

Chapitre 10

Fonctions d'une variable réelle

◦ Dans ce chapitre, nous supposons f définie sur I , intervalle non dégénéré de $\mathbb{R}$.

10.1 Fonction réelle d'une variable réelle

10.1.1 Algèbre $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

f est une fonction **d'une variable réelle** si elle est définie sur une partie de $\mathbb{R}$.

f est une fonction **numérique** si elle est soit $\begin{cases} \text{réelle} & (\text{à valeurs dans } \mathbb{R}) \\ \text{complexe} & (\text{à valeurs dans } \mathbb{C}) \end{cases}$

L'ensemble des fonctions numériques définies sur E est noté $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ ou $\mathbb{K}^E$

- La plupart des résultats ne sont valables que sur un intervalle.
- Comme dans la pratique, l'ensemble de définition est généralement une réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$, il suffit d'appliquer ces résultats "intervalle par intervalle".

Les opérations usuelles (addition, multiplication par un scalaire, produit) confèrent à $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ une structure d'algèbre commutative non intègre.

Remarque

Dans le produit λf d'une fonction par un scalaire, il est possible d'assimiler λ à la fonction constante $x \mapsto \lambda$. Les résultats relatifs au produit de deux fonctions sont donc applicables au produit d'une fonction par un scalaire.

10.1.2 Ordre sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Sauf mention contraire, f et g sont des fonctions réelles définies sur I

• Relation d'ordre sur les fonctions réelles

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in I, f(x) \leq g(x)$$

Ceci définit une relation d'ordre partiel sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

- Cet ordre est compatible avec l'addition et le produit par une fonction positive.

Attention

Ne pas confondre $f \neq \mathbf{0}$ avec "f ne s'annule pas".

$$f \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \exists x \in E, f(x) \neq 0$$

$$f \text{ ne s'annule pas} \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) \neq 0$$

Test 253

Donner un exemple de deux fonctions non comparables, et un exemple où $f \leq g$ sans avoir $\forall x, f(x) < g(x)$.
Si besoin, la réponse pourra n'être que graphique.

- Valeur absolue¹ $|f|$ est définie par $\forall x \in I, |f|(x) = |f(x)|$.

- **borne supérieure, inférieure**
 - $\forall x \in I, \quad \sup(f, g) : x \mapsto \max(f(x), g(x))$
 - $\forall x \in I, \quad \inf(f, g) : x \mapsto \min(f(x), g(x))$
 - Remarquer le "max" qui devient un "sup"
(En fait, ce n'est pas une définition.)

10.1.3 Fonctions bornées

La fonction réelle $