

Chapitre 24

Intégration sur un segment

Le programme se limite à l'intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment. Les notions de fonction réglée et de fonction intégrable au sens de Riemann sont hors programme.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
par ailleurs I et $[a; b]$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

24.1 Continuité uniforme

24.1.1 Des exemples

La continuité de f en a se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

La continuité de f sur I se traduit par :

$$\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0, \forall a \in I, \exists \eta > 0, \forall x, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

► **Exemple N°1 :** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x$.

▷ l'ensemble des taux d'accroissement est borné¹ sur $\mathbb{R}$

▷ donc, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe une valeur de η indépendante de a

► **Exemple N°2 :** $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$\triangleright f(a) - f(2a) = \frac{1}{2a} > \varepsilon \Leftrightarrow a < \frac{1}{2\varepsilon}.$$

▷ ceci montre qu'il est possible de trouver deux réels arbitrairement proches, dont les images sont distantes d'au moins ε .

▷ il est donc impossible de trouver une valeur de η indépendante de a

24.1.2 Continuité uniforme

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ est uniformément continue ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Propriétés :

1. Cet exemple utilise une fonction lipschitzienne, mais l'existence d'un η indépendant de a n'est pas liée à la lipschitzianité.

- **Lien entre continuité et uniforme continuité :**
 - f uniformément continue sur $I \Rightarrow f$ continue sur I
 - La réciproque est fausse
- Si f est uniformément continue sur $[a, b]$ et $[b, c]$, elle l'est sur $[a, c]$.

Test 631 La fonction identique est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

Test 632 Montrer que la fonction carrée n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. On pourra commencer par écrire la négation de la définition d'uniformément continue.



Th. $\triangleright$ **Théorème de Heine**²

Si f est continue sur un segment $[a, b]$ (à valeurs dans $\mathbb{K}$),
alors f est uniformément continue sur $[a, b]$

Cas des fonctions lipschitziennes :

- Une fonction lipschitzienne sur un intervalle y est uniformément continue.
- **Attention :** la réciproque est fausse.

Test 633 Montrer que $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.
On pourra découper $[0, +\infty[$ en 2 intervalles : le segment $[0; 1]$ et $[1; +\infty[$ où on montrera que f est lipschitzienne.

24.2 Fonctions en escalier

24.2.1 Subdivision d'un segment

Une subdivision³ d'un segment $[a, b]$ est une famille $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$
telle que $n \in \mathbb{N}^*$ et $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Le pas de la subdivision σ est $\max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$

Si $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $\sigma' = (x'_i)_{0 \leq i \leq m}$ sont deux subdivisions de $[a, b]$
 σ est plus fine que σ' ssi $\forall i \in \left[\left[0, m \right] \right], \exists j \in \left[\left[0, n \right] \right] \quad x'_i = x_j$.

Nous noterons $\sigma' \prec \sigma$ (voir⁴)

Test 634 Quel est le pas de la subdivision de $[1, 2]$: $1 < 1.2 < 1.5 < 1.85 < 2$

Test 635 Que peut-on dire du pas d'une subdivision du segment $[0, 1]$?

Test 636 Si σ et σ' sont deux subdivisions d'un même segment, avec σ plus fine que σ' , que peut-on dire des pas de ces subdivisions ?
Que pensez-vous de la réciproque ?

Propriétés :

$\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$, $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies de $]a, b[$:

2. Heinrich Eduard HEINE (1821-1881)
3. On dit aussi partage du segment.
4. Cette notation n'est pas normalisée.

- L'application $\Delta \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \rightarrow & \mathcal{F} \\ (x_i)_{0 \leq i \leq n} & \mapsto & \{x_i \mid 0 < i < n\} \end{array} \right.$ est une bijection
- $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}$: σ plus fine que σ' $\underline{\text{ssi}}$ $\Delta(\sigma') \subset \Delta(\sigma)$
- "être plus fine que" est donc une relation d'ordre sur $\mathcal{S}$
- Il est toujours possible de trouver une subdivision σ'' plus fine que deux subdivisions σ et σ' données.
La subdivision associée à la réunion $\Delta(\sigma) \cup \Delta(\sigma')$ convient.
(De manière abusive, nous parlerons de "réunion des subdivisions".)

Test 637 L'ordre "être plus fine que" est-il un ordre total sur $\mathcal{S}$?

Test 638 Posons $\sigma'' = \Delta^{-1}(\Delta(\sigma) \cup \Delta(\sigma'))$. Montrer plus précisément que $\sigma'' = \sup \{\sigma, \sigma'\}$.
On pourra utiliser la caractérisation " σ plus fine que $\sigma' \underline{\text{ssi}} \Delta(\sigma') \subset \Delta(\sigma)$ ".

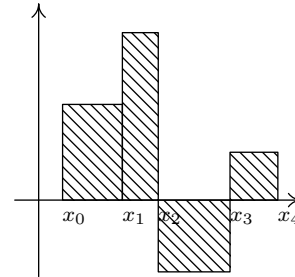
24.2.2 Fonctions en escaliers sur un segment

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$.

f est en escalier sur $[a, b]$ $\underline{\text{ssi}}$

il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$
telle que
 $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f|_{]x_{i-1}, x_i[}$ est constante.

