

Chapitre 12

Polynômes

12.1 Algèbre des polynômes

12.1.1 Définitions

Un polynôme à une indéterminée à coefficients dans le corps commutatif $\mathbb{K}$ est une suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ à support fini, c'est-à-dire : $S_A = \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}$ est fini.
Les a_i sont les coefficients du polynôme A .

Test 309 $(k)_{k \in \mathbb{N}}$ est-il un polynôme ?
Même question pour $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ où $a_0 = 100$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k = \prod_{i=0}^k (100 - i)$
Pour cela on vérifiera si la suite est à support fini ou non (autrement dit les termes sont-ils nuls à partir d'un certain rang).

Notes

- $A = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $B = (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont égaux ssi $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = b_k$
- $A = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un polynôme ssi S_A est majoré
c'est-à-dire $\exists n \in \mathbb{N}, i > n \Rightarrow a_i = 0$.

Notation : $A = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ se note¹ $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ si $S_A \subset \llbracket 0, n \rrbracket$

$\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à une indéterminée, à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Le polynôme A est nul ssi $\forall i \in \mathbb{N}, a_i = 0$ ($A = 0$).
est constant quand $\forall i \in \mathbb{N}^*, a_i = 0$ ($A = a_0 X^0$)
Un tel polynôme est déterminé par la donnée de a_0 .
est un monôme si le support est, soit vide, soit un singleton.

Test 310 Écrire le monôme X^k sous la forme $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$.
(Utiliser le symbole de Kronecker : $\delta_{i,k} = 1$ si $i = k$ et 0 sinon)

Test 311 Le polynôme nul est-il constant ? est-ce un monôme ?

1. L'origine de cette notation découle de propriétés de l'algèbre des polynômes (voir ?? page ?? dans ce paragraphe).

12.1.2 Degré d'un polynôme

Si A n'est pas nul, son support S_A est un sous-ensemble fini non vide de $\mathbb{N}$, d'où les définitions suivantes :

- Le degré² du polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ est
- $\deg(A) = \max(S_A)$ si $A \neq \mathbf{0}$
 - $\deg(\mathbf{0}) = -\infty$ (par convention).
- La valuation³ du polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ est
- $\text{val}(A) = \min(S_A)$ si $A \neq \mathbf{0}$
 - $\text{val}(\mathbf{0}) = +\infty$ (par convention).

$K_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré au plus n .

(donc $\mathbf{0} \in K_n[X]$)



Ainsi :

$$\deg(A) = n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n \neq 0 \\ \forall i \in \mathbb{N}, i > n \Rightarrow a_i = 0 \end{cases}$$

Test 312 De la même façon, caractériser la valuation de A .

- Si $A \neq \mathbf{0}$ est de degré n :
- le coefficient dominant de A est a_n .
 - le monôme dominant de A est $a_n X^n$.
 - A est normalisé (ou unitaire) si $a_n = 1$.

Test 313 Est-il vrai qu'un polynôme constant non nul a un degré nul ? une valuation nulle ?

Test 314 Comment sont les polynômes A qui vérifient $\text{val}(A) = \deg(A)$?

Th. ► Une caractérisation du polynôme nul

Avec les conventions habituelles ($n \in \mathbb{N} \Rightarrow -\infty < n < +\infty$) :

$$\forall A \neq \mathbf{0}, \quad \text{val}(A) \leq \deg(A)$$

Par conséquent :

$$A = \mathbf{0} \Leftrightarrow \deg(A) < \text{val}(A)$$

12.1.3 Espace vectoriel des polynômes

$A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ et $B = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$ sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, et $\lambda \in \mathbb{K}$

► Somme : $\sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) X^i$ est un polynôme noté $A + B$

► Produit externe : $\sum_{i=0}^{\infty} (\lambda a_i) X^i$ est un polynôme noté λA

Propriétés : $\forall A, B \in \mathbb{K}[X], \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

- $\deg(A + B) \leq \max(\deg(A), \deg(B))$
- $\deg(A) \neq \deg(B) \Rightarrow \deg(A + B) = \max(\deg(A), \deg(B))$
- $\lambda \neq 0 \Rightarrow \deg(\lambda A) = \deg(A)$

Note : avec les conventions usuelles dans $\overline{\mathbb{R}}$, ces résultats restent valables si $A = \mathbf{0}$ ou $B = \mathbf{0}$.

