

Chapitre 16

Applications linéaires

16.1 Applications linéaires

16.1.1 Définitions

Une application linéaire est un morphisme d'espaces vectoriels.

Plus précisément,

si $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ ¹ sont deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$,

$f : E \rightarrow F$ est linéaire si et seulement si

- $\forall x, y \in E, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Nous écrirons $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ou encore $f \in \mathcal{L}(E)$ si $E = F$.

L'application linéaire f est un endomorphisme si $E = F$
un isomorphisme si f est bijective
un automorphisme si $E = F$ et f est bijective
une forme linéaire si $F = \mathbb{K}$

Exemples

Les applications suivantes sont des applications linéaires classiques :

L'application nulle $u \mapsto 0$

L' homothétie vectorielle de rapport λ $u \mapsto \lambda u$ ($\lambda \neq 0$)

La $k^{\text{ème}}$ projection $p_k : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \rightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) & \mapsto x_k \end{cases}$

La dérivation de $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ vers $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ (valable aussi avec $\mathbb{C}$)

L'application identique $Id : u \mapsto u$ est un endomorphisme d'espace vectoriel.

Test 451

Dire pourquoi les applications suivantes ne sont pas linéaires :

- (1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = x^2$
- (2) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = x + 1$
- (3) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = \sin x$
- (4) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x, y) = x \cdot y$
- (5) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ avec $f(x) = 2x$

1. **Attention aux notations :** il serait plus correct d'utiliser des notations différentes pour les lois des deux espaces vectoriels. Conformément à l'usage, on utilise les mêmes symboles, mais il convient de rester vigilant et de se poser la question : "dans quel espace se trouve-t-on ?"

Test 452

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

(1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec

$$f(x, y) = (2x, 0, x - 3y)$$

(2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec

$$f(x, y) = (2x, y + 1)$$

(3) $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ avec

$$f(P) = P(-1) \quad (\text{valeur de } P \text{ pour } x = -1)$$

(4) $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ avec

$$f(aX^2 + bX + c) = cX^3 - b$$

16.1.2 Premières propriétés**Th.** ▷ Caractérisation d'une application linéaire E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. $f : E \rightarrow F$ est linéaire si et seulement si

$$\forall u, v \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

Note : on peut limiter la condition à un seul scalaire

$$\forall (u, v, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{K}, \quad f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$$

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors

• $f(0_E) = 0_F$

• $\forall u_1, u_2, \dots, u_n \in E, \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k\right) = \sum_{k=1}^n \left(\lambda_k f(u_k)\right)$

16.1.3 Composition d'applications linéairesSi E, F et G sont trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, alors

$$f \in \mathcal{L}(E, F) \text{ et } g \in \mathcal{L}(F, G) \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$$

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, alors

$$f \in \mathcal{L}(E, F) \text{ bijective} \Rightarrow f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$$

Linéarité de $f \mapsto u \circ f$ et de $f \mapsto f \circ u$:

• Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F), u \in \mathcal{L}(F, G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors $u \circ (f + \lambda g) = u \circ f + \lambda u \circ g$

• Soit $u \in \mathcal{L}(E, F), f, g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors $(f + \lambda g) \circ u = f \circ u + \lambda g \circ u$

Notes :Dans ce dernier cas, la linéarité de u est inutile.Dans les deux cas, la linéarité de f et g est inutile.*(Il suffit que les opérations $f + g$ et λg aient un sens.)*On peut dire que $\circ$ est **distributive à droite** par rapport à "+".Le **groupe linéaire** $\text{GL}(E)^2$ Muni de la loi $\circ$ de composition des applications, l'ensemble des automorphismes du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E a une structure de groupe non abélien.C'est le groupe linéaire de E .**16.1.4 Structure de $\mathcal{L}(E, F)$ et de $\mathcal{L}(E)$** Si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ alors

• $f + g \in \mathcal{L}(E, F)$

(la somme de deux AL est une AL.)