On dit que la subdivision σ est subordonnée à f .



Nous noterons $\mathcal{E}_{[a,b],\mathbb{K}}$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ (voir ⁵)

Test 639 Montrer que $x \mapsto E(4x)$ et $x \mapsto E(4x^2)$ sont en escalier sur $[0, 1]$.

Propriétés :

- Toute fonction constante sur un segment est en escalier.
- Si la subdivision σ est subordonnée à la fonction en escalier f , toute subdivision plus fine est également subordonnée à f .
- Une fonction en escalier sur $[a, b]$ est déterminée par la donnée
 - d'une subdivision subordonnée $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$
 - de $2n + 1$ scalaires $\begin{cases} \lambda_i & 1 \leq i \leq n \text{ valeur de } f|_{]x_{i-1}, x_i[} \\ \mu_i & 0 \leq i \leq n \quad f(x_i) = \mu_i \end{cases}$
- La valeur de f aux points de subdivision n'intervient pas dans la définition.
- Si on modifie un nombre fini de valeurs d'une fonction en escalier, on obtient une fonction en escalier.

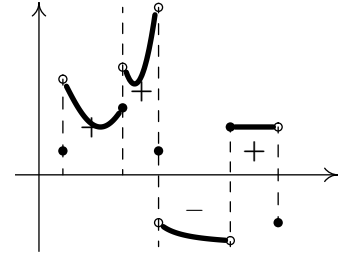
- $(\mathcal{E}_{[a,b],\mathbb{K}}, +, \times)$ est un anneau commutatif, non intègre.

Test 640 Représenter la somme des fonctions $x \mapsto E(4x)$ et $x \mapsto E(4x^2)$

5. Cette notation n'est pas normalisée.

24.2.3 Intégrale d'une fonction en escalier

L'intégrale d'une fonction, en escalier et à valeurs réelles, sur le segment I est l'aire algébrique de la surface comprise entre l'axe $x'Ox$ et $\mathcal{C}$, représentation graphique de f

**Th.** ▷ **Intégrale d'une fonction en escalier**

Si $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une subdivision subordonnée à $f \in \mathcal{E}_{[a,b],\mathbb{K}}$,

et $\forall i \in \left[1, n\right]$, $x \in]x_{i-1}, x_i[\Rightarrow f(x) = \lambda_i$

$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \lambda_i$ est indépendante de la subdivision

C'est l'**intégrale** de f sur $[a, b]$, notée

$$\int_{[a,b]} f$$

$$\text{ou } \int_{[a,b]} f(t) dt$$

Remarques

- L'intégrale de $f \in \mathcal{E}_{[a,b],\mathbb{K}}$ ne dépend pas de la valeur de f aux points de subdivision.
- Si $f : x \mapsto \lambda$ est constante sur $[a, b]$: $\int_{[a,b]} f = \lambda(b-a)$.
- Il en est de même si f est constante sauf en un nombre fini de points.

Test 641

Calculer $\int_{[0,1]} E(3t) dt$, $\int_{[0,2]} E(3t) dt$, $\int_{[0,1]} E\left(\frac{1}{2} - 3t\right) dt$.

24.2.4 Propriétés

► **Linéarité :** $\forall f, g \in \mathcal{E}_{[a,b]}$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$,

$$\int_{[a,b]} (f + g) = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g \quad \int_{[a,b]} (\alpha f) = \alpha \int_{[a,b]} f$$

(L'intégration est une forme linéaire sur $\mathcal{E}_{[a,b],\mathbb{K}}$).

► **Relation de Chasles :** si $f \in \mathcal{E}_{[a,b],\mathbb{K}}$ et $a < c < b$, alors

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

(Remarquons que les restrictions de f sont des fonctions en escalier.)



► **Croissance :** $\forall f, g \in \mathcal{E}_{[a,b],\mathbb{R}}$

$$\triangleright f \geq 0 \Rightarrow \int_{[a,b]} f \geq 0$$

$$\triangleright f \geq g \Rightarrow \int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$$

Test 642

Que pensez-vous de la réciproque : $\int_{[a,b]} f \geq 0 \Rightarrow f \geq 0$?

Test 643

$f \in \mathcal{E}_{[a,b],\mathbb{R}}$ n'est pas la fonction nulle. A-t-on $f \geq 0 \Rightarrow \int_{[a,b]} f > 0$?

24.3 Fonctions continues par morceaux

24.3.1 Algèbre des fonctions continues par morceaux

f est en continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$,
ssi

il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$

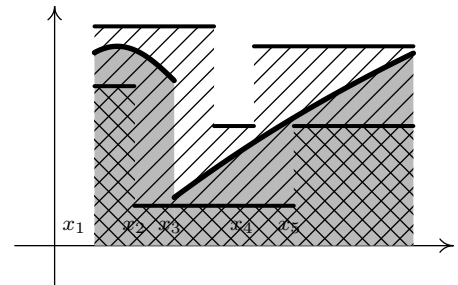
telle que, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

f est continue sur $]x_{i-1}, x_i[$

f admet une limite finie à droite en x_{i-1}

f admet une limite finie à gauche en x_i

On dit que la subdivision σ est subordonnée à f .