2. On peut le noter $\deg(A)$ ou $d^\circ(A)$.

3. Pour information seulement (cette définition n'est pas au programme).

Muni de ces opérations :

$K[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
 Il est de dimension infinie
 de base canonique $(X^0, X^1, \dots, X^n, \dots)$

Test 315 Énoncer les résultats équivalents pour la valuation.

Conséquence : $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
 Il est de dimension $(n+1)$,
 de base canonique $(X^0, X^1, \dots, X^n)$

12.1.4 Algèbre des polynômes

$A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ et $B = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$ sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$

► **Produit :** $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall i \in \mathbb{N}, c_i = \sum_{k=0}^i (a_k b_{i-k})$

est un polynôme noté $A \cdot B$ ou AB ou $A \times B$

Propriétés : $\forall A, B \in \mathbb{K}[X]$

• $\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B)$

Valable si $A = \mathbf{0}$ ou $B = \mathbf{0}$ (avec les conventions usuelles dans $\overline{\mathbb{R}}$)

• $AB = \mathbf{0} \Rightarrow A = \mathbf{0}$ ou $B = \mathbf{0}$

• Si $AB \neq \mathbf{0}$, le coefficient dominant du produit est égal au produit des coefficients dominants.

Muni de ces opérations :

$K[X]$ est un anneau commutatif, intègre.
 Ce n'est pas un corps :
 A est inversible ssi $\deg(A) = 0$
 (c'est-à-dire A constant non nul)

12.1.5 Substitution (composition) de polynômes

$A, B \in \mathbb{K}[X], \quad A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i.$

La composée $A \circ B$, encore notée $A(B)$ est le polynôme $\sum_{i=0}^{\infty} a_i B^i$.

On dit également qu'on substitue⁴ B à X dans A .

Notes :

- Contrairement aux apparences, la somme est une somme finie
 (A est à support fini)
 donc, $A \circ B$ est bien un polynôme. (élément de l'algèbre $\mathbb{K}[X]$)
- La substitution de X à X ne modifie pas A .
 Ceci permet de noter indifféremment A ou $A(X)$

4. Ce vocabulaire et la notation $A(B)$ seront justifiés plus loin dans ce chapitre [voir ?? page ??].

Test 316

Les polynômes A et B sont non nuls, de degrés respectifs n et m .

-1- Quel est le degré de B^k ($k \in \mathbb{N}$) ?

-2- Quel est le degré de $A \circ B$?

-3- Que se passe-t-il si un des polynômes est nul ?

12.1.6 Division euclidienne

Th. ▷ Division euclidienne de A par B

Pour tout couple (A, B) de polynômes, B non nul,
il existe un unique couple (Q, R) de polynômes

tels que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$

Q est le quotient de la division euclidienne

R est le reste de la division euclidienne

Remarque : la démonstration précédente donne l'algorithme de la division euclidienne.

Test 317

Le fait que $\mathbb{K}$ est un corps est-il utile pour ce résultat ?

Test 318

Effectuer la division euclidienne de $X^5 - X^4 - 3X^3 + X^2 + 3X + 1$
par $X^3 - X$, puis par $X^2 - X - 2$.
Le deuxième calcul était-il indispensable ?

Test 319

Effectuer la division euclidienne de $A = X^5 + X^4 - X^3 - 1$ par $X^3 - 1$.
En déduire la division euclidienne de A par $X^2 + X - 1$.