2. L'étude générale du groupe linéaire est hors programme

$$\bullet \forall \lambda \quad \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda f \in \mathcal{L}(E, F)$$

(le produit d'une AL par un scalaire est une AL)

Th. $\triangleright$ Structures de $\mathcal{L}(E, F)$ et de $\mathcal{L}(E)$ E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

- $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (pour les lois $+$ et $\cdot$)
- $\mathcal{L}(E)$ est un anneau non commutatif, non intègre (pour les lois $+$ et $\circ$)
- $\mathcal{L}(E)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre (pour les lois $+$, $\circ$ et $\cdot$)

Intérêt : A condition de ne pas changer l'ordre ni de simplifier,
ceci permet de faire du calcul sur les applications linéaires
pratiquement comme du calcul dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

**Test 453**Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 = f + \text{Id}$.Montrer que f est bijective et calculer f^{-1} en fonction de f et Id .(on écrira la condition sous la forme $f \circ g = g \circ f = \text{Id}$)Adapter ce test dans le cas $f^3 = (f + 2\text{Id})^2$ **Test 454**Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 = \text{Id}$.(1) Peut-on utiliser le binôme de Newton pour calculer $(f + \text{Id})^n$?(2) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2 \Rightarrow (f + \text{Id})^n = 2^{n-1}(f + \text{Id})$

(3) Retrouver ce résultat en utilisant une démonstration par récurrence.

16.1.5 Intérêt de ces structures

Ces structures permettent de travailler avec des endomorphismes et les opérations " $+$, $\cdot$, $\circ$ " un peu comme on travaille avec des réels et les opérations " $+$, $\cdot$, $\times$ ".

c'est le produit

Attention toutefois : $\triangleright$ *on ne peut généralement pas commuter*(puisque la loi $\circ$ n'est pas commutative) $\triangleright$ Il faut rester très prudent avec la loi $\circ$ si ce ne sont pas des endomorphismes**Réfléchir à ce qui suit . . .** $\triangleright$ Dans $\mathbb{R}$ nous avons $(a + 2b) \times (3a + 4c) = 3a^2 + 4ac + 6ba + 8bc$

$$= 3a^2 + 4ac + 6ab + 8bc$$

Et dans $\mathcal{L}(E)$: $(f + 2g) \circ (3f + 4h) = 3f^2 + 4f \circ h + 6g \circ f + 8g \circ h$

$$\text{mais attention } \neq 3f^2 + 4f \circ h + 6f \circ g + 8g \circ h$$

 $\triangleright$ Dans $\mathbb{R}$ nous avons $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ Et dans $\mathcal{L}(E)$: $(f + g)^2 = f^2 + f \circ g + g \circ f + g^2$

$$\text{ne pas écrire } f^2 + 2f \circ g + g^2$$

$$\text{par contre } (f + \text{Id}_E)^2 = f^2 + 2f + \text{Id}_E \quad \text{est correct}$$

 $\triangleright$ Dans $\mathbb{R}$ nous avons $ab + a = a(b + 1)$ (d'où vient le 1 ?)Et dans $\mathcal{L}(E)$: $f \circ g + f = f \circ (g + ?)$ (voir³) $\triangleright$ Dans $\mathbb{R}$ nous avons pour $a \neq 0$: $ab = ac \Rightarrow b = c$ Et dans $\mathcal{L}(E)$, **attention** en général $f \circ g = f \circ h \not\Rightarrow g = h$ même si $f \neq \mathbf{0}$ (fonction nulle).Quelle hypothèse sur f faut-il pour que l'implication soit vraie ? (voir⁴)**Test 455**Dans $\mathcal{L}(E)$, développer $(f + g) \circ (f - g)$ puis $(f + 2\text{Id}_E) \circ (f - 2\text{Id}_E)$.**Test 456**Dans $\mathbb{R}$ nous avons $ab = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{b}$. Que devient ceci dans $\mathcal{L}(E)$?3. $\mathbf{1}$ est l'élément neutre pour $\times$. Le point d'interrogation est le neutre pour $\circ$, c'est-à-dire Id_E .

4. Dans $\mathbb{R}$, on simplifie par a en multipliant par $\frac{1}{a}$ (qui existe si $a \neq 0$). L'implication sera vraie dans $\mathcal{L}(E)$ si f^{-1} existe, c'est-à-dire si f est bijective.

