

Chapitre 18

Fractions rationnelles

18.1 Les fractions rationnelles

18.1.1 Le corps des fractions rationnelles

L'anneau $\mathbb{K}[X]$ étant intègre, on démontre qu'il est possible de définir son

corps des fractions, noté $\mathbb{K}(X)$ qui vérifie :

- $\mathbb{K}[X]$ est un sous-anneau de $\mathbb{K}(X)$
- tout élément $F \in \mathbb{K}(X)$ s'écrit sous la forme

$$F = \frac{P}{Q}, \quad P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad Q \neq 0$$

Un tel couple (P, Q) est un représentant de la fraction rationnelle F .

Ce représentant n'est pas unique.

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1} \Leftrightarrow P Q_1 = P_1 Q$$

- pour tout élément $P \in \mathbb{K}[X]$ nous avons $P = \frac{P}{1}$
- Les opérations de $\mathbb{K}(X)$ sont définies par

$$\frac{P}{Q} + \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P Q_1 + P_1 Q}{Q Q_1} \quad \frac{P}{Q} \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P P_1}{Q Q_1}$$

(Le résultat obtenu est indépendant des représentants choisis)

- Si $F = \frac{P}{Q} \neq 0$, alors $F^{-1} = \frac{Q}{P}$

Test 495

A-t-on $\frac{2X^3 - 7X^2 + 9}{X^2 + 4X + 3} = \frac{2X^2 - 9X + 9}{X + 3}$?

Test 496

Quelles sont les fractions rationnelles $\frac{A}{B}$ qui sont égales à un polynôme ?

Application : trouver $a, b \in \mathbb{R}$ pour que $F = \frac{X^2 + aX + b}{X + b} \in \mathbb{R}[X]$.

Test 497

Si $F = \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ et $B + D \neq 0$, montrer qu'alors $F = \frac{A + C}{B + D}$.

Comment peut-on, sans calculs, montrer que $F = \frac{A - C}{B - D}$,
puis que $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, F = \frac{PA + QC}{PB + QD}$?

La dérivée¹ de $F = \frac{P}{Q}$ est la fraction $F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$

Voir l'exercice "Dérivée d'une fraction" page 514.

1. Pour information (cette notion n'est pas explicitement au programme.)

18.1.2 Degré d'une fraction rationnelle

Le degré de la fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$
est la quantité $\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$.

Notes :

- Cette définition est légitime
puisque $\deg(F)$ est indépendant du représentant (P, Q) .
- Un polynôme a le même degré
en tant que polynôme
et en tant que fraction rationnelle

Test 498

Que pensez-vous de l'affirmation
"une fraction de degré 0 est un polynôme constant non nul"

Test 499

Soit $F \neq 0 \in \mathbb{K}(X)$. Quel est le degré de $\frac{1}{F}$?

Opérations et degré : $\forall F_1, F_2 \in \mathbb{K}(X)$

- $\deg(F_1 + F_2) \leq \max(\deg(F_1), \deg(F_2))$ (égalité si $\deg(F_1) \neq \deg(F_2)$)
- $\lambda \in \mathbb{K}^*, \deg(\lambda F_1) = \deg(F_1)$
- $\deg(F_1 F_2) = \deg(F_1) + \deg(F_2)$

Test 500

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $F \in \mathbb{R}(X)$ avec $F = \frac{aX^4 - 4X^2 + X + 2}{X^2 - X - 2}$. Quel est le degré de $X^2 + X + 1 + F$?

Test 501

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et $F \in \mathbb{K}(X)$ de degré $d \in \mathbb{Z}$.
Peut-on déterminer le degré de la substitution $P(F)$?
Que peut-on en déduire sur le degré de la substitution $G(F)$ (où G est une fraction) ?



Voir l'exercice "Degré d'une composée" page 514.

18.1.3 Représentants irréductibles

Un représentant irréductible de $F \in \mathbb{K}(X)$ est un couple (P, Q) , tel que les deux polynômes P et Q soient premiers entre eux et vérifient $F = \frac{P}{Q}$.