Cas particulier :

- le reste de la division euclidienne de A par $B \neq 0$ est nul

- On dit que A est un multiple de B (ou B divise A) $\text{ssi} \quad \exists Q \in \mathbb{K}[X], A = BQ$

On note $A \in B \cdot \mathbb{K}[X]$ ou encore $B|A$.

- On peut distinguer le cas particulier $Q \in \mathbb{K}$ (Q de degré négatif ou nul)
en disant que A est proportionnel⁵ à B .

12.2 Polynôme dérivé

*Nous allons trouver ici des propriétés identiques à celles des fonctions dérivables.
L'intérêt de ce paragraphe est que la notion de "dérivée d'un polynôme" est purement formelle.*

Ne faisant pas appel à la notion de limite, les résultats peuvent être appliqués à des objets variés (fonctions, matrices, etc.)

12.2.1 Dérivée formelle

Le polynôme dérivé de $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ est $A' = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i X^{i-1}$.

(Il est immédiat que A' est un polynôme puisque $S_{A'} \subset \llbracket 0, \deg(A) \rrbracket$ est fini.)

5. Ce qui est légèrement différent du cas des polynômes associés [voir 17.1.1 page 479]

Test 320

A quelle condition un polynôme de degré 2 est-il divisible par sa dérivée ?
On pourra utiliser la division euclidienne de A par A' avec $A = aX^2 + bX + c$.

Propriétés :

- *degré* : (Ces deux propriétés ne sont pas assurées si $\mathbb{K}$ est un autre corps que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.)
 - si A n'est pas constant, alors $\deg(A') = \deg(A) - 1$
 - A est constant $\Leftrightarrow A' = \mathbf{0}$
- *linéarité* : $\forall A, B \in \mathbb{K}[X], \forall \lambda \in \mathbb{K}, (A + \lambda B)' = A' + \lambda B'$
- *produit* :
 - $\forall A, B \in \mathbb{K}[X], (AB)' = A'B + AB'$
 - $\forall A \in \mathbb{K}[X], \forall n \in \mathbb{N}^*, (A^n)' = n A^{n-1} A'$
- *substitution* : $\forall A, B \in \mathbb{K}[X], (A \circ B)' = (A' \circ B) B'$

12.2.2 Dérivées successives

Pour $k \in \mathbb{N}$: la dérivée d'ordre k de $A \in \mathbb{K}[X]$ est $A^{(k)} = \begin{cases} A & \text{si } k = 0 \\ (A^{(k-1)})' & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$

Propriétés :

- $\forall k, l \in \mathbb{N}, A^{(k+l)} = (A^{(k)})^{(l)}$ (en particulier $A^{(k+1)} = (A')^{(k)}$)
- *degré* si $\deg(A) = n \in \mathbb{N}$, alors $\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} k \leq n \Rightarrow \deg(A^{(k)}) = n - k \\ k > n \Rightarrow A^{(k)} = \mathbf{0} \end{cases}$
- *linéarité* $\forall A, B \in \mathbb{K}[X], \forall \lambda \in \mathbb{K}, (A + \lambda B)^{(n)} = A^{(n)} + \lambda B^{(n)}$
(L'opérateur "dérivée $n^{\text{ème}}$ " est linéaire.)
- *Formule de Leibniz*⁶

$$\forall A, B \in \mathbb{K}[X], \forall n \in \mathbb{N}, (AB)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{(k)} B^{(n-k)}$$

Test 321

Une situation assez fréquente :

Appliquer la formule de Leibniz pour obtenir la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $(X^2 A)$ (où A est un polynôme et $n \geq 2$.)

12.2.3 Formule de Taylor

Th. $\triangleright$ **Formule de Taylor pour les polynômes**⁷

Pour $\mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{C}$, si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $h \in \mathbb{K}$, alors :

$$P(X+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} P^{(k)}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} P^{(k)}(h)$$

Qui peut encore s'écrire

$$P(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(X-h)^k}{k!} P^{(k)}(h)$$

- La somme est finie (puisque $k > \deg(P) \Rightarrow P^{(k)} = \mathbf{0}$)

**Test 322**

Appliquer la formule à $P = X^4$ avec $h = 1$. Vérifier.