Test 457

Une technique classique à connaître :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie $f^2 + 3f - \text{Id}_E = \mathbf{0}$ (application nulle).
 Montrer que f admet une application réciproque qu'on explicitera.
 Même question si f vérifie $f^2 + 2f = f^3 - 3\text{Id}_E$.

16.1.6 Image directe et réciproque de SEV

Th. ▷ **Image directe et réciproque d'un SEV**

E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

• $\forall A \quad A \text{ SEV de } E \Rightarrow f(A) \text{ SEV de } F$
 (par une application linéaire, l'image d'un SEV est un SEV)

• $\forall B \quad B \text{ SEV de } F \Rightarrow f^{-1}(B) \text{ SEV de } E$
 (par une application linéaire, l'image réciproque d'un SEV est un SEV)

Cas particuliers importants :

- Le **noyau** de f : $\text{Ker}(f) = \left\{ u \in E \mid f(u) = 0_F \right\}$
 - $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E
 - f est injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0_E\}$
- L'**image** de f : $\text{Im}(f) = \left\{ v \in F \mid \exists u \in E, v = f(u) \right\}$
 - $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F
 - f est surjective $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = F$

Th. ▷ **Famille génératrice et application linéaire**

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors
 $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(x_i), i \in I)$

Test 458

Les applications suivantes sont linéaires. Déterminer l'image, le noyau, et dire si l'application est injective ou surjective :

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y, x - y)$
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x, x + y, y)$

Test 459

Déterminer un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ pour lequel

$$\text{Im}(f) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\} \quad \text{et} \quad \text{Ker}(f) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

16.1.7 Équations linéaires

Équation linéaire (cas général) :

- c'est une équation de la forme $f(x) = b$ où $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$
- si $\mathcal{S} = \left\{ u \in E \mid f(u) = b \right\}$ désigne l'ensemble des solutions :
 - soit $\mathcal{S} = \emptyset$ (si $b \notin \text{Im}(f)$)
 - soit $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Alors $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de E de direction $\text{Ker}(f)$
 $\mathcal{S} = x_0 + \text{Ker}(f)$ où $x_0 \in \mathcal{S}$ est une solution particulière.

Test 460

Trouver la solution u_0 de la forme $(x, 0)$ du système
$$\begin{cases} 4x + 6y = 2 \\ 6x + 9y = 3 \end{cases}$$

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $\varphi(x, y) = (4x + 6y, 6x + 9y)$
En déduire toutes les solutions du système.

Équation différentielle linéaire

- C'est une équation différentielle de la forme $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = b(x)$ où $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ et b sont des fonctions continues sur l'intervalle I .
- Cette équation entre dans le cadre général des équations linéaires ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :

$$\varphi(y) = b \quad \text{où} \quad \varphi : \begin{cases} \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{F}(I, \mathbb{K}) \\ y & \mapsto & y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y \end{cases}$$

- Voir le cours d'analyse pour les équations linéaires, soit d'ordre 1, soit d'ordre 2 à coefficients constants

Suites récurrentes (u_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$

Notons Δ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des suites à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ ($\Delta = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$).

- Les suites u recherchées sont les solutions de l'équation linéaire :

$$\varphi(u) = 0_{\Delta} \quad \text{où} \quad \varphi : \begin{cases} \Delta & \rightarrow & \Delta \\ (u_n) & \mapsto & (v_n) \end{cases}$$

avec $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+2} - a u_{n+1} - b u_n$

16.2 Applications linéaires et bases

16.2.1 Détermination d'une application linéaire

Th. $\triangleright$ Détermination par l'image d'une base

E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E .

Pour toute famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de vecteurs de F , il existe une application linéaire

φ et une seule qui vérifie $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi(e_k) = v_k$

On résume en Une application linéaire est déterminée par l'image d'une base

16.2.2 Expression analytique

Si de plus $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ est une base de F , chaque vecteur $f(e_k)$ est déterminé par ses

coordonnées $\begin{pmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{m,k} \end{pmatrix}$ relatives à $\mathcal{B}'$.