Remarque

Une fonction en escalier est une fonction continue par morceaux.

Test 644

Justifier qu'une fonction en escalier est continue par morceaux ?

Test 645

La fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f(0) = 0$ et, si $x \neq 0$, $f(x) = \frac{E(2x)}{x}$ est-elle continue par morceaux ?

Test 646

La fonction définie par $f(0) = 0$ et $\forall x \neq 0$, $f(x) = \frac{E(2x)}{x}$ est-elle continue par morceaux sur $[0, 2]$?

Propriétés :

- si la subdivision σ est subordonnée à f ,
il en est de même pour toute subdivision plus fine
- Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée
- L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$
est un sous-anneau de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$



24.3.2 Approximation par une fonction en escalier

Th. ▷ Approximation uniforme d'une fonction continue

Toute fonction de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ peut être approchée uniformément par une fonction en escalier, avec une précision arbitraire :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b]), \forall \varepsilon > 0, \exists \theta \in \mathcal{E}_{[a,b],\mathbb{K}} \quad |f - \theta| \leq \varepsilon$$

Conséquence : on peut également approcher uniformément une fonction continue par morceaux par une fonction en escalier.

(avec une précision arbitraire)



**Th.** ▷ **Encadrement d'une fonction continue à valeurs réelles**

Toute fonction de réelle continue sur le segment $[a; b]$ est encadrée par deux fonctions en escalier et réelles θ et φ dont la différence est arbitrairement petite :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \forall \varepsilon > 0, \\ \exists \theta, \varphi \in \mathcal{E}_{[a, b], \mathbb{R}} \quad \theta \leq f \leq \varphi \quad \text{et} \quad |\varphi - \theta| \leq \varepsilon$$

24.3.3 Intégrale d'une fonction réelle continue par morceaux**Important:**

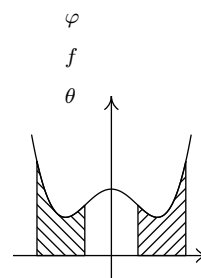
On se limite dans cette section aux fonctions à valeurs réelles.

Interprétation en termes d'aire :

Notons $\Delta_f = \left\{ M(x, y) \mid x \in [a, b] \text{ et } 0 \leq y \leq f(x) \right\}$.

pour une fonction positive f encadrée par deux fonctions en escalier θ et φ ,

l'aire de Δ_f est comprise entre celles de Δ_θ et Δ_φ .



Si $\varphi - \theta \leq \varepsilon$, les intégrales $\int_{[a, b]} \theta$ et $\int_{[a, b]} \varphi$ approchent l'aire de Δ_f

avec la précision $\varepsilon(b-a)$.

Th. ▷ **Définition de l'intégrale**

Si f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ à valeurs réelles, alors

$$I_- = \left\{ \int_{[a, b]} \theta \mid \theta \in \mathcal{E}_{[a, b], \mathbb{R}} \quad \theta \leq f \right\} \text{ admet une borne supérieure : } s$$

$$I_+ = \left\{ \int_{[a, b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}_{[a, b], \mathbb{R}} \quad f \leq \varphi \right\} \text{ admet une borne inférieure : } S$$

qui sont égales ($s = S$).

C'est l'**intégrale** de f sur $[a, b]$

Remarque : Si f est en escalier, nous avons $s = S = \int_{[a, b]} f$.

Ceci permet d'utiliser la même notation de l'intégrale pour les fonctions en escalier et pour les fonctions continues par morceaux.

$$\boxed{\int_{[a, b]} f} \quad \text{ou} \quad \boxed{\int_{[a, b]} f(t) dt}$$

Exemple :

Pour calculer $\int_{[0, 1]} t dt$, on utilise des subdivisions régulières $(\frac{1}{n})$ de $[0, 1]$.
et les fonctions en escalier θ et φ définies par

$$x \in \left] \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right[\Rightarrow \theta(x) = \frac{i-1}{n} \quad \text{et} \quad \varphi(x) = \frac{i}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{(n-1)n}{2n^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n^2} \in I_- \quad \text{et} \quad \frac{n(n+1)}{2n^2} = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} \in I_+$$

$$\text{d'où} \quad \frac{(n-1)n}{2n^2} \leq s = S \leq \frac{n(n+1)}{2n^2} \Rightarrow s = S = \frac{1}{2} \quad (\text{pincement en } \infty)$$

Test 647

Utiliser la définition pour calculer $\int_{[0, 1]} t^2 dt$.
On pourra s'inspirer de l'exemple précédent.

Définition de $\int_a^b f$:

$$\begin{aligned} \text{si } a < b : \quad & \int_a^b f = \int_{[a,b]} f \\ \text{si } b < a : \quad & \int_a^b f = - \int_{[a,b]} f \\ \text{si } a = b : \quad & \int_a^b f = 0 \end{aligned}$$

Il est alors évident que

$$\int_a^b f = - \int_b^a f$$

Noter que $\int_{[a,b]} f = \int_{[b,a]} f = \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} f$

La notation $\int_I f$ est utilisée pour assurer "l'ordre usuel des bornes".