12.3 Fonction polynôme et zéros

12.3.1 Fonction polynôme

La fonction polynomiale associée à $A = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ est la fonction

$$\tilde{A} : \begin{cases} \mathbb{K} & \rightarrow \mathbb{K} \\ t & \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \end{cases}$$

Note :

- On dit qu'on a substitué t à X .
- Si $\mathbb{K}_1$ est un sur-corps de $\mathbb{K}$, on peut considérer que $A \in \mathbb{K}_1[X]$. La fonction $\tilde{A}$ est naturellement définie sur $\mathbb{K}_1$ (à valeurs dans $\mathbb{K}_1$). Exemple : $A = X^2 + 3X \in \mathbb{R}[X]$, on peut utiliser $\tilde{A}(2-4i)$
- Sauf mention contraire, la fonction polynôme $\tilde{A}$ associée à $A \in \mathbb{K}[X]$ est définie sur $\mathbb{K}$.

Schéma (ou algorithme) de Horner⁸

Soit $A = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Le calcul de $\tilde{A}(t)$ est beaucoup plus rapide sous la forme

$$\tilde{A}(t) = a_0 + t(a_1 + t(a_2 + \cdots + t(a_{n-1} + t a_n)))$$

Une présentation sous forme de tableau permet d'effectuer plus facilement les calculs à la main. Prenons $P(x) = 4x^3 - 8x^2 - 7x - 1 = -1 + x(-7 + x(-8 + x(4)))$.

	4	-8	-7	-1
x		$4x$	$(4x-8)x$	$((4x-8)x-7)x$
	4	$\nearrow (4x-8)$	$\nearrow (4x-8)x-7$	$\nearrow ((4x-8)x-7)x-1$

Ce qui permet de calculer une image à la main avec un minimum de calculs mais aussi de factoriser un polynôme.

Soit $Q : x \mapsto x^3 - 4x^2 + 5x - 2$. Q admet pour racine évidente 2. Le tableau suivant permet de trouver la factorisation :

	1	-4	5	-2
2	0	2	-4	2
	1	-2	1	0

On obtient $Q(x) = (x-2)(x^2 - 2x + 1)$.

Note

L'exponentiation rapide est dans le même esprit :

$$t^{(2^k)} \text{ s'écrit } \left(\left(\cdots (t^2)^2 \cdots \right)^2 \right)^2 \quad (k \text{ niveaux})$$

Si n s'écrit $\overline{b_p b_{p-1} \cdots b_1 b_0}$ en base 2, alors $t^n = \prod_{k=0}^p b_k t^{(2^k)}$ s'évalue en un maximum de $2p$ multiplications (au lieu d'environ 2^p multiplications)

Exemple : $38 = \overline{100110}^2$ $t^{38} = t^2 (t^2)^2 \left(\left(((t^2)^2)^2 \right)^2 \right)^2$ se calcule en 10 multiplications (au lieu de 37).



Une astuce :

Le reste de la division euclidienne de A par $X - \alpha$ est $\tilde{A}(\alpha)$

8. William George HORNER (1661-1704) mathématicien Anglais

Test 323

R est le reste de la division euclidienne de $A \in \mathbb{R}[X]$ par $(X-1)^2$.

- Qu'obtient-on en dérivant cette division euclidienne ?
- Comment peut-on calculer les constantes ?
- En déduire la valeur de R .

Application avec $A = 1 + X + X^2 + \dots + X^n$.

Test 324

S'inspirer du test précédent pour obtenir le reste de la division euclidienne de $A \in \mathbb{K}[X]$ par $(X-1)^3$.