Alors, l'image du vecteur $u = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ est le vecteur $u' = f(u) = \sum_{i=1}^m x'_i f_i$



$$\text{avec} \quad \begin{cases} x'_1 = a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \cdots + a_{1,n} x_n \\ x'_2 = a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \cdots + a_{2,n} x_n \\ \cdots \cdots \cdots \\ x'_m = a_{m,1} x_1 + a_{m,2} x_2 + \cdots + a_{m,n} x_n \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\forall i \in \left[\begin{matrix} 1, m \end{matrix} \right], \quad x'_i = \sum_{k=1}^n a_{i,k} x_k$$

Th. ▷ Autre caractérisation d'une application linéaire

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ sont des bases des deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels E et F .

$f : E \rightarrow F$ est linéaire ssi son expression analytique est de la forme

$$u \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto f(u) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \cdots + a_{1,n} x_n \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \cdots + a_{2,n} x_n \\ \vdots \\ a_{m,1} x_1 + a_{m,2} x_2 + \cdots + a_{m,n} x_n \end{pmatrix}$$

Test 461

Dans $\mathbb{R}_2[X]$ rapporté à sa base canonique, donner l'expression analytique de f qui, à $P(X)$ associe $\left(P'(X)\right)^2$. f est-elle linéaire ?

Test 462

$\mathcal{B} = (i, j) = ((1, 2), (2, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Dans cette base, l'endomorphisme f a pour expression analytique $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}$
Calculer l'image des couples $-1 - (1, 2) \quad -2 - (2, 1) \quad -3 - (3, 3)$

16.2.3 Matrices d'application linéaire

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E , et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ une base de F .

Toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est déterminée par les n vecteurs $\left(f(e_k)\right)_{1 \leq k \leq n}$ eux-mêmes déterminés par leurs coordonnées $\left(a_{i,k}\right)_{1 \leq i \leq m}$ relativement à $\mathcal{B}'$.

$$M = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \\ \begin{matrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

- Notes :**
- si $n = m$, on dit que la matrice est carrée.
 - Si $E = F$, il est possible d'utiliser la même base dans l'espace de départ et d'arrivée. On écrira alors $M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Test 463

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{B} = (i, j)$ de E .

Écrire les expressions analytiques de f et $f \circ f$ relativement à cette base.

Notation :

- on écrit les coordonnées d'un vecteur sous la forme d'une matrice colonne

$$u \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad u' \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix}$$

- On écrit l'égalité $f(u) = u'$ sous la forme d'un **produit matriciel**

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix}$$

16.2.4 Bases et injections - surjections

Th. $\triangleright$ **injections-surjections et image d'une base**

$f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E .

- f est injective $\Leftrightarrow f(\mathcal{B})$ est une famille libre de F
- f est surjective $\Leftrightarrow f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F
- f est bijective $\Leftrightarrow f(\mathcal{B})$ est une base de F

**Test 464**

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ qui à $P(X)$ associe $(X+1)P'(X)$.
Utiliser l'image de la base canonique pour déterminer si f est injective ou surjective.

16.2.5 Utilisation de SEV supplémentaires

Th. $\triangleright$ **SEV supplémentaires et applications linéaires**

Soit E_1, E_2 des SEV de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$.

Soient $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$.

Il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et u_2 sur E_2 .

16.3 Projections, symétries, homothétie

16.3.1 Projection vectorielle

A et B sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E : $E = A \oplus B$. Tout vecteur $u \in E$ admet une unique décomposition $u = a + b$, $(a, b) \in A \times B$.

Le projecteur (ou projection) sur A de direction⁵ B est l'application

$$p : \begin{cases} E = A \oplus B & \rightarrow & E \\ u = a + b & \mapsto & p(u) = a \end{cases} \quad (a, b) \in A \times B$$

A est la base de la projection

B est la direction de la projection

Propriétés :

- p est une application linéaire
- A est l'ensemble des vecteurs invariants

$$A = \left\{ u \in E \mid p(u) = u \right\} = \text{Ker}(p - \text{Id})$$

- $A = \text{Im}(p)$ et $B = \text{Ker}(p)$
- p est idempotente $p \circ p = p$

Test 465

Montrer que $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$ et $B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}$ sont deux espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
Former les expressions analytiques de p projection sur A de direction B , et de q projection sur B de direction A .