24.3.4 Intégrale d'une fonction complexe continue par morceaux

Th. ▷ **Définition de l'intégrale**

Si f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ à valeurs complexes, alors l'intégrale de f sur $[a, b]$ est définie par

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \operatorname{Re} f + i \int_{[a,b]} \operatorname{Im} f$$

24.3.5 Propriétés

$\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ désigne l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$

Th. ▷ **Un outil**

pour toute fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
pour toute suite (θ_n) de fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$\left| \theta_n - f \right| \leq \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \theta_n$$

► **linéarité :**

$$\forall f, g \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b (f + \lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$$

L'intégration est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$

► **Relation de Chasles :**

Si f , à valeurs dans $\mathbb{R}$, est continue par morceaux sur les intervalles $[a, b]$, $[b, c]$ et $[c, a]$

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f \quad (\text{ceci quel que soit l'ordre des points } a, b \text{ et } c.)$$

► **La linéarité et la relation de Chasles s'étend à $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{C})$:**

► **Croissance :** vérifier $a < b$ est fondamental ici

$\forall f, g \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R}) :$

$$\triangleright a < b \text{ et } 0 \leq f \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \int_a^b f$$

$$\triangleright a < b \text{ et } f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \leq \int_a^b g$$



$$\triangleright a < b \Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \quad (\text{voir l'inégalité de la moyenne page 693})$$

► Seule l'inégalité des modules s'étend à $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{C})$.

► Inégalités : $\forall f, g \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R}) :$

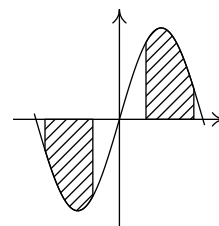
$$\triangleright \text{Inégalité de Cauchy}^6\text{-Schwarz}^7 : \left(\int_{[a,b]} f g \right)^2 \leq \int_{[a,b]} f^2 \times \int_{[a,b]} g^2$$

$$\triangleright \text{Inégalité de Minkowski}^8 : \sqrt{\int_{[a,b]} (f+g)^2} \leq \sqrt{\int_{[a,b]} f^2} + \sqrt{\int_{[a,b]} g^2}$$

24.3.6 Cas des fonctions paires, impaires, périodiques

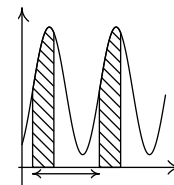
Si f continue est paire, alors $\int_a^b f = \int_{-b}^{-a} f$

Cas particulier : $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$



Si f continue est impaire, alors $\int_a^b f = - \int_{-b}^{-a} f$

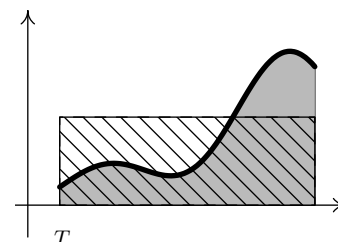
Cas particulier : $\int_{-a}^a f = 0$



Si f continue est T -périodique :

$$\int_a^b f = \int_{a+T}^{b+T} f$$

$\int_a^{a+T} f$ est indépendant de a



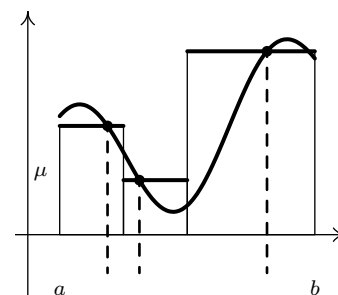
24.3.7 Valeur moyenne

f est continue par morceaux sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($a \neq b$).

La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

Idee : Le rectangle et la partie grisée ont même aire algébrique.



6. Augustin-Louis CAUCHY (1789-1857) mathématicien Français.

7. Hermann Amandus SCHWARZ (1843-1921) mathématicien Allemand élève de Weierstrass.

Ne pas confondre avec Laurent SCHWARZ (1915-2002) brillant mathématicien Français, animateur du groupe BOURBAKI.

8. Herman MINKOWSKI (1864-1909) mathématicien Allemand, a enseigné à Albert Einstein (école polytechnique de Zürich)

Exemple

Valeur efficace d'un courant alternatif d'intensité $I(t) = I_m \cos(\omega t)$:
 l'énergie dissipée dans une résistance morte ($R \Omega$) pendant une période est

$$\int_0^{2\pi/\omega} R I_m^2 \underbrace{\cos^2(\omega t)}_{\frac{1+\cos(2\omega t)}{2}} dt = \left[R I_m^2 \left(\frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} + \frac{t}{2} \right) \right]_0^{2\pi/\omega} = \frac{\pi}{\omega} R I_m^2$$
 qui serait
 obtenue par un courant continu d'intensité $I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$.

Test 648

Représenter, sur $[-2, 4] - \{0\}$, la fonction qui à x associe la valeur moyenne de la fonction E (partie entière) entre 0 et x . Pour cela il faudra distinguer 6 cas autrement dit découper $[-2, 4]$ en 6 intervalles de longueur 1.