12.3.2 Zéros d'un polynôme

$x \in \mathbb{K}$ est un zéro (ou une racine) du polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ ssi $\tilde{A}(x) = 0$

Note :

Si on définit $\tilde{A}$ sur une $\mathbb{K}$ -algèbre E , et si $\tilde{A}(x) = 0_E$,
on dit que x est un zéro de A dans E

Exemple : i est un zéro dans $\mathbb{C}$ de $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

Th. ▷ Zéros distincts et divisibilité

- $\alpha \in \mathbb{K}$ est un zéro de $A \in \mathbb{K}[X]$ ssi $(X-\alpha) \mid A$

- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sont des zéros de A

$$\text{ssi } (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_p) \mid A$$

(Attention : il est indispensable que les zéros soient dans $\mathbb{K}$.)



Conséquence 1

Un polynôme non nul de degré n
admet au plus n zéros distincts.



Conséquence 2

$$\left. \begin{array}{l} P \in \mathbb{K}_n[X] \\ P \text{ admet plus de } n \text{ zéros distincts} \end{array} \right\} \Rightarrow P = 0$$



Test 325

Quels sont les zéros dans $\mathbb{Q}$, puis dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$ de $P_1 = X^2 - 1$,

$$P_2 = X^2 - 2, \quad P_3 = X^2 + 2, \quad P_4 = X^2 + X + 1, \quad P_5 = X^4 + X^2 + 1$$

Test 326

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 sont les zéros de $P = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

Trouver les zéros de $Q = X^4 - 2X^3 + 3X^2 + 1$ et de $R = X^4 + 3X^2 + 2X + 1$.

On pourra remarquer que $P(X) = Q(-X)$ et que $R(X) = X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$.

Test 327

Soit $P = \frac{3}{2}(X-1)(X-2) - 2(X-1)(X-3) + \frac{1}{2}(X-2)(X-3) - X$.

- Sans développer P , peut-on majorer son degré ?
- Toujours sans développer P , calculer $P(1), P(2)$ et $P(3)$.
- Que pouvez-vous en déduire ?

Test 328

Un raisonnement indispensable :

Soit $P = 2X^3 - 9X^2 + 14X - 5 \in \mathbb{R}[X]$ Calculer $\tilde{P}_{\mathbb{C}}(2-i)$.

Peut-on en déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$?

On n'oubliera pas que si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est racine de P à coefficients réels, alors son conjugué aussi.

Test 329

Comment éviter de longs calculs ?

- Trouver un polynôme simple de degré 2 à coefficients entiers ayant $1 + \sqrt{2}$ pour zéro.
- $P = X^8 + X^7 - 6X^6 - 6X^5 + 5X^4 - 8X^3 - 4X^2 + 6X + 1$.
Utiliser une division euclidienne pour obtenir $\tilde{P}(1 + \sqrt{2})$.

12.3.3 Zéros multiples

$a \in \mathbb{K}$ est un zéro d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ de A ssi

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X], \quad A = (X - a)^k Q \text{ avec } \tilde{Q}(a) \neq 0$$

Un zéro multiple est un zéro d'ordre $k \geq 2$.

k est l'ordre de multiplicité du zéro.

Tout zéro d'un polynôme A non nul admet un ordre unique.

$$\text{C'est } \max \{k \in \mathbb{N}^* \mid (X - a)^k \mid A\}$$

sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$ majoré par $\deg A$.

Test 330 a est un zéro d'ordre k de P . Est-ce un zéro de P^2 ? de quel ordre?

Test 331 a est un zéro d'ordre k de P .
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses?

$$(X - a)^{k-1} \mid P \quad (X - a)^k \mid P \quad (X - a)^{k+1} \mid P$$

Test 332 Que peut-on dire de a si $P = (X - a)^k Q$? ($k \in \mathbb{N}^*$)

Th. ▷ Zéros multiples et factorisation

Si $a_1, a_2, \dots, a_m$ sont des zéros distincts de $P \in K[X]$

d'ordres respectifs $p_1, p_2, \dots, p_m$, alors $\prod_{k=1}^m (X - a_k)^{p_k}$ divise P

Conséquences :

- Dans ces conditions, si $P \neq 0$, alors $\deg(P) \geq \sum_{k=1}^m p_k$

c'est-à-dire

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n zéros comptés avec leur ordre de multiplicité.