Th. ▷ Caractérisation des projecteurs

Soit l'application $p : E \rightarrow E$ où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel :
 p est un projecteur $\Leftrightarrow p$ est linéaire et idempotente

Test 466

Montrer que $p : (x, y, z) \mapsto (x - z, y - z, 0)$ est un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dont on précisera les éléments.

Test 467

Si p est un projecteur, montrer que $s = 2p - \text{Id}$ est linéaire involutive.
Que pensez-vous de la réciproque ?

Test 468

Pour quelle valeur du paramètre réel a l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par $f(x, y) = ((a + 1)x - ay, 3x - 2y)$ est-elle une projection ?
Précisez-en alors les éléments.



Méthodes

- Pour reconnaître un projecteur :
 - Utiliser principalement "linéaire idempotente"
 - Éventuellement utiliser directement la définition
 - Pour en déterminer les éléments
 - Chercher invariants et noyau
 - Éventuellement, utiliser l'image
 - Pour obtenir l'expression analytique
 - Utiliser une base de A : ces vecteurs sont invariants
 - Utiliser une base de B : ces vecteurs ont pour image 0
- Résoudre le système vectoriel

5. On peut dire aussi "parallèlement à".

Test 469

$\mathcal{B} = (i, j, k)$ est une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E . On se propose de déterminer l'expression analytique de la projection p sur le plan d'équation $x + z = 0$, de direction la droite D engendrée par $w = j + k$.

- Trouver une base (u, v) du plan P .
- Sans calculs, donner les images par p de u, v, w en fonction de u, v et w .
- Traduire ces égalités dans la base $\mathcal{B}$ et en déduire l'expression analytique de p .

16.3.2 Symétries vectorielles

A et B sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E : $E = A \oplus B$. Tout vecteur $u \in E$ admet une unique décomposition $u = a + b$, $(a, b) \in A \times B$.

La symétrie par rapport à A de direction ⁶ B est l'application

$$s : \begin{cases} E = A \oplus B & \rightarrow & E \\ u = a + b & \mapsto & s(u) = a - b \end{cases} \quad (a, b) \in A \times B$$

A est la base de la symétrie

B est la direction de la symétrie

Propriétés :

- s est une application linéaire

- A est l'ensemble des vecteurs invariants

$$A = \left\{ u \in E \mid s(u) = u \right\} = \text{Ker}(s - \text{Id})$$

- B est l'ensemble des vecteurs transformés en leur opposé

$$B = \left\{ u \in E \mid s(u) = -u \right\} = \text{Ker}(s + \text{Id})$$

- s est involutive $s \circ s = \text{Id}$

Test 470

Reprendre le premier test du paragraphe 16.3.1 et donner l'expression analytique des deux symétries vectorielles

Th. $\triangleright$ Caractérisation des symétries

soit l'application $s : E \rightarrow E$ où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel :

s est une symétrie $\Leftrightarrow s$ est linéaire et involutive



Test 471

Montrer que $s(x, y, z) = (-2x + 2y + z, -x + y + z, -x + 2y)$ est une symétrie de $\mathbb{R}^3$ dont on précisera les éléments.

Test 472

Adapter le dernier test du paragraphe 16.3.1 aux symétries.

16.3.3 Homothétie vectorielle

L'homothétie vectorielle de rapport k est l'application de E dans E définie par $\vec{u} \mapsto k\vec{u}$

On peut la noter $k \text{Id}_E$.

Remarques

- Une homothétie vectorielle est un endomorphisme de E .
- L'identité est une homothétie de rapport 1
- Si $k \neq 0$, une homothétie est bijective
- L'application réciproque est l'homothétie de rapport $\frac{1}{k}$.
- Muni de la loi $\circ$, l'ensemble des homothétie de rapport non nul est un groupe commutatif.

6. On peut dire aussi "parallèlement à".



16.4 Exercices

Exercice 1

Les applications suivantes $E \rightarrow F$ sont-elles linéaires ? Justifiez votre réponse. Lorsque c'est le cas, déterminer leur noyau et leur image.

