(a) \mid h \right) = df_a(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) h_2$
- dans la base canonique $\mathcal{B}$

$$\boxed{\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right)_{/\mathcal{B}}}$$

- $\nabla f(a)$ est la notation officielle.

Certains auteurs utilisent les notations $\nabla_a f$ ou $\vec{\nabla}_a f$ ou $\vec{\nabla} f(a)$



Important:

$$\forall a \in E, \forall h \in \mathbb{R}^2, df_a(h) = \left(\nabla f(a) \mid h \right) = D_h f(a)$$

**Propriétés :** $f, g \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$

- $\nabla(f + \lambda g) = \nabla f + \lambda \nabla g$ (linéarité)
- $\nabla(fg) = \nabla f g + f \nabla g$

Interprétation géométrique :

Soit $f \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ et Γ , surface d'équation $z = f(x, y)$ dans $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

En tout point $A(x_a, y_a, z_a) \in \Gamma$

le vecteur $\nabla f(x_a, y_a)$ indique la ligne de plus grande pente de Γ

**Application au DL d'ordre 1 :**

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors,

pour tous points $a = (a_1, a_2)$ et $x = (x_1, x_2)$ de E

$$f(x) = f(a) + \left(\nabla f(a) \mid x - a \right) + \|x - a\| \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$

25.5 Dérivée d'une composée

Th. $\triangleright$ **Dérivation de** $I \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

Si $\varphi : t \mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I
 et $f : x = (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur F ouvert de $\mathbb{R}^2$
 alors $\psi = f \circ \varphi : t \mapsto f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall t \in I, \quad \psi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(t)) \varphi_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(t)) \varphi_2'(t) = \left(\nabla f(\varphi(t)) \mid \varphi'(t) \right)$$

Notes :

- Cette formule est facile à retenir. Il suffit d'appliquer à chaque variable intermédiaire la classique dérivée d'une composée :

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = f'(x(t)) x'(t)$$

- Dans la pratique, on allège parfois les notations en écrivant

$$\psi(t) = f(x_1(t), x_2(t))$$

$$\text{qu'on dérive en } \psi' = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) x_1' + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) x_2'$$

- **mais il ne faut pas oublier** que

x_1', x_2' et x sont des fonctions de t .

Exemple

On retrouve la dérivée du produit $p : t \mapsto u(t)v(t)$ comme composée
 $t \mapsto \left(u(t), v(t) \right) \mapsto f \left(u(t), v(t) \right)$ où $f(u, v) = uv$

$$p'(t) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)}_{=v} u'(t) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)}_{=u} v'(t) = u(vu' + uv')(t)$$

 (noter l'abus de notation : on indique u et v au lieu de $u(t)$ et $v(t)$.)

Test 670

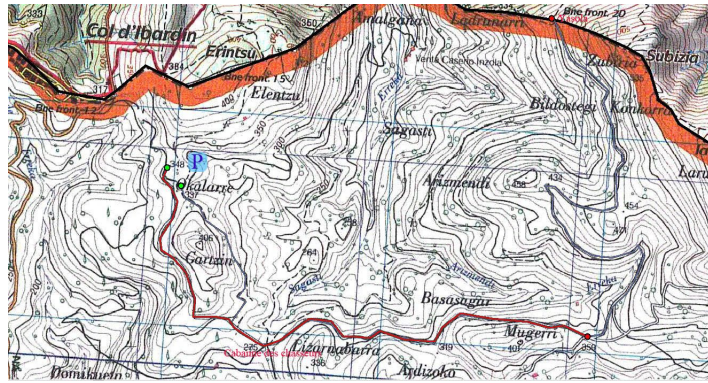
Dériver la composée $\varphi : t \mapsto f(e^t, e^{-t})$ où $f(u, v) = \frac{u}{v}$.
 Vérifier en dérivant directement φ .

La **ligne de niveau** est la courbe d'une fonction φ définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ telle que $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ vérifie

$$\forall t \in I, f(x(t), y(t)) = C^{\text{te}}$$

Th. ▷ Gradient et lignes de niveau

Soit $f \in C^1(E, \mathbb{R})$ et Γ , surface d'équation $z = f(x, y)$ dans $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 En tout point $A(x_a, y_a, z_a) \in \Gamma$
 le vecteur $\nabla f(x_a, y_a)$ est orthogonal à la ligne de niveau



dérivation de $E \xrightarrow{g} F \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

Si $g : (x_1, x_2) \mapsto \left(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2) \right)$ et $f : (u_1, u_2) \mapsto f(u_1, u_2)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur les ouverts E et F de $\mathbb{R}^2$, alors

$h = f \circ g : \underbrace{(x_1, x_2)}_x \mapsto f \left(\underbrace{g_1(x_1, x_2)}_{u_1}, \underbrace{g_2(x_1, x_2)}_{u_2} \right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E et

$$\forall x \in E \quad \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial f}{\partial u_1} \left(g(x) \right) \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f}{\partial u_2} \left(g(x) \right) \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial h}{\partial x_2}(x) = \frac{\partial f}{\partial u_1} \left(g(x) \right) \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial f}{\partial u_2} \left(g(x) \right) \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) \end{cases}$$

Note

Là encore, on simplifie les notations en

$(x, y) \mapsto h(x, y) = f \left(u(x, y), v(x, y) \right)$
 se dérive en $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$
 (avec les mêmes dangers : les compositions n'apparaissent pas.)

Retour à la notation différentielle : indépendance des notations...