- Si de plus $\deg(P) = \sum_{k=1}^m p_k$, alors $P = \alpha \prod_{k=1}^m (X - a_k)^{p_k}$

où α est le coefficient dominant de P .



Prenons comme convention qu'un zéro d'ordre 0 d'un polynôme n'en est pas racine.

Th. ▷ Zéros multiples et dérivation

$\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

$a \in \mathbb{K}$ est un zéro d'ordre $k \geq 1$ de $A \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ est un zéro de } A \\ a \text{ est un zéro d'ordre } k-1 \text{ de } A' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ est un zéro de } A, A', A^{(2)}, \dots, A^{(k-1)} \\ a \text{ n'est pas un zéro de } A^{(k)} \end{cases}$$

Attention : ce théorème peut être faux avec d'autres corps.

Test 333 Que peut-on dire si $A \neq 0$ vérifie $\tilde{A}(a) = \tilde{A}'(a) = \dots = \tilde{A}^{(k)}(a) = 0$?

Test 334 Trouver un polynôme non constant P tel que $\tilde{P}(1) \neq 0$
et $\tilde{P}'(1) = \tilde{P}''(1) = \tilde{P}^{(3)}(1) = 0$

Test 335 $a \in \mathbb{K}$. Écrire tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$, de degré 3 où
-1- a est un zéro d'ordre 3 de P **-2-** a est un zéro d'ordre 2 de P

Test 336 $P = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$. Vérifier que 2 est un zéro de P . quel est son ordre? En déduire une factorisation de P .

Test 337

$P = X^5 - X^4 - 2X^3 + 2X^2 + X - 1$. 1 est un zéro de P . Quel est son ordre ? Quel est l'autre zéro de P ? quel est son ordre ?

Test 338

a est un zéro d'ordre $k \geq 1$ de P . Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?
 $P^{(k-1)}(a) = 0$ $P^{(k)}(a) = 0$ $P^{(k+1)}(a) = 0$

12.4 Polynômes scindés

12.4.1 Définition

$A \in \mathbb{K}[X]$ non constant est scindé⁹ (ou dissocié) s'il peut s'écrire

$$A = \lambda \prod_{k=1}^n (X - a_k) \quad \lambda, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$$

Test 339

Les polynômes $X^2 - 1$, $X^2 - 2$, $X^2 + 1$, $X^2 + 2$ sont-ils scindés dans $\mathbb{Q}[X]$? dans $\mathbb{R}[X]$? dans $\mathbb{C}[X]$?

12.4.2 Relations entre coefficients et racines

Développons

- $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) = X^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)X + \alpha_1\alpha_2$
- $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3) = X^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)X^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)X - \alpha_1\alpha_2\alpha_3$
- plus généralement :

Important:

$$\prod_{k=1}^n (X - \alpha_k) = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \dots + (-1)^k \sigma_k X^{n-k} + \dots + (-1)^n \sigma_n$$

où les σ_k sont les expressions symétriques élémentaires¹⁰ de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

σ_k est la
"somme des produits k par k "
des α_i

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{1 \leq i_1 \leq n} \alpha_{i_1} \\ \sigma_2 &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_k &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k} \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_n &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_n} = \prod_{k=1}^n \alpha_k \end{aligned}$$

Test 340

Écrire toutes les expressions symétriques élémentaires de α_1, α_2 ,
puis de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, puis de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

9. Certains auteurs font la distinction entre $X^2 - 1$ qui est scindable et $(X - 1)(X + 1)$ qui est scindé.

10. On dit aussi fonction symétrique élémentaire, ou polynôme symétrique élémentaire

Th. ▷ Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé

Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k = \lambda \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$ est scindé, alors

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

Test 341

Quelles sont les expressions symétriques élémentaires de $(-1, -1, 1, 2)$?
Vérifier vos résultats en développant $(X+1)^2(X-1)(X-2)$.