Th. $\triangleright$ **Inégalité de la moyenne**⁹

Si f et g sont continues par morceaux sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$:

$$\left| \int_{[a,b]} fg \right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \times \int_{[a,b]} |g|$$

En particulier :

$$\left| \int_a^b f \right| \leq |b-a| \sup_{[a,b]} |f|$$

Test 649

Montrer : $m \leq f \leq M \Rightarrow m |b-a| \leq \int_{[a,b]} f \leq M |b-a|$

24.3.8 Cas des fonctions continues réelles**Th.** $\triangleright$ **Fonction nulle**

Une fonction à valeurs réelles, continue, positive sur $[a, b]$, est nulle
ssi son intégrale sur $[a, b]$ est nulle.

$$\left. \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \\ \forall x \in [a, b] \ f(x) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{[a,b]} f = 0 \Leftrightarrow f = \mathbf{0}$$

(Ceci reste valable avec une fonction négative.)

Test 650

Donner un exemple qui montre que la continuité est indispensable.

Conséquence sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$:

$$\left(\int_{[a,b]} fg \right)^2 = \int_{[a,b]} f^2 \times \int_{[a,b]} g^2 \Leftrightarrow f \text{ et } g \text{ sont proportionnelles}$$

avec des fonctions continues, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité ssi les fonctions sont proportionnelles.

9. Voir également l'égalité de la moyenne (24.4.1 page 695).



24.4 Fonction définie par une intégrale

24.4.1 Théorème de Leibniz, primitive

Th. ▷ intégrale d'une fonction continue par morceaux

Si $a \in I$, intervalle de $\mathbb{R}$,
et f est continue par morceaux sur tout segment de I ,

alors, $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est continue sur I

*Plus précisément, cette fonction est lipschitzienne sur tout segment de I
(mais pas nécessairement sur I .)*

Th. ▷ Théorème de Leibniz

Si f est continue sur I alors

$\forall a \in I, \quad F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur I

Plus précisément, F est la primitive qui s'annule en a .

Attention : ce théorème est faux si f est continue par morceaux.

Corollaire

f est continue sur $[a, b] \Rightarrow$

$$\int_a^b f(t) dt = \left[F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$

Th. ▷ Formule (ou égalité) de la moyenne¹⁰ :

Sur un segment, une fonction continue atteint sa valeur moyenne

$$f \in \mathcal{C}^0([a, b]) \Rightarrow \exists c \in]a, b[\quad \int_a^b f = (b - a) f(c)$$

Test 651

Si f est dérivable sur $[a, b]$, peut-on dire que $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$?

Test 652

$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Les fonctions suivantes sont-elles des primitives de f ?

$$g_1(x) = \int_x^0 f(t) dt \quad g_2(x) = \int_0^{2x} f(t) dt$$

Sont-elles dérivables ? Si oui, calculer la dérivée.

Test 653

f est continue sur l'intervalle $I = [-1; 1]$. Notons F une primitive de f sur I .

Montrer que la fonction g définie sur I par $g(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt$ est dérivable sur I , et calculer la dérivée.

Test 654

Justifier que $g : x \mapsto \int_1^x \sin^3(x+t) dt$ est

dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pourra commencer par montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x)$ existe puis effectuer le changement de variable $u = x + t$, enfin considérer une primitive F de $f : u \mapsto \sin^3(u)$ sur $\mathbb{R}$.

10. Bizarrement, cette formule très utile est hors programme.

24.4.2 Formules de Taylor

Th. ▷ **Formule de Taylor avec reste intégral :**

$n \in \mathbb{N}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I intervalle contenant a et b , on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Th. ▷ **Inégalité de Taylor-Lagrange :**

Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I contenant a et b ,

Si $|f^{(n+1)}|$ est majoré par M sur I alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

24.5 Approximations d'une intégrale

24.5.1 Somme de Riemann

f est continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$,

$\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une subdivision de $[a, b]$,

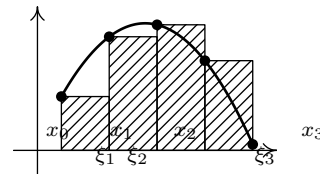
$\tau = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n} \in [a, b]^n$ vérifie : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$.

La **somme de Riemann**¹¹ de f ,

associée à σ et à la famille τ

$$\text{est } \mathcal{R}(f, \sigma, \tau) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$$

(C'est l'intégrale d'une fonction en escalier)



Test 655

Évaluer la somme de Riemann $\mathcal{R}(f, \sigma, \tau)$ lorsque $f(x) = x^2$, $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ est la subdivision régulière de $[0, 1]$, et $\tau = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$.

On a donc $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, x_i = \frac{i}{n}$.

Cette somme admet-elle une limite quand $n \rightarrow \infty$?

Test 656

Interpréter les sommes suivantes comme des sommes de Riemann dont on précisera les éléments :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n}, \quad \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2}, \quad \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n^3}}$$

Th. ▷ **Approximation par une somme de Riemann**

Si f est continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$,

toute somme de Riemann, de pas suffisamment petit, approche arbitrairement

l'intégrale $\int_{[a,b]} f$

f continue sur $[a, b]$: $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists \eta > 0$, $\forall \sigma$ subdivision de $[a, b]$, $\forall \tau$ famille associée,

$$\text{pas}(\sigma) < \eta \Rightarrow \left| \mathcal{R}(f, \sigma, \tau) - \int_{[a,b]} f \right| < \varepsilon$$

11. Georg Friedrich RIEMANN (1826-1866) mathématicien Allemand.

Remarque

On ne peut pas dire que, lorsque le pas tend vers 0, les sommes de Riemann tendent vers l'intégrale : nous n'avons pas une application qui à "un pas" associe "une subdivision et une famille".