Si $z = f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v)) = g(u, v)$ (f, g, u, v de classe $\mathcal{C}^1$)

$$\text{alors } dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv$$

25.6 Extremum d'une fonction de deux variables

La fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur $E \subset \mathbb{R}^2$ présente :

- un **maximum absolu** en $a \in E$ ssi $\forall x, x \in E \Rightarrow f(x) \leq f(a)$
- un **minimum absolu** en $a \in E$ ssi $\forall x, x \in E \Rightarrow f(x) \geq f(a)$
- un **extremum absolu** en $a \in E$ ssi
 f présente un maximum ou un minimum absolu en a .
- f présente un maximum **local** en a (resp. minimum, extremum) ssi
 $\exists r > 0, f|_{E \cap \mathcal{B}(a, r)}$ présente un maximum absolu en a (resp. minimum, extremum).

Th. ▷ Point critique

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur E ouvert de $\mathbb{R}^2$.

$$f \text{ présente un extremum local en } a \in E \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$$

Attention

- la réciproque est fausse (voir le contre-exemple).
- Ceci n'est valable que pour un ouvert de E
 (ou en un point situé dans $\overset{\circ}{E}$, intérieur de E)
- $a \in E$ vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$ est appelé **point critique**.
- Les extremums sont donc soit des points critiques, soit "sur les bords" de l'ensemble de définition.

Contre-exemple

Le plus classique :

$f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$O(0, 0)$ est un point critique.

Pourtant : $\forall \varepsilon > 0, f(\varepsilon, 0) > f(0, 0)$ et $f(0, \varepsilon) < f(0, 0)$ montre que f ne présente pas d'extremum local en O .

Test 671

Quels sont les extremums locaux de $f : (x, y) \mapsto \frac{x+y}{\frac{1}{2} + x^2 + y^2}$?

Se méfier des intuitions...

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur E ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant l'origine $O(0, 0)$.

- Montrer que, si f présente un minimum absolu en O sur E , alors,
 $\forall u \neq (0, 0), \varphi_u : t \mapsto f(tu)$ présente un minimum local en 0.
- f est définie par $f(x, y) = y(y - x^2)$.
 - Montrer que : $\forall u \neq 0, \varphi_u$ présentent un minimum local en 0
 - f présente-t-elle un minimum local en O ?
 - qu'en déduisez-vous ?

25.7 Exercices

Ensemble de définition et lignes de niveaux

Exercice 1

Représenter les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = \ln(2x + y - 2)$
2. $f(x, y) = \sqrt{1 - xy}$
3. $f(x, y) = \frac{\ln(y - x)}{x}$
4. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Exercice 2

Représenter les lignes de niveau k pour les fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = y^2$, avec $k = -1$ et $k = 1$
2. $f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{8 - x^2 y^2}$ avec $k = 2$
3. $f(x, y) = \sin(xy)$ avec $k = \frac{1}{2}$

Calcul de limites

Exercice 3

1. Montrer que si x et y sont des réels, on a : $2|xy| \leq x^2 + y^2$.
2. Soit f l'application de $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Montrer que, pour tout (x, y) de A , on a :

$$|f(x, y)| \leq 4 \left\| (x, y) \right\|_2$$

3. En déduire que f admet une limite en $(0, 0)$.

Exercice 4

Les fonctions suivantes ont-elles une limite (finie) en $(0, 0)$?

1. $f(x, y) = (x + y) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$
2. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
3. $f(x, y) = \frac{|x + y|}{x^2 + y^2}$

Continuité

Exercice 5

Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 .

On définit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Démontrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Dérivées partielles

Exercice 7

1. Soit g une fonction réelle de classe C^1 sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ contenant au moins le cercle unité et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Montrer que

$$\phi : t \mapsto g(\cos(t), \sin(t))$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2. On pose $f : (x, y) \mapsto \cos(x + y)$ et $g : (x, y) \mapsto (x + y, xy)$. Montrer que $h = f \circ g$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles.

Exercice 8

Soit

$$f : (x, y) \mapsto \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)$$

1. Montrer que le domaine de définition D de f est la réunion de trois ouverts de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est C^1 sur D , et calculer ses dérivées premières.

Exercice 9

On considère les ensembles D et $\tilde{D}$ de $\mathbb{R}^2$ définis par :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 + y^2 - 2y \leq 1\}$$

$$\tilde{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 + y^2 - 2y < 1\}$$

On considère la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 e^y$$

1. Représenter l'ensemble D .
2. Déterminer les points critiques de f sur $\tilde{D}$.
3. Déterminer les minima de f sur $\tilde{D}$.

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 11

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est C^1 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.
2. Etudier f en $(0, 0)$.

Exercice 12

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer toutes les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \alpha$$

On utilisera le changement de variables

$$(u = 2x + y, v = 2x - y)$$

2. A quelles conditions sur les réels λ et μ , la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \lambda (\cos(2x) + \sin(2x)) (\sin(y) + \cos(y)) \\ + \mu \left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} \right)$$

est-elle solution de l'équation précédente ?

Exercice 13

Soit (S) la surface d'équation cartésienne

$$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

Déterminer l'intersection de (S) avec son plan tangent au point $A(1, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

25.8 Exercices Complémentaires

Exercice 1

Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \frac{\sin(xy)}{|x| + |y|} \end{cases}$$

Montrer que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

Exercice 2

On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4

Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$, admet en $(0,0)$ des dérivées selon tout vecteur mais n'est pas $\mathcal{C}^1$.

Exercice 5

Déterminer les extrema locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$$

Montrer ensuite que f possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$. En quels points ?

