

Chapitre 21

Espaces vectoriels de dimension finie

21.1 Dimension d'un espace vectoriel

21.1.1 Espace à générateur fini

L'espace E est à **générateur fini** ssi il existe une famille finie qui engendre E .

Nous verrons dans ce chapitre que dans ce cas " E est de **dimension finie**".

Test 566

Que peut-on dire du degré d'un polynôme engendré par une famille finie de polynômes ?
En déduire que $\mathbb{R}[X]$ n'est pas à générateur fini.

Un outil : Si E est à générateur fini, alors, de toute famille génératrice de E on peut extraire une sous-famille génératrice finie.

Th. $\triangleright$ **Théorème de la base incomplète.**

Si E est à générateur fini, alors, toute famille libre de E peut se compléter pour former une base de E .

Plus précisément : on peut compléter $\mathcal{L}$ en utilisant des vecteurs d'une famille $\mathcal{G}$ génératrice de E .

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{L} \text{ libre} \\ \mathcal{G} \text{ engendre } E \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \mathcal{B} \text{ base de } E, \quad \mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$$

Test 567

Appliquer le théorème de la base incomplète dans $\mathbb{R}^3$ avec

$$\mathcal{L} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0)\} \quad \text{et} \quad \mathcal{G} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Le choix du vecteur pris dans $\mathcal{G}$ est-il important ou indifférent ?

Conséquences :

tout espace non nul à générateur fini admet une base.

(base de cardinal fini)

Th. $\triangleright$ **Théorème de la base extraite**

Si $E \neq \{0\}$ à générateur fini :

toute famille génératrice de E peut être réduite pour former une base de E
(base de cardinal fini)



Test 568

Dans $\mathbb{R}^3$: $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (1, 0, 1)$, $e_3 = (0, 1, 1)$, $e_4 = (1, 1, 1)$.
 Réduire la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) pour obtenir une base $\mathbb{R}^3$.
 La réponse est-elle unique ?

21.1.2 Dimension d'un espace vectoriel



Th. ▷ **Cardinal d'une famille génératrice**

Toute famille de (strictement) plus de n vecteurs
engendrés par une famille de n vecteurs est liée.

$$v_1, v_2, \dots, v_{n+1} \in \text{Vect} \left(u_1, u_2, \dots, u_n \right) \Rightarrow \left(v_1, v_2, \dots, v_{n+1} \right) \text{ liée}$$

*Il s'agit d'une famille quelconque,
pas obligatoirement d'une sur-famille.*

Test 569

a et b sont deux vecteurs de E . On pose $u = 2a + 3b$, $v = 3a - b$, $w = -a + 5b$.
Que peut-on dire de la famille (u, v, w) ?

Th. ▷ **Dimension d'un espace vectoriel**

Si l'espace vectoriel non nul E est à générateur fini, alors
toutes les bases de E sont finies et ont le même cardinal.

Ce cardinal noté $\dim E$ est la **dimension** de E .
 E est alors de **dimension finie**.

Dans le cas contraire, E est de **dimension infinie**.

Cas particuliers :

- Par convention : $\dim \{0\} = 0$
- Une **droite vectorielle** est un espace vectoriel de dimension 1.
- Un **plan vectoriel** est un espace de dimension 2.



Attention : la dimension du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E dépend du corps $\mathbb{K}$.

Test 570

Déterminer la dimension de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, puis en tant que $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

21.1.3 Ce qu'il faut impérativement savoir

E est de dimension n si et seulement si il existe une base de n vecteurs.

Alors :

- toutes les bases comportent exactement n vecteurs
- toute famille de plus de n vecteurs est liée
- toute famille génératrice de E comporte au moins n vecteurs
- toute famille libre de n vecteurs est une base de E
- toute famille génératrice de n vecteurs est une base de E
- toute famille libre peut (si nécessaire) se compléter en une base de E
- toute famille génératrice peut (si nécessaire) se réduire en une base de E

Test 571

Montrer que $P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0 \right\}$ est un plan vectoriel.
 Trouver une base de P dont le premier vecteur est $(1, 1, 1)$.

21.1.4 Exemples classiques

- $\mathbb{K}^n$ est de dimension n avec sa base canonique de n vecteurs :

$$((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$$

- $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n + 1$ avec sa base canonique : $(1, X, X^2, \dots, X^n)$
- Les solutions de $y' + a(x)y = 0$, où a est continue sont les fonctions

$$y : x \mapsto \lambda e^{\int -a(x) dx} = \lambda e^{-A(x)} \text{ où } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } A \text{ est une primitive de } a$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $S = \text{Vect}\{x \mapsto e^{-A(x)}\}$ c'est donc la droite vectorielle (donc de dimension 1) engendrée par la fonction $x \mapsto e^{-A(x)}$

- Soit $(E) : ay'' + by' + cy = 0$ une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2.