Test 342

Vérifier que 1, 2 et 3 sont des zéros de $P = X^4 - X^3 - 19X^2 + 49X - 30$.
Sans factoriser, trouver un autre zéro de P .

Test 343

- Écrire toutes les relations entre a, b, c et les zéros de $P = aX^2 + bX + c$ ($a \neq 0$)
- Même question avec $P = X^3 + pX + q$,
puis avec $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ ($a \neq 0$)

12.4.3 Notions sur les fonctions symétriques

Ce paragraphe n'est pas explicitement au programme.

Aucune notion théorique sur les fonctions symétriques n'est exigible.

Une fonction $f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variable est

- **symétrique** ssi pour toute bijection $\sigma : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$
 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$
- **antisymétrique** ssi pour tout échange $x_i \leftrightarrow x_j$ ($i \neq j$)
 $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$

Test 344

Quelles sont les expressions symétriques de a_1, a_2, a_3 ?

$$\begin{array}{lll} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1^2 + a_1 a_2 + a_1 a_3 & a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + a_3^2 a_1 \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} & \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_1} & a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \end{array}$$

Intérêt :

- On démontre que, si $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une expression rationnelle symétrique, elle peut s'exprimer uniquement en fonction des expressions symétriques élémentaires.
- Ceci permet de calculer certaines expressions qui font intervenir les solutions d'une équation algébrique, **sans connaître ces solutions**.

Test 345

x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $x^2 + ax + b = 0$.
Calculer $x_1^2 + x_2^2$, $x_1^3 + x_2^3$, $x_1^4 + x_2^4$,

Test 346

x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $x^2 + ax + b = 0$.
Former une équation du second degré dont les solutions sont $\frac{x_1}{x_2}$ et $\frac{x_2}{x_1}$.

(Voir l'exercice "à faire absolument".)



12.5 Exercices

Exercice 1

Division euclidienne de $P = X^4 + 6X^3 + 10X^2 + 3X - 6$ par $X^2 + 3X$.
En déduire la décomposition de P en produit de polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2

Soit $P = 1 + X(X+1)(X+2)(X+3)$.

1. Calculer le reste de la division euclidienne de P par P' (polynôme dérivé).
2. Montrer que P' est divisible par ce reste.
3. En déduire une factorisation de P .

Exercice 3

Incontournable...

1. α et β sont les restes de la division euclidienne de P par $X - a$ et $X - b$ ($a \neq b$).
Trouver le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.
2. Généraliser avec $(X - a)(X - b)(X - c)$.

Exercice 4

Les grands classiques : étudier, dans $\mathbb{C}[X]$ la divisibilité de :

1. $X^n \sin(\theta) - X \sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)$ par $X^2 - 2X \cos \theta + 1$
2. $X^{2n} - 2X^n \cos(n\theta) + 1$ par $X^2 - 2X \cos \theta + 1$
3. $X^n - a^n$ par $X^p - a^p$

Exercice 5

Résoudre l'équation $x^5 - 13x^4 + 67x^3 - 171x^2 + 216x - 108 = 0$ sachant qu'elle a des racines réelles multiples

Exercice 6

Déterminer les réels m, n et p pour que l'équation $x^6 + mx^4 + 10x^3 + nx + p = 0$ ait une racine réelle quadruple.
Quelles sont les racines du polynôme.

Exercice 7

A faire absolument... x_1, x_2 et x_3 sont les zéros de $X^3 + pX + q$.

1. Calculer $x_1 + x_2 + x_3$ et $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
2. Comment peut-on évaluer $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ sans calculs (ou presque!) ?
3. Même question pour $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

Exercice 8

Décomposer le polynôme $P = X^4 + 12X - 5$ en produit de deux polynômes de degré 2, sachant que deux de ses zéros (complexes) ont pour somme 2.