Par contre, si $(\mathcal{R}(f, \sigma_n, \tau_n))$ est une suite de sommes de Riemann, et que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{pas}(\sigma_n)) = 0,$$

alors la suite $(\mathcal{R}(f, \sigma_n, \tau_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_{[a,b]} f$

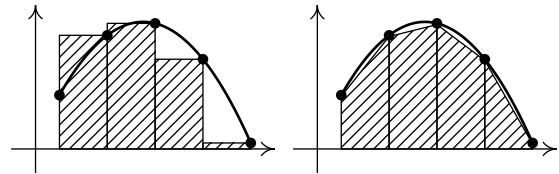
Th. $\triangleright$ Somme de Riemann et fonction lipschitzienne

Si f est k -lipschitzienne sur $[a, b]$
 σ est une subdivision de $[a, b]$,
 τ une famille associée à σ

$$\left| \mathcal{R}(f, \sigma, \tau) - \int_{[a,b]} f \right| \leq k |b - a| \text{pas}(\sigma)$$

24.5.2 Autres approximations d'une intégrale**► Méthode des rectangles :**

L'idée est d'approcher l'intégrale par une somme de Riemann, avec une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ régulière de $[a, b]$, et la famille $\tau = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ où ξ_i est une extrémité du segment $[x_{i-1}, x_i]$, donc, soit $\xi_i = x_{i-1}$, soit $\xi_i = x_i$.



On obtient donc deux formules différentes :

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$

$$R'_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$

Qualité :

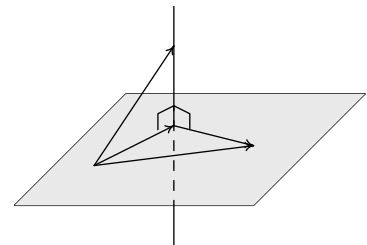
si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$:

$$\left| \int_{[a,b]} f - R_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \sup_{[a,b]} |f'|$$

méthode en $\boxed{\frac{k}{n}}$

► Méthode des trapèzes :

L'idée est d'approcher la courbe par des trapèzes construits sur les intervalles d'une subdivision régulière de $[a, b]$.



On obtient la formule suivante :

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \right)$$

Remarque : $T_n = \frac{R_n + R'_n}{2}$ est la moyenne entre $R_n(f)$ et $R'_n(f)$.

Qualité :si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\left| \int_{[a,b]} f - T_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{[a,b]} |f''| \quad \text{méthode en } \frac{k}{n^2}$$

Attention

Dans la pratique, à l'erreur ε_m due à la méthode, s'ajoute l'erreur ε_c due aux approximations sur chaque terme de la somme :

- On diminue ε_m en augmentant la valeur de n
- On diminue ε_c en diminuant la valeur de n

Il faut chercher un compromis...¹²

**Test 657**

Majorer l'erreur commise en évaluant $\int_0^1 e^t dt$ avec $n = 10$ par les différentes méthodes. Qu'en déduisez-vous si les calculs sont effectués avec trois chiffres significatifs ?

24.6 Etude de suites d'intégrales



Point Méthode : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$$

1. Montrons que cette suite (I_n) est définie.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \frac{x^n}{1+x^2}$ est continue sur $[0; 1]$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0; 1]$.

Par conséquent, cette fonction est intégrable sur $[0; 1]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, I_n existe.

2. Montrons que cette suite (I_n) est décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x^2} dx$$

Or $\forall x \in [0; 1]$, $x^n \geq 0$, $(x-1) \leq 0$ et $1+x^2 > 0$ et donc $\frac{x^n(x-1)}{1+x^2} \leq 0$,

Par positivité de l'intégrale avec des bornes 0 et 1 rangées dans l'ordre croissant, on obtient

$$\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x^2} dx \leq 0 \text{ donc } I_{n+1} - I_n \leq 0$$

Finalement la suite (I_n) est décroissante.

3. Montrons que cette suite (I_n) est convergente.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [0; 1]$,

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x^2}$$

Or $x \mapsto \frac{x^n}{1+x^2}$ est continue sur $[0; 1]$ donc intégrable.

Par positivité de l'intégrale avec des bornes 0 et 1 rangées dans l'ordre croissant, on obtient

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \text{ d'où } 0 \leq I_n$$

Finalement (I_n) est décroissante minorée par 0 donc (I_n) est convergente.

¹². Voir l'exercice en fin de paragraphe.

4. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [0; 1]$, $0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall x \in [0; 1],$$

$$0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$$

5. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [0; 1]$, $0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$. Or $x \mapsto \frac{x^n}{1+x^2}$ et $x \mapsto x^n$ sont continues sur $[0; 1]$ donc intégrables.