Grand classique :

Test 572

On considère $n + 1$ polynômes P_k de $\mathbb{K}_n[X]$ de degré k pour k variant de 0 à n .
Montrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$

21.1.5 Isomorphisme avec $\mathbb{K}^n$

Th. $\triangleright$ **Espaces isomorphes**

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, E de dimension finie n .

F est isomorphe à E ssi F est de dimension finie n

Cas particulier :

comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}^n$ est de dimension n , nous avons :

E est de dimension n ssi E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$

21.1.6 Dimension d'un SEV, d'un produit

Th. $\triangleright$ **Dimension d'un sous-espace vectoriel**

Si E est de dimension finie n , et F un sous-espace vectoriel de E , alors :

- F est de dimension finie p avec $p \leq n$
- $E = F$ ssi $n = p$

Attention : cette dernière propriété n'est pas valable en dimension infinie.

Test 573

Montrer que l'intersection de deux plans vectoriels distincts n'est pas un plan vectoriel.
Est-ce forcément une droite vectorielle ?

Test 574

Soit (e_1, e_2, e_3) libre et (e_1, e_2, e_3, u) lié.
Montrer $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, u)$ en utilisant la notion de dimension.

Th. $\triangleright$ **Dimension d'un espace produit**

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies,
alors $E \times F$ est de dimension finie.

De plus $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$.

Ce résultat se généralise à un produit de p espaces vectoriels :

Th. $\triangleright$ **Produit de p Espaces Vectoriels**

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère p $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels $E_1, \dots, E_p$ de dimensions finies. Alors le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est de dimension finie : $\dim E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p = \dim E_1 + \dots + \dim E_p$.

Corollaire : Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, alors pour tout entier naturel p non nul, le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E^p est de dimension finie : $\dim E^p = p \dim E$.

Exemple : on retrouve $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.

21.1.7 Dimension d'une somme

Th. ▷ **Formule de Grassmann**¹

Si A et B sont deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies, alors,

$A + B$ est de dimension finie et

$$\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$$

Note : la dimension de deux sous-espaces supplémentaires en est un cas particulier.

Test 575

P_1 et P_2 sont deux plans vectoriels distincts de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que $P_1 + P_2$ n'est pas un plan.

En déduire que $P_1 + P_2 = \mathbb{R}^3$, puis la nature de $P_1 \cap P_2$.

Corollaire :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

Alors $\dim(E_1 + E_2) \leq \dim E_1 + \dim E_2$ avec égalité si et seulement si E_1 et E_2 sont en somme directe.

21.1.8 Somme et espaces supplémentaires

Si E est de dimension finie, alors :

- Tout sous-espace F de E admet (au moins) un supplémentaire dans E
- On obtient un des supplémentaires de F en complétant une base de F
- Si $E = F \oplus G$, alors, $\dim E = \dim F + \dim G$

Th. ▷ **Autre caractérisation d'espaces supplémentaires**

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Les sous-espaces A et B sont supplémentaires dans E ssi deux des trois conditions suivantes sont vérifiées :

- $A + B = E$
- $A \cap B = \{O_E\}$
- $\dim(A) + \dim(B) = \dim(E)$

Test 576

Vérifier séparément les trois points du théorème précédent avec

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0 \right\} \quad \text{et}$$

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 2z \right\}$$

Test 577

E est de dimension n . F est sous-espace vectoriel de dimension m ($m \leq n$). Peut-on dire que tout sous-espace de dimension $n - m$ est supplémentaire de F ? (Illustrer votre réponse)

1. Hermann Günther GRASSMANN (1809-1877). Il fut le premier à imaginer les notions fondamentales d'algèbre linéaire. Trop confus, ses travaux furent repris par PEANO vers 1888.

Test 578

$E = A \oplus B$. $(e_1, \dots, e_k)$ est une base de A complétée en $(e_1, \dots, e_k, \dots, e_n)$ base de E . Peut-on dire que $(e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une base de B ?

Test 579

Construire un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ du plan $x - y - 3z = 0$.

21.1.9 Rang d'une famille de vecteurs

Le rang de la famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E

est la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille.