Si Q est normalisé, (P, Q) est alors un représentant irréductible unitaire.

Existence des représentants irréductibles :

- Toute fraction rationnelle $F \in \mathbb{K}(X)$ admet des représentants irréductibles.
- Si $F = \frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1}$ sont deux représentants irréductibles, alors
$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, P_1 = \lambda P \text{ et } Q_1 = \lambda Q$$
- Toute fraction rationnelle admet un unique représentant irréductible unitaire.



Test 502

Donner un représentant irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ de

$$\frac{X^2 - 1}{X^2 + X} \quad \frac{X^3 - 1}{X^3 + X} \quad \frac{X^4 + X^2 + 1}{X^2 + X + 1}$$

Test 503

A-t-on $\frac{3X^3 - 27X^2 + 13X - 12}{5X^2 - 18X + 9} = \frac{8X^4 + 5X^3 + 25X^2 - 5X + 12}{5X^3 + 2X^2 + 12X - 9}$

18.1.4 Zéros, pôles et fonction rationnelle

Les définitions qui suivent sont légitimes car elles sont indépendantes du représentant irréductible.

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ est une fraction rationnelle donnée sous forme irréductible :

- $a \in \mathbb{K}$ est un zéro d'ordre k de F ssi a est un zéro d'ordre k de P
- $a \in \mathbb{K}$ est un pôle d'ordre k de F ssi a est un zéro d'ordre k de Q
- La fonction rationnelle associée à F est la fonction $t \mapsto \frac{\tilde{P}(t)}{\tilde{Q}(t)}$
(Cette fonction est définie sur $\mathbb{K}$ privé de l'ensemble de ses pôles)

Test 504 Quels sont les zéros et les pôles réels de $\frac{2X^4 + 5X^3 + X^2 - 5X - 3}{X^4 - X^3 - X^2 + X}$
(on précisera leur ordre de multiplicité)

Test 505 Si a est un pôle commun aux deux fractions rationnelles F et G , est-il un pôle de $F + G$?
Même question en remplaçant "pôle" par "zéro".

18.2 Étude locale d'une fraction rationnelle

18.2.1 Elements simples

Les éléments simples de $\mathbb{K}(X)$ sont

- les monômes de $\mathbb{K}[X]$
- Les fractions de $\mathbb{K}(X)$ de la forme $\frac{N}{D^k}$ $\left\{ \begin{array}{l} k \in \mathbb{N}^* \\ D \text{ irréductible} \\ N \neq 0 \\ \deg(N) < \deg(D) \end{array} \right.$

Ce qui suit est destiné à montrer que toute fraction se met (de manière unique à l'ordre près), sous forme d'une somme d'éléments simples.

Pour décomposer $F = \frac{P}{Q}$ (donnée sous forme irréductible) :

- Pour séparer les monômes des fractions de degré négatif, on commence par mettre F sous la forme $F = E + \frac{P_0}{Q}$ (E polynôme et $\deg(\frac{P_0}{Q}) < 0$) 18.2.2

- On utilise la décomposition primaire $Q = \prod_{i=1}^n Q_i^{\alpha_i}$ (Q_i irréductible), 18.2.3

pour transformer $\frac{P_0}{Q}$ en $\frac{P_0}{Q} = \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{Q_i^{\alpha_i}}$ (où $\deg \frac{P_i}{Q_i^{\alpha_i}} < 0$)

- Chaque terme $\frac{P_i}{Q_i^{\alpha_i}}$ est une somme d'éléments simples $\frac{P_i}{Q_i^{\alpha_i}} = \sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{A_k}{Q_i^k}$. 18.2.4

Note : Les trois paragraphes 18.2.2, 18.2.3 et 18.2.4 suivants ne supposent pas que les polynômes Q_i sont irréductibles.