Par positivité de l'intégrale avec des bornes 0 et 1 rangées dans l'ordre croissant, on obtient

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$0 \leq I_n \leq \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1$$

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

6. Déterminons la limite de cette suite.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, par le théorème d'encadrement, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

24.7 Exercices

Exercice 1

1. Justifier rapidement que les applications suivantes

$$\varphi_0 : P \mapsto P(0), \quad \varphi_1 : P \mapsto P(1), \quad \varphi_2 : P \mapsto \int_0^1 P(t) dt$$

sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}_1[X]$.

2. Montrer que (φ_0, φ_1) est libre et que $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ est liée.
 3. Exprimer φ_2 en fonction de φ_0 et φ_1 .

Etudes de suites d'intégrales

Exercice 2

Vérifier : $\forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq \ln(1+x) \leq x$.

En déduire un encadrement de $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$ et donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 3

Etudier la monotonie des suites suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$).

$\bullet \quad a_n = \int_0^n \exp(-t^2) dt$		$\bullet \quad c_n = \int_2^0 x \exp(nx) dx$
$\bullet \quad b_n = \int_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$		$\bullet \quad d_n = \int_{-1}^0 x \exp(n^2 x) dx$

Exercice 4

On pose pour tout entier naturel non nul n :

$$I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx \text{ et } I_0 = e - 1$$

1. Donner la monotonie de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$.
2. Montrer que $\forall n > 0, \quad I_n \geq 0$.
3. Etablir, pour tout entier naturel n non nul, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
4. Déduire des questions précédentes que $\forall n > 0$:

$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

5. Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
6. A l'aide de la question 3, montrer que : $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{n}$.

Exercice 5

$\forall n \geq 1$, on note $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$ et $J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt$.

1. Calculer I_1 .
2. Déterminer la monotonie des suites $(I_n)_{n \geq 0}$ et $(J_n)_{n \geq 0}$.
3. Montrer que $\forall n \geq 1, \forall t \in [0; 1], 0 \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$
4. Montrer que $\forall n \geq 1, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$
5. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
6. Par une intégration par parties, montrer que $J_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_{n+2}$
7. En déduire la convergence de la suite (J_n) .
8. Montrer que J_n est équivalent à $\frac{\ln(2)}{n+1}$ en $+\infty$.

24.7.1 Intégrale de Riemann

Exercice 6

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$

Exercice 7

Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on note $u_n = \int_a^b \varphi(x) \sin(nx) dx$

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
2. En déduire que le résultat est conservé si φ est continue par morceaux sur $[a, b]$.

Exercice 8

Montrer que, si $0 < a < b$, alors $\ln(b) - \ln(a) \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

Indication : appliquer l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* à $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Exercice 9

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe C^2 vérifiant $f(a) = f(b) = 0$.

Montrer qu'on a l'inégalité : $\left(\int_a^b f'^2 \right)^2 \leq \int_a^b f^2 \times \int_a^b f''^2$.

Indication : il n'y a pas que *Cauchy-Schwarz* dans la vie penser aussi à l'IPP !

Exercice 10

Soit $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$: montrer

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k+1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f^2(t) dt$$

Exercice 11

En l'encadrant par deux sommes de Riemann, trouver la limite de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(n+k-1)(n+k)}}$.

Exercice 12

Calculer les limites éventuelles des suites $u = (u_n)$ définies par :

1. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$ 2. $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ 3. $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$ 4. $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k e^{-k/n}$ 5. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 - \frac{k^2}{2}}}$	6. $u_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{n^2 - k^2}{n^4}}$ 7. $u_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \right)^{\frac{1}{n}}$ 8. $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ 9. $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ 10. $u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{n}{k^2}$
--	--

Exercice 13

Soit f une fonction continue sur un segment $[a; b]$ à valeurs réelles. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| = \int_{[a,b]} |f|$$

On pourra distinguer deux cas : $\int_{[a,b]} f \geq 0$ puis $\int_{[a,b]} f < 0$.

Exercice 14

Soit f une fonction continue sur $I = [0; 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par $f_n(t) = t^n$, et on pose $J_n(f) = \int_I f f_n$.

1. Montrer que si f est positive, la suite $(J_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
2. On ne suppose plus nécessairement que f est positive. En utilisant $\int_I f_n = \frac{1}{n+1}$, montrer que $(J_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ est de limite nulle.

Exercice 15**Comparaison série-intégrale**

Soit f une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n , on a

$$f(n+1) \leq \int_{[n, n+1]} f \leq f(n)$$

Donner un encadrement similaire lorsque f est supposée croissante.

2. En déduire un encadrement de $\sum_{k=1}^n f(k)$ à l'aide d'intégrales.

Exercice 16

Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur l'intervalle $[0; \pi]$, telle que

$$\int_0^\pi f(x) \sin x dx = \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$$

Montrer que f s'annule au moins en deux points de l'intervalle $]0; \pi[$.

Fonctions définies par une intégrale

Exercice 17

On considère la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

1. Donner le domaine de définition de F . Justifier que F est dérivable sur $\mathcal{D}_F$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que F est impaire.
3. Déterminer la monotonie de F .
4. En justifiant que $\forall t > 0$,

$$\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

montrer que $\forall x \geq 1$, $\int_1^x \frac{dt}{1+t^2} \leq 1$.