Notation : $\boxed{\text{rg } \mathcal{F}} = \dim \text{Vect } \mathcal{F}$

Test 580

Déterminer le rang de :

• $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans $\mathbb{R}^2$ avec $\vec{u} = (-1, 2)$, $\vec{v} = (3, 1)$ et $\vec{w} = (1, 5)$

• $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t})$ dans $\mathbb{R}^3$ avec $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$, $\vec{w} = w(0, 1, -1)$ et $\vec{t} = (1, -4, 5)$

21.2 Applications linéaires et dimensions

21.2.1 Rappels

$f \in \mathcal{L}(E, F)$ est caractérisée par l'image d'une base de E .

Si E et F sont de dimensions finies,

de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$ [voir²]

en notant $f(e_i) = \sum_{k=1}^m a_{k,i} f_k$

l'expression analytique de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est :

$$\begin{cases} x'_1 = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n \\ x'_2 = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n \\ \dots\dots\dots \\ x'_m = a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}}_{= \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Réciproquement : toute expression de cette forme montre que f est linéaire.

Test 581

Former la matrice de la dérivation $D : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ en utilisant la base :

-1- canonique $(1, X, X^2, X^3)$

-2- $\left(1, 1 + \frac{X}{1!}, 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!}, 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!}\right)$

-3- $\left(1, 1 + X, 1 + X + X^2, 1 + X + X^2 + X^3\right)$

Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est noté $\boxed{E^*}$

... c'est l'espace dual de E .

2. Dans le cas $E = F$, il est possible (mais pas obligatoire) d'utiliser la même base dans l'ensemble de départ et d'arrivée. La matrice de f est alors désignée par $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$

Test 582

Soit φ une forme linéaire sur E .
Montrer que si φ n'est pas nulle, alors φ est surjective.

Expression analytique d'une forme linéaire : $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur E ssi son expression analytique relativement à la base $\mathcal{B}$ de E est

$$\varphi(u) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

Test 583

Justifier que φ définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $\varphi(P) = \int_0^1 P(t) dt$ est une forme linéaire.
En donner l'expression analytique dans la base canonique.

21.2.2 Rang d'une application linéaireLe rang de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est la dimension de $\text{Im}(f)$ (lorsqu'elle est finie).Notation : $\boxed{\text{rg}(f)} = \dim(\text{Im } f)$ **Propriétés :**

- Si E est de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E , alors :
 - $\text{rg}(f) = \text{rg}\left(f(\mathcal{B})\right)$ (le rang de f est le rang de l'image de la base)
 - $\text{rg}(f) \leq \dim(E)$
- Si F est de dimension finie $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$

Th. ▷ Théorème (et formule) du rangSoit $f \in \mathcal{L}(E, F)$:tout supplémentaire dans E de $\text{Ker}(f)$ est isomorphe à $\text{Im}(f)$

$$E = \text{Ker}(f) \oplus A \Rightarrow A \text{ isomorphe à } \text{Im}(f)$$

*Cas particulier :***Formule du rang :**Si E est de dimension finie³, alors

$$\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker } f)$$

Test 584

E est de dimension 3.
Peut-on trouver un endomorphisme f tel que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$?

21.2.3 Rang et isomorphismes**Th. ▷ Invariance du rang par isomorphisme**Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorphisme :

- **dimension d'un sous-espace vectoriel**

$$\forall A \text{ SEV } E : \dim(A) = \dim\left(f(A)\right)$$

- **rang d'une famille de vecteurs**

$$\text{Pour toute famille } \mathcal{F} \text{ de vecteurs de } E : \text{rg}(\mathcal{F}) = \text{rg}\left(f(\mathcal{F})\right)$$

- **rang d'une application linéaire**

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(H, E) : \text{rg}(\varphi) = \text{rg}(f \circ \varphi)$$

$$\forall \psi \in \mathcal{L}(F, G) : \text{rg}(\psi) = \text{rg}(\psi \circ f)$$

3. Il est fortement conseillé de consulter l'exercice "Complément à la formule du rang" page 597

Th. ▷ Caractérisation des isomorphismes

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de même dimension finie, alors, il y a équivalence entre :

- i) f est injective
- ii) f est surjective
- iii) f est bijective
- iv) $\text{rg}(f) = \dim(E)$
- v) f est inversible à droite
- vi) f est inversible à gauche

**Test 585**

La dérivation est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Est-elle injective ? surjective ? Ceci est-il en contradiction avec le théorème précédent ?