1. $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + y, z + x)$
2. $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x + y, y + 2x, 2y + x)$
3. $r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, x + y, y - x) \mapsto (x, y)$
4. $D : E \rightarrow F, f \mapsto f',$ avec $E = \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), F = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}).$
5. $X : E \rightarrow E, f \mapsto (g_f : x \mapsto xf(x)),$ avec $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$

Exercice 2

Soient E et F deux K -espaces vectoriels.

1. Soient U_1 et U_2 deux sous-espaces supplémentaires dans E ($U_1 \oplus U_2 = E$). Soit u_1 une application linéaire de U_1 dans F , et u_2 une application linéaire de U_2 dans F . Montrer qu'il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que $u|_{U_1} = u_1$ et $u|_{U_2} = u_2$.
2. Soit H un sous-espace vectoriel de E et f un endomorphisme de E . On dit que H est un sous-espace stable par f si $f(H) \subset H$, c'est-à-dire si $f(x) \in H$ pour tout $x \in H$. Soient f et g deux endomorphismes de E .
 - (a) On suppose que f et g commutent ($g \circ f = f \circ g$). Montrer que $\text{Im } g$ et $\text{Ker } g$ sont deux sous-espaces stables par f .
 - (b) Réciproquement, on suppose que $\text{Im } g$ et $\text{Ker } g$ sont deux sous-espaces stables par f . On suppose de plus que g est un projecteur. Montrer que f et g commutent.

Exercice 3

A connaître et à savoir utiliser

Soient E, F et G trois K -espaces vectoriels, u une application linéaire de E dans F , v une application linéaire de F dans G . Montrer que

$$v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E, G)} \quad \text{si et seulement si} \quad \text{Im } u \subset \text{Ker } v$$

Exercice 4

Soit E et F deux espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F .

1. Soit V un sous-espace vectoriel de E . Montrer que
 - (a) $f^{-1}(f(V)) = V + \text{Ker } f$.
 - (b) $f^{-1}(f(V)) = V$ si et seulement si $\text{Ker } f \subset V$
2. Soit W un sous-espace vectoriel de F . Montrer que
 - (a) $f(f^{-1}(W)) = W \cap \text{Im } f$.
 - (b) $f(f^{-1}(W)) = W$ si et seulement si $W \subset \text{Im } f$
3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et V un sous-espace vectoriel de E . Montrer que

$$f^{-1}(f(V)) = f(f^{-1}(V)) \quad \text{si et seulement si} \quad \text{Ker } f \subset V \subset \text{Im } f$$

Exercice 5

Montrer que chacune des applications suivantes est un projecteur ou une symétrie, et en déterminer une base et une direction propre.

1. $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (4x - 6y, 2x - 3y)$

2. $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto \left(x, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}\right)$
3. $\tau : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \mapsto (\tau_f : x \mapsto f(-x))$
4. $\delta_0 : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \mapsto (f(0)\mathbb{1} : x \mapsto f(0))$

Exercice 6

Soient E et F deux K -espaces vectoriels, et $g \in \mathcal{L}(F, E)$. On définit

$$\phi : E \times F \rightarrow E \times F, (x, y) \mapsto (x + g(y), y)$$

Montrer que ϕ est un automorphisme de $E \times F$.

Exercice 7

Soient E, F et G trois K -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g, h \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer :

$$\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(h \circ f) \quad \text{si et seulement si} \quad \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g) = \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(h)$$

Exercice 8

Soit E un K -espace vectoriel, et p, q des projecteurs de E . Montrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si,

$$p \circ q + q \circ p = 0$$

Si c'est le cas, montrer que

$$\text{Ker}(p + q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q \quad \text{Im}(p + q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$$

en vous aidant des étapes suivantes :

1. Montrer que $\text{Im}(p + q) \subset \text{Im } p + \text{Im } q$.
2. Montrer que $\text{Im } p \cap \text{Im } q = 0_E$.
3. Montrer que $\text{Im } p + \text{Im } q \subset \text{Im}(p + q)$.
4. Conclure : $\text{Im}(p + q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$.
5. Montrer que $\text{Ker } p \cap \text{Ker } q \subset \text{Ker}(p + q)$.
6. Montrer que $\text{Ker } p \cap \text{Ker } q \supset \text{Ker}(p + q)$.