18.2.2 Partie entière

Toute fraction rationnelle s'écrit de manière unique comme somme d'un polynôme et d'une fraction de degré strictement négatif²

$$\forall F \in \mathbb{K}(X), \exists! (E, F_1) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X), \begin{cases} F = E + F_1 \\ \deg(F_1) < 0 \end{cases}$$

E est la partie entière de F

F_1 en est la partie fractionnaire.



Note : si $E \neq 0$ alors $\deg(E) = \deg(F)$

Test 506

Soit la division euclidienne de A par B : $A = BQ + R$. Peut-on en déduire les parties entières des fractions suivantes : $\frac{A}{B}$? $\frac{B}{A}$? $\frac{A}{Q}$? $\frac{R}{B}$?

Test 507

E_1 et E_2 sont les parties entières des fractions F_1 et F_2 .
Peut-on en déduire les parties entières de $F_1 + F_2$? $F_1 - F_2$? $F_1 F_2$?

Test 508

Calculer la partie entière de $\frac{2X^4 + 9X^3 + 16X^2 + 12X + 7}{(X+2)(X^2 + X + 1)}$.
Pouvait-on en prévoir le degré ?

18.2.3 Décomposition de $P/Q_1 Q_2 \cdots Q_n$

Un premier outil :

Si $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ sont premiers entre eux deux à deux, alors

$$F = \frac{P}{Q_1 Q_2 \cdots Q_n} \text{ se décompose en } F = \frac{P_1}{Q_1} + \cdots + \frac{P_n}{Q_n}$$

Conséquence : si $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ sont premiers entre eux deux à deux

toute fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q_1 Q_2 \cdots Q_n}$ se décompose de manière unique en



$$\frac{P}{Q_1 Q_2 \cdots Q_n} = E + \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{Q_i} \quad E \in \mathbb{K}[X] \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \deg(P_i) < \deg(Q_i)$$

Remarque : E est la partie entière de la fraction

Test 509

La décomposition $F = \frac{1}{X^2 + 1} + \frac{X}{X^2 - 1}$ est-elle du type ci-dessus ?
En déduire une décomposition de $G = \frac{X^4 + X^3 + X^2 - X}{(X^2 + 1)(X^2 - 1)}$.
Peut-on obtenir une autre décomposition de F de ce type ?

Test 510

Décomposer $F = \frac{2}{(X-1)(X+1)}$. En déduire une décomposition de
 $G = \frac{2X}{(X-1)(X+1)}$ et $H = \frac{4}{(X^2 - 1)^2}$

2. C'est l'équivalent pour les polynômes de l'écriture classique : $3 + \frac{1}{4} \quad (3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4})$.

18.2.4 Décomposition de P/Q^d (de degré négatif)

Si Q est un polynôme non constant, toute fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q^d}$ ($d \in \mathbb{N}^*$) se décompose,

de manière unique en
$$\frac{P}{Q^d} = E + \frac{A_1}{Q^1} + \cdots + \frac{A_d}{Q^d} = E + \sum_{i=1}^d \frac{A_i}{Q^i}$$
 où $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $\deg(A_i) < \deg(Q)$

Test 511

Trouver la décomposition de $\frac{X^4 + 4X + 6}{(X+1)^3}$.
(On utilisera plusieurs divisions euclidiennes)

18.2.5 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Aucune connaissance spécifique sur la décomposition en éléments simples sur un corps autre que $\mathbb{C}$ n'est exigible des étudiants. Les démonstrations ne sont pas exigibles.

Th. $\triangleright$ Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$

si $\frac{P}{Q}$ est un représentant irréductible normalisé de $F \in \mathbb{C}(X)$

et si la décomposition primaire de Q est $Q = \prod_{i=1}^n (X - a_i)^{d_i}$,

(les $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des complexes distincts deux à deux)

alors F s'écrit, de manière unique ^a

$$F = E + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{d_i} \frac{\alpha_{i,k}}{(X - a_i)^k}$$

$$E \in \mathbb{K}[X], \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, d_i \rrbracket, \alpha_{i,k} \in \mathbb{C}$$

^a. Unique à l'ordre près.