Test 586

Vérifier la formule du rang avec $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par
 $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z, x + y + z)$

Test 587

Soit f un endomorphisme de E , avec E de dimension finie. Pourquoi la formule du rang ne prouve-t-elle pas que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$?

21.2.4 Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ **Th.** ▷ Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies. Alors le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et on a :

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim(E) \times \dim(F)$$

21.2.5 Recollement linéaire d'applications linéaires**Th.** ▷ Recollement linéaire d'applications linéaires

Si $E_1, \dots, E_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ et si

$u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ pour tout i , alors il existe une et une seule application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u|_{E_i} = u_i$ pour tout i .

21.3 Hyperplans

21.3.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

Un **hyperplan** de E est un **SEV** de E de dimension $n - 1$.

Th. ▷ **Caractérisation d'un hyperplan**

H **SEV** de E est un hyperplan de E ssi
il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$.

Plus précisément :

Si H est un hyperplan de E , pour toute droite vectorielle D
 $E = H \oplus D \Leftrightarrow D \not\subset H$

Généralisation de la définition d'hyperplan :

Si E est de dimension quelconque :

un **hyperplan** de E est un **SEV** supplémentaire d'une droite vectorielle.

Remarque

En sup, on peut montrer qu'un SEV admet un supplémentaire s'il est SEV d'un espace de dimension finie à l'aide du théorème de la base incomplète. Pour le démontrer en dimension infinie, cela nécessite l'axiome du choix ou le lemme de Zorn.

Test 588

Soit E de dimension finie n . H et H' sont deux hyperplans distincts de E . Montrer que $\dim(H \cap H') = n - 2$.

Test 589

Justifier que $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$.

21.3.2 Hyperplans et formes linéaires

Th. ▷ **Noyau d'une forme linéaire**

E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Si φ est une forme linéaire non nulle, alors

$\text{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E

Test 590

Montrer que les **SEV** suivants sont des hyperplans :

- $H = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$
- $K = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P'(2) = 0\}$ (avec $n \geq 1$)

Th. ▷ **Formes linéaires de même noyau**

Pour tout hyperplan H de E :

- il existe des formes linéaires $\varphi \in E^*$ telles que $\text{Ker}(\varphi) = H$
- de plus, toutes ces formes linéaires sont proportionnelles

21.3.3 Équations d'hyperplans (en dimension finie)

Le théorème précédent montre que :

- Un sous-espace vectoriel de E est un hyperplan si et seulement si son équation cartésienne est de la forme

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0, \quad (a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$$

- Deux équations cartésiennes représentent le même hyperplan ssi elles sont proportionnelles.

Test 591

Soit f une forme linéaire de $\mathbb{R}^2$ telle que $f(1, 1) = 0$ et $f(1, 2) = 1$.
Donner une équation de son noyau.

Test 592

$\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1)\}$ est une base de l'hyperplan H de $\mathbb{R}^4$. En trouver une équation en procédant
(1) par identification (2) par combinaisons linéaires.

21.3.4 Intersection de m hyperplans

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

- Soient $H_1, \dots, H_m$ des hyperplans de E , alors :

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^m H_i \right) \geq \dim E - m$$

- Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - m$, alors il existe m hyperplans $H_1, \dots, H_m$ de E tels que $F = \bigcap_{i=1}^m H_i$.

21.4 Exercices

Espaces de dimension finie

Exercice 1

Bases et familles maximales :

Dans un espace vectoriel E :

- Montrer qu'une famille libre maximale (c'est-à-dire que toute sur-famille stricte n'est plus libre) est une base de E .
- Montrer qu'une famille génératrice minimale (c'est-à-dire que toute sous-famille stricte n'est plus génératrice) est une base de E .

Exercice 2

Construction de bases pour traiter les dimensions :⁴

$f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ où E, F, G sont trois $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimensions finies.

Montrer : $\dim \text{Ker}(g \circ f) \leq \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Ker}(g)$.

Exercice 3

Utilisation d'une restriction pour traiter les dimensions :

Reprenre l'exercice précédent en utilisant $\bar{g}$, restriction de g à $\text{Im}(f)$.

Exercice 4

E est de dimension finie. F et G sont deux sous-espaces vectoriels de même dimension. Montrer l'existence d'un supplémentaire commun à F et à G .

Exercice 5

Complément à la formule du rang : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$:

Montrer que si $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont de dimensions finies, alors E est de dimension finie.