5. En déduire que la fonction F admet une limite en $+\infty$. On note $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
6. On pose $G(x) = F(x) + F(\frac{1}{x})$.
 - (a) Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ et calculer G' . Que dire de G ?
 - (b) En faisant tendre x vers $+\infty$, montrer que $L = 2F(1)$.

Exercice 18

Soit $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$. On considère les fonctions $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_{1/x}^x f(t)dt$

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Montrer que F est C^1 sur $\mathcal{D}_f$ et déterminer F' .
3. Montrer que G est C^1 sur $\mathcal{D}_f$. Déterminer G' et $G(1)$. En déduire G .

Calculs de primitives et d'intégrales

Exercice 19

Déterminer des primitives des fonctions données par les expressions suivantes :

- | | | |
|----------------------------------|------------------------------|---------------------------------|
| 1. $e^x \sin(e^x)$. | 5. $\sin^2(x) \sin(2x)$. | 10. $(x^2 + 1) \exp x$. |
| 2. $\frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^2}$. | 6. $\operatorname{sh}^3 x$. | 11. $\operatorname{Arctan} x$. |
| 3. $\frac{\ln x}{x}$. | 7. $\ln x $. | 12. $e^x \cos x$. |
| 4. $\cos^3 x$. | 8. $ \ln x $. | 13. $e^x \sin x$. |
| | 9. $\frac{\ln x}{x^2}$. | 14. $\frac{1}{\cos^5 x}$. |

Exercice 20

1. Montrer que $\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x) dx = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx$.

Exercice 21

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

1. Déterminer D , le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in D$.
3. En utilisant un développement limité de $\ln$ au voisinage de 1, montrer que

$$\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} + o(1)$$

4. En déduire que les expressions $f'(x)$ et $\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$ possèdent des limites finies à préciser lorsque x tend vers 1.
5. En considérant $f(x) - \ln(1+x)$, montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ln 2$.
6. Montrer que pour tout $x \in]0; 1[$,

$$0 \leq f(x) \leq \frac{-x}{\ln x}$$

et en déduire que f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1[$.

Exercice 22**Intégrales de Wallis**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
3. En déduire des expressions de I_{2p} et I_{2p+1} à l'aide de factorielles.
4. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.
5. En déduire que $I_{2p} \sim I_{2p+1}$ lorsque p tend vers $+\infty$, puis que $I_n \sim I_{n+1}$.
6. Montrer que $(n+1)I_n I_{n+1}$ est indépendant de n , et en déduire un équivalent simple de I_n .
7. On a pu déjà montrer dans un précédent exercice qu'il existe une constante $\ell > 0$ telle que $n! \sim \ell \sqrt{n} \frac{n^n}{e^n}$. Montrer que $\ell = \sqrt{2\pi}$.

La formule $n! \sim \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}$ est appelée *formule de Stirling*

Formules de Taylor globales**Exercice 23**

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $x^+ = \max(0, x)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{e^{x^+}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$
2. En déduire que
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x$$

24.8 Exercices Complémentaires

Exercice 1

Étudier la monotonie des suites suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$).

$$a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \quad b_n = \int_0^{1/n} \frac{x}{1+x^3} dx \quad c_n = \int_1^n (1-x)^3 e^x dx$$

Exercice 2

On pose pour tout ($n \in \mathbb{N}^*$), $I_n = \int_1^n \frac{x}{1+x^3} dx$

1. Déterminer la monotonie de la suite (I_n) .
2. Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[, \frac{1}{2x^2} \leq \frac{x}{1+x^3} \leq \frac{1}{x^2}$.
3. Montrer que la suite (I_n) est majorée.
4. Montrer que la suite $(I_n)_{n>0}$ est convergente et que $\frac{1}{2} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \leq 1$.

Exercice 3

On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0; 1]$, $0 \leq (1-t)^n e^t \leq e$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}$
4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
5. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}$

Exercice 4

Soient x un réel positif. E étant la partie entière, calculer $\int_{[0;x]} E$.

Exercice 5

Trouver toutes les applications $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], [0; 1])$ telles que

$$\int_{[0;1]} f = \int_{[0;1]} f^2$$

Exercice 6

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{dx}{\sqrt{n^2 + x^3}} = 0$.

Exercice 7

Comment obtenir la meilleure approximation possible ?

Pour obtenir une valeur approchée de $I = \int_1^2 \ln(t) dt$ on dispose d'une table de logarithmes à 5 chiffres significatifs.

1. **On utilise la méthode des rectangles.** Évaluer, en fonction de n , l'erreur totale $\varepsilon_t = \varepsilon_m + \varepsilon_c$ due à la méthode et aux calculs.
Pour quelle valeur de n cette erreur est-elle minimale ?
Majorer cette erreur.
2. Même question en utilisant **la méthode des trapèzes.**

Exercice 8

Calculer les limites éventuelles des suites $u = (u_n)$ définies par :

$$1. u_n = \sum_{k=0}^n \frac{k^p}{n^{p+1}}, p \geq 0$$

$$2. u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)}$$

$$3. u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$$

$$4. u_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \dots (2n)}$$