Exercice 9

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On définit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & \varphi(P) = (P(a), P(b)) \end{cases}$.

1. Montrer que φ est une application linéaire, autrement dit prouver que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}^2)$.
2. On suppose que $a = -1$ et $b = 3$. Déterminer le noyau et l'image de φ .

Exercice 10

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \varphi(f) = f' - 2f \end{cases}$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer $\text{Ker } \varphi$. Conclusion ?
3. Justifier que φ est surjective.

Exercice 11

Soit E un K -espace vectoriel, α et β deux scalaires distincts, et u un endomorphisme de E tel que

$$(u - \alpha Id_E) \circ (u - \beta Id_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

On note $v = u - \alpha Id_E$ et $w = u - \beta Id_E$.

1. Simplifier $v \circ w$, $w \circ v$, $v - w$.
2. Montrer que $E = \text{Im } v + \text{Im } w$.
3. En déduire que $E = \text{Ker } v \oplus \text{Ker } w$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe deux scalaires γ_n et δ_n tels que

$$u^n = \gamma_n u + \delta_n Id_E$$

On rappelle que

$$u^n = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}$$

Exercice 12

On suppose que tout sous-espace vectoriel possède un supplémentaire

Soient E , F et G trois K -espaces vectoriels, et u et v deux endomorphismes de E

1. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(E, G)$. Montrer que $\text{Ker } u \subset \text{Ker } v$ si, et seulement si, il existe $w \in \mathcal{L}(F, G)$ tel que $v = w \circ u$.
2. Soient $u \in \mathcal{L}(E, G)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\text{Im } u \subset \text{Im } v$ si, et seulement si, il existe $w \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $u = v \circ w$.

16.5 Exercices Complémentaires

Exercice 1

Les applications suivantes, entre $\mathbb{R}$ -ev, sont-elles linéaires ? :

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2x + y - 1$.
2. $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = xy$.
3. $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, y, z) = x - y + 2z$.
4. $k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $k(x, y, z) = x - 2y$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, 2x - y)$.

Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$, et déterminer son automorphisme réciproque.

Exercice 3

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, définie par $\varphi(x, y) = (y, 0)$.
 - (a) Montrer que φ est linéaire.
 - (b) Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$. Que peut-on dire de $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$?
2. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\varphi(x, y) = 2x - 3y$.
 - (a) Montrer que φ est une forme linéaire.
 - (b) Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$.
3. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, définie par $\varphi(x, y, z) = (x, x, x)$.
 - (a) Montrer que φ est linéaire.
 - (b) Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$. Calculer φ^2 . Conclusion ?

Exercice 4

Les applications suivantes $E \rightarrow F$ sont-elles linéaires ? Justifiez votre réponse. Lorsque c'est le cas, déterminer leur noyau et leur image.

1. $u : f \mapsto f^2$, $E = F = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
2. $\delta_x : f \mapsto f(x)$, $E = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, $F = \mathbb{R}$.
3. $h : f \mapsto f$, $E = F = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
4. $g : f \mapsto Id_I$, $E = F = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Exercice 5

Soient E un K -espace vectoriel, et u un endomorphisme de E .

1. On suppose qu'il existe un unique endomorphisme v de E tel que $u \circ v = Id_E$. Montrer que $v \circ u = Id_E$.
2. Donner un contre-exemple en cas de non-unicité de v .

Exercice 6

Soient E et F deux K -espaces vectoriels, et G_1 et G_2 deux sous-espaces supplémentaires de E . On note

$$\mathcal{K} = \{u \in \mathcal{L}(E, F) \mid u|_{G_2} = 0\}$$

Montrer que $\mathcal{K}$ est un espace vectoriel isomorphe à $\mathcal{L}(G_1, F)$.

Exercice 7

Soit E un K -espace vectoriel, et p, q des projecteurs de E . Montrer que

1. $\begin{cases} p \circ q = p \\ q \circ p = q \end{cases}$ si et seulement si $\text{Ker } p = \text{Ker } q$.
2. $\begin{cases} p \circ q = q \\ q \circ p = p \end{cases}$ si et seulement si $\text{Im } p = \text{Im } q$.