Exercice 6

Hyperplans en dimension infinie :

Montrer que $H = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0 \right\}$ est un hyperplan de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (on remarquera que, pour toute fonction f on peut trouver une fonction constante k telle que $f - k \in H$)

Exercice 7

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs suivants :

$$\vec{u} = (1, 0, 1, 0), \vec{v} = (0, 1, -1, 0), \vec{w} = (1, 1, 1, 1), \vec{x} = (0, 0, 1, 0), \vec{y} = (1, 1, 0, -1)$$

Puis on pose $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et $G = \text{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$.

Déterminer les dimensions de F , G , $F + G$ et $F \cap G$.

Applications linéaires en dimension finie

Exercice 8

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E . On considère l'endomorphisme de E défini par

$$s(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3, \quad s(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \quad s(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

4. On considère une base du plus petit **sev** qu'on complète en base des espaces le contenant.

1. Soit $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Exprimer $s(\vec{u})$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(s + 3\text{Id}_E)$, puis une base de $\text{Ker}(s - 2\text{Id}_E)$.
3. Montrer que $E = \text{Ker}(s + 3\text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s - 2\text{Id}_E)$.
4. Montrer que $s^2 + s - 6\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
5. En déduire que s est bijective et déterminer s^{-1} .

Exercice 9

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $\text{Im } f = \text{Ker } f$ si, et seulement si, $f \circ f = 0$ et il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $h \circ f + f \circ h = \text{Id}_E$.

Exercice 10

On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Pour chaque endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ défini ci-dessous par l'image des coordonnées d'une base, donner une expression explicite de $u(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $u(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $u(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 + 3\vec{e}_1$.
2. $u(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \vec{e}_1$, $u(\vec{e}_2 - 2\vec{e}_1) = 3\vec{e}_1$.
3. $u(5\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2) = \vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$, $u(4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) = \vec{e}_2 - \vec{e}_1$.

Exercice 11

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nulle, tel que $f^3 + f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f^2 + \text{Id})$, et en déduire que $\dim(\text{Ker } f^2 + \text{Id}) \geq 1$.
2. Soit $\vec{x} \in \text{Ker}(f^2 + \text{Id}) \setminus \{\vec{0}\}$. Montrer que $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est libre.

Exercice 12

Soient E et F deux K -espace vectoriels de dimension finie, et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Vérifier que $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
2. Montrer que $|\text{rg } f - \text{rg } g| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg } f + \text{rg } g$.
3. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

$$(i) \quad \text{rg}(f + g) = \text{rg } f + \text{rg } g$$

$$(ii) \quad \text{Im } f + \text{Im } g = \text{Im}(f + g) \quad \text{et} \quad \text{Im } f \cap \text{Im } g = \{0_F\}$$

$$(iii) \quad \text{Ker } f + \text{Ker } g = E \quad \text{et} \quad \text{Ker } f \cap \text{Ker } g = \text{Ker}(f + g)$$

Exercice 13

Endomorphismes nilpotents Soit E un K -espace vectoriel non réduit à $\{0\}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p , c'est-à-dire que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)} \neq u^{p-1}$.

1. u est-il bijectif?
2. Montrer que $\text{Id}_E - u$ est bijectif, et en préciser l'inverse.
3. Montrer que $\{0_E\} \subsetneq \text{Ker } u \subsetneq \text{Ker}(u^2) \subsetneq \dots \subsetneq \text{Ker}(u^p) = E$.
4. Soit $\vec{x} \in E$ tel que $u^{p-1}(\vec{x}) \neq 0_E$. Montrer que la famille $(\vec{x}, u(\vec{x}), u^2(\vec{x}), \dots, u^{p-1}(\vec{x}))$ est libre. En déduire que si E est de dimension finie n , alors $p \leq n$.
5. On suppose que $n = \dim E = p$. Déterminer le rang de u .

21.5 Exercices Complémentaires

Exercice 1

On se place ici dans le $\mathbb{R}$ -ev $E = \mathbb{R}^4$.

Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z + t = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z + t = 0 \text{ et } 2x - t = 0\}$.

1. Préciser des bases des sev de $\mathbb{R}^4$ F et G .
2. Déterminer les ensembles $F + G$ et $F \cap G$.

Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f(x, y, z) = (x, y + z, y + z)$.

Prouver que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$, $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$, puis que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ sa base canonique. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par : pour $1 \leq i \leq n - 1$, $f(\vec{e}_i) = \vec{e}_n$ et $f(\vec{e}_n) = \sum_{k=1}^n \vec{e}_k$. Calculer $\text{rg}(f)$, $\text{Im}(f)$ puis $\text{Ker}(f)$.