Exercice 9

Soit l'équation à coefficients entiers $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ avec $a_0 \neq 0$.

Montrer que si le rationnel $\frac{p}{q}$ (donné sous forme irréductible) est solution de l'équation, alors p divise a_n et q divise a_0 .

Applications : trouver (si elles existent), les racines rationnelles de $3x^3 + 8x^2 + 12x - 5 = 0$ puis de $x^3 - x - 1 = 0$ et enfin de $2x^6 + x^5 - 9x^4 - 6x^3 - 5x^2 - 7x + 6 = 0$.

Exercice 10

Trouver trois complexes a, b, c qui vérifient
$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 8 \end{cases}$$

12.6 Exercices Complémentaires

Exercice 1

1. En développant de deux manières différentes le polynôme $(1+X)^n(1+X)^m$, montrer que pour $0 \leq k \leq \min(m, n)$,
$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}.$$
2. Développer de deux manières différentes le polynôme $(1+X)^n(1-X)^n$: préciser le coefficient du terme de degré n , et simplifier

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2$$

Exercice 2

1. Donner deux expressions du polynôme dérivée de $(1+X)^n$.
En déduire la valeur de $A_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.
2. Développer le polynôme $X(1+X)^n$, et exprimer son polynôme dérivé de deux façons.
Quelle égalité remarquable obtient-on pour $X = 1$? $X = -1$?

Exercice 3

On désire calculer rapidement $P(\varphi)$ avec $P = X^5 + 2X^4 - X^3 - 2X - 6$ et $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Effectuer la division euclidienne de P par $F = X^2 - X - 1$.
2. Calculer $P(\varphi)$.
3. S'inspirer de ce qui précède pour indiquer une méthode permettant de calculer rapidement $S(\alpha)$ avec $\alpha = 3 + \sqrt{2}i$ et $S = 2X^6 - 11X^5 + 3X^4 + 15X^3 - 34X^2 + 47X - 23$.

Exercice 4

A l'aide de la formule de Taylor, déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par $(X-1)^3$.

On rappelle cette formule : si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n , alors, pour tout $a \in \mathbb{K}$,
$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

Exercice 5

1. Montrer que 2 est racine du polynôme $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$.
Quel est son ordre de multiplicité ?
2. Quelles sont les autres racines de P ?

Exercice 6

Quels sont les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ qui soient T -périodiques ($T \in \mathbb{C}^*$), (ie) vérifiant : $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z+T) = P(z)$?

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$: montrer que le polynôme $A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ est divisible par $B = (X-1)^2$. Déterminer le quotient dans la division euclidienne de A par B .

Exercice 8

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

1. Montrer que, si a est une racine éventuellement complexe de P , alors a^2 et $(a+1)^2$ sont aussi racines de P .
2. Montrer que 0 n'est pas racine de P .
3. Montrer que, si a est une racine de P , alors $|a+1| = 1 = |a|$.
4. En déduire les racines de P et sa forme.

Exercice 9

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

- | | | | |
|---------------------|--|--|--------------------------------|
| 1. $P = X^4 - 1$ | | 5. $P = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ | 7. $P = (1 - X^2)^3 + 8X^3$ |
| 2. $P = X^5 - 1$ | | 6. $P = X^4 - 2\cos(\varphi)X^2 + 1$ | 8. $P = (1 - X^2)^3 - 8X^3$ |
| 3. $P = X^4 + 1$ | | | |
| 4. $P = X^{2n} - 1$ | | | 9. $P = X^6 + 3X^4 + 3X^2 + 1$ |

Exercice 10

Soit $P = X^5 + 1$ et $Q = \frac{P}{X+1}$. Montrer que, si z est une racine de Q , alors $Z = z + \frac{1}{z}$ vérifie une équation du second degré. Puis factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.