$\sum_{k=1}^{d_i} \frac{\alpha_{i,k}}{(X - a_i)^k}$ est la partie polaire de F relative au pôle a_i .

18.2.6 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ **Th.** $\triangleright$ Décomposition dans $\mathbb{R}(X)$

si $\frac{P}{Q}$ est un représentant irréductible normalisé de $F \in \mathbb{R}(X)$

et si la décomposition primaire de Q est $Q = \prod_{i=1}^n (X - a_i)^{d_i} \prod_{j=1}^m (X^2 + b_j X + c_j)^{e_j}$,

(où les $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont les racines réelles distinctes deux à deux de Q , d'ordre de multiplicité respectifs $d_1, \dots, d_n$ et $X^2 + b_1 X + c_1, \dots, X^2 + b_m X + c_m$ sont des polynômes deux à deux distincts sans racine réelle, $e_1, \dots, e_m$ sont des entiers naturels non nuls)

alors F s'écrit, de manière unique ^a

$$F = E + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{d_i} \frac{\alpha_{i,k}}{(X - a_i)^k} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{e_j} \frac{\beta_{j,k} X + \gamma_{j,k}}{(X^2 + b_j X + c_j)^k}$$

$$E \in \mathbb{R}[X], \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, d_i \rrbracket, \alpha_{i,k} \in \mathbb{R} \quad \forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, e_j \rrbracket, \beta_{j,k}, \gamma_{j,k} \in \mathbb{R}$$

^a. Unique à l'ordre près.

Test 512Quelle est la forme de la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ de

$$F = \frac{X^{10} + 7X^3 - 1}{2(X^3 - 1)^2}$$

$$G = \frac{(X^2 + 2)^5}{X(X+1)^2(X^2 + 1)^3}$$

$$H = \frac{1}{(X^3 - 1)^3}$$

$$I = \frac{1}{(X^5 - 1)^3}$$

(on ne demande pas d'effectuer les décompositions)

Test 513Donner la forme de la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$ des fractions F, G, H du test précédent. (toujours sans le calcul effectif)**Test 514** P_1 et P_2 sont deux polynômes normalisés irréductibles distincts.L'écriture $\frac{P_1}{P_2^2} + \frac{P_2}{P_1^2}$ est-elle une décomposition en éléments simples ?

18.3 Méthodes pratiques

18.3.1 Cas d'un pôle simple

Si a est un pôle simple de $F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{(X-a)Q_1}$ la partie polaire relativement au pôle a est $\frac{\alpha}{X-a}$ Pour obtenir la valeur de α :

- $\alpha = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$ s'obtient en multipliant F par $X-a$ puis en substituant a à X
- Comme $Q_1(a) = Q'(a)$, on a également $\alpha = \frac{P(a)}{Q'(a)}$.

Test 515Décomposer $\frac{1}{X(X+1)(X+2)}$ et $\frac{1}{X^n - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$.**Très classique (et important)****Test 516**Soit $P = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$ où les a_i sont deux à deux distincts.

- Décomposer $\frac{P'}{P}$ en utilisant les techniques précédentes.

Th. ▷ Cas particulier important :Si le polynôme scindé $P = \prod_{i=1}^n (X - a_i)^{d_i}$ admet n zéros distincts a_i d'ordres d_i alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{X - a_i}$$

18.3.2 Quelques astuces classiques

- Quand il ne reste qu'un ou deux coefficients inconnus, on peut substituer à X une ou deux valeurs (réelles ou complexes)

Test 517Dans $\mathbb{R}(X)$, décomposer $\frac{X}{(X^2 - 1)(X^2 + X + 1)}$ et $\frac{1}{X^2(1 + 2X + 3X^2)}$

- Ne pas hésiter à substituer une valeur complexe à X , même pour décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ (une telle substitution est équivalente à deux substitutions réelles).
(sans oublier que les coefficients cherchés sont réels)

Test 518

Dans $\mathbb{R}(X)$, décomposer $\frac{1}{(X-1)(X^2+1)}$

- Utiliser une limite en l'infini : après multiplication par une puissance convenable de X , la limite en l'infini donne une relation entre les coefficients.

Test 519

Confirmer (en partie) les résultats des deux tests précédents en utilisant cette technique.

- pour obtenir la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$, il est parfois plus simple de commencer par déterminer la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$.

(puis de regrouper les parties conjuguées)

Test 520

Dans $\mathbb{R}(X)$, décomposer $\frac{16}{X^4+4}$.
En déduire la décomposition de $\frac{16X}{X^4+4}$.

18.3.3 Utilisation des symétries

- Si F est paire

l'unicité de la décomposition permet d'identifier $F(X)$ et $F(-X)$.

- Si F est impaire

l'unicité de la décomposition permet d'identifier $F(X)$ et $-F(-X)$.

Test 521

Soit la décomposition

$$F = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-1} + \frac{cX+d}{X^2+X+1} + \frac{eX+f}{X^2-X+1} + \frac{g}{X^3} + \frac{h}{X^2} + \frac{i}{X}$$
 Que peut-on en déduire si F est paire ? si F est impaire ?

18.4 Calcul de primitives

Rappel

*Les primitives suivantes sont données sous réserve de définition...
Il ne faut pas apprendre ces résultats par cœur.*

Fraction du type inverse d'un polynôme de degré 1 :

- $\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C^{te}$

Rappel

Fraction du type inverse d'un polynôme de degré 2 :

- $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \text{Arctan } x + C^{te}$ (primitive connue)
- $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \text{Arctan } \frac{x}{a} + C^{te} \quad (a \neq 0)$ (on factorise par a et on change de variable)
- $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$ pour $\Delta < 0$: Arctan
(Cas précédent après décomposition canonique)
- $\int \frac{x + \beta}{ax^2 + bx + c} dx$ pour $\Delta < 0$: faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur puis isoler en 2 fractions, l'une donnant un logarithme et l'autre un Arctan
- $\int \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} dx = \int \frac{a}{(x - x_1)} + \frac{b}{(x - x_2)} dx$ puis 2 logarithmes
(a et b se déterminent par identification)
- $\int \frac{1}{(x - x_1)^2} dx = \frac{-1}{(x - x_1)} + C^{te}$

Test 522

Mettre $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ sous la forme d'une somme de deux fractions.

En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$.

Inspirez-vous de ce qui précède pour calculer $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

Test 523

Intégrer : $\int_0^1 \frac{6-x}{(x-3)(2x-5)} dx \quad \int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$

Test 524

Calculer

$$A = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} \quad B = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - x + 1)^2}$$

Comment pouvait-on déduire B à partir de A ?



18.5 Exercices

Exercice 1

Dérivée d'une fraction

- Montrer que la définition de la dérivée d'une fraction est légitime
(c'est à dire que le résultat est indépendant du représentant choisi.)
- Un polynôme a-t-il la même dérivée s'il est considéré comme une fraction ?
- A-t-on encore $\deg(F') = \deg(F) - 1$

Exercice 2

Degré d'une composée de fractions rationnelles

$P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme non nul, de degré n et de valuation m
 $F, G \in \mathbb{K}(X)$ sont deux fractions (F de degré non nul).

- Quel est le degré de la substitution $P(F)$?
- Montrer que le résultat précédent peut être faux si $\deg(F) = 0$.
- Quel est le degré de la substitution $G(F)$?

Exercice 3

Décomposer en éléments simples $\frac{1}{X^3(1-X)^3}$.

En déduire des polynômes U et V , de degré 2, tels que $UX^3 + V(1-X)^3 = 1$

Exercice 4

Un exercice qu'il ne faut pas négliger...

$P \in \mathbb{C}[X]$ est normalisé de degré n , ayant n racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

1. Décomposer $\frac{1}{P}$ et $\frac{P'}{P}$ en éléments simples.

2. Montrer que $\frac{P'(1/x)}{xP(1/x)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - \alpha_i x}$ et

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall i \in \left[1, n\right], \exists G_i \in \mathbb{C} \quad \frac{1}{1 - \alpha_i x} = 1 + \alpha_i x + \alpha_i^2 x^2 + \dots + \alpha_i^p x^p + x^{p+1} \frac{G_i}{1 - \alpha_i x}$$

En déduire une méthode de calcul de $S_p = \sum_{i=1}^n \alpha_i^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$).

3. On prend $P = x^3 - x + 1$. Calculer $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$.

Exercice 5

Montrer qu'il existe $F \in \mathbb{R}(X)$ telle que $\text{th}(3x) = F(\text{th } x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et décomposer F en éléments simples.

Même question avec $\text{th}(5x) = F(\text{th } x)$

Exercice 6

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction $F = \frac{X}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$.

Exercice 7

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ les fractions suivantes :

$$1. F = \frac{10X^3}{(X^2+1)(X^2-4)} \quad 2. \left| F = \frac{X^2}{(X^2+X+1)^2} \right. \quad 3. \left| F = \frac{n!}{X(X+1)\cdots(X+n)} \right.$$

Exercice 8

Simplifier les sommes $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 9

Calculer les dérivées n -ièmes des fonctions définies par :

$$1. f(x) = \operatorname{Arctan} x. \quad \left| \quad 2. f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x \cos a + 1} \right.$$

Exercice 10

Résoudre l'équation différentielle

$$x(x-4)y' + (x-2)y = 0$$

Quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}$?

18.6 Exercices Complémentaires

Exercice 1

On note n un entier naturel impair, $n \geq 3$ et $F = \frac{1}{(1 + X^n)^3}$.

1. Déterminer les pôles sur $\mathbb{C}$ de F .
2. Préciser la forme de la décomposition en éléments simples de F .
3. Déterminer la partie polaire de -1 , (on pourra faire un DL en -1 de $(x + 1)^3 F(x)$).

Exercice 2

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$

1. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P'|P$.
2. Soit $P = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)^{\alpha_k} \in \mathbb{C}[X]$, les λ_k étant distincts. Décomposer $\frac{P''}{P}$ en éléments simples.
3. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P''|P$.

Exercice 3

On note P un polynôme de degré n scindé à racines simples :

$$P = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$$

1. Décomposer $\frac{1}{P}$ en éléments simples.
2. On suppose $P(0) \neq 0$, exprimer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k P'(\lambda_k)}$.

Exercice 4

Décomposer $\frac{1}{X^3 - 1}$ et $\frac{X^3}{X^3 - 1}$ sur $\mathbb{C}$.

Exercice 5

Factoriser sur $\mathbb{C}$, $X^4 + 1$ puis décomposer en éléments simples $\frac{1}{X^4 + 1}$.

Exercice 6

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

- | | | |
|---|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\frac{X - 1}{X^2(X^2 + 1)}$ 2. $\frac{X + 2}{(X^2 - 1)^2}$ | | <ol style="list-style-type: none"> 3. $\frac{X^5 + 5X^4 - X^3 - 5X^2 - 2}{1 - X^2}$ 4. $\frac{X^5 + 5X^4 - X^3 - 5X^2 - 2}{X^2 + X + 1}$ |
|---|--|--|

Exercice 7

Soit $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et ω_i les racines n -ième de l'unité

1. Décomposer en élément simple $\frac{P(X)}{X^n - 1}$.

2. En déduire que $\sum_{k=1}^n P(\omega_k) = nP(0)$
3. Calculer la somme $\sum_{k=1}^n \prod_{l \neq k} (\omega_k - \omega_l)$.

Exercice 8

Simplifier les sommes

1. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$
2. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{3k+8}{k(k+2)2^k}$

Exercice 9

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si les racines de P sont réelles et simples, alors $P'^2 - PP''$ n'a pas de racines réelles.