Exercice 4

Soit E , un ev de dimension 4, et f un endomorphisme de E tel que $f^3 \neq 0$ et $f^4 = 0$. On dit que f est un endomorphisme *nilpotent* d'ordre 4. Soit $\vec{x}_0$ tel que $f^3(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$.

1. Montrer que $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0), f^2(\vec{x}_0), f^3(\vec{x}_0))$ est une base de E .
2. Montrer que $\text{rg}(f) = 3$.

Exercice 5

Soit E, F, G et H quatre $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies.

On considère des applications linéaires $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $h \in \mathcal{L}(G, H)$.

1. On suppose ici que f est surjective : que peut-on en déduire concernant les dimensions des espaces E et F ? Montrer ensuite l'égalité des rangs : $\text{rg}(g) = \text{rg}(g \circ f)$.
2. On suppose ici que h est injective : que peut-on en déduire concernant les dimensions des espaces F et G ? Montrer ensuite l'égalité des rangs : $\text{rg}(g) = \text{rg}(h \circ g)$.
3. On suppose ici que f et h sont des isomorphismes : que peut-on en déduire concernant les dimensions des espaces E, F et G ? Montrer ensuite l'égalité des rangs : $\text{rg}(g) = \text{rg}(h \circ g) = \text{rg}(g \circ f)$.

Exercice 6

Soit $N_0 = 1$, $N_1 = \frac{X}{2}$, $N_2 = \frac{(X-1)(X+1)}{4}$ et $N_3 = \frac{X(X-1)(X+1)}{6}$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (N_0, N_1, N_2, N_3)$ est une base de $E = \mathbb{R}_3[X]$.
2. On pose : $f(P) = P(X+1) - P(X-1) = P \circ (X+1) - P \circ (X-1)$.
Calculer $f(N_i)$ pour $i = 0 \dots 3$ et résoudre $f(P) = aX^2 + bX + c$.

Exercice 7

Faisceau d'hyperplans.

E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts d'équations cartésiennes respectives $\varphi_1(x, y, z) = 0$ et $\varphi_2(x, y, z) = 0$.

On note $\Delta = H_1 \cap H_2$.

1. Justifier que $\dim \Delta = n - 2$.

2. Justifier que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi_1(x, y, z) + \lambda \varphi_2(x, y, z) = 0$ est l'équation d'un hyperplan H_λ , et que $\Delta \subset H_\lambda$.

$(H_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est un **faisceau d'hyperplans**.

3. Réciproquement, tout hyperplan contenant Δ est-il un hyperplan du faisceau ?
4. *Application* : dans $\mathbb{R}^3$, trouver une équation cartésienne de plan contenant le vecteur $\vec{j}$ et la droite $D : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$.

Exercice 8

Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{]-1,1[}$ engendré par les quatre fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad f_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad f_3 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f_4 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 9

Soient E, F et G trois K -espace vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

- Vérifier que $\text{Ker}(g|_{\text{Im } f}) = \text{Ker } g \cap \text{Im } f$ et $\text{Im}(g|_{\text{Im } f}) = \text{Im}(g \circ f)$.
- En déduire $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } f - \dim(\text{Ker } g \cap \text{Im } f)$.
- Montrer que $\text{rg } g + \text{rg } f - \dim F \leq \text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg } g, \text{rg } f)$.

Exercice 10

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et D la dérivation usuelle de E de E .

Existe-t-il $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $T \circ T = D$ (on travaillera avec les noyaux éventuels, pour obtenir une contradiction) ?

Exercice 11

Applications linéaires de rang 1 et formes linéaires

- Soit E un K -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{u} \in E$ et une forme linéaire $\phi \in E^* := \mathcal{L}(E, K)$ tels que $f(\vec{x}) = \phi(\vec{x}) \vec{u}$ pour tout $\vec{x} \in E$. Le couple $(\vec{u}, \phi)$ est-il unique ?
- On suppose que E est de dimension 3, et soit $f \in \mathcal{L}(E) \setminus \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$ telle que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que f est de rang 1.

Exercice 12

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que

$$\forall \vec{x} \in E, \quad \exists p_x \in \mathbb{N}^*, \quad u^{p_x}(\vec{x}) = \vec{x}$$

Montrer que $\exists p \in \mathbb{N}^*, \quad u^p = \text{Id}_E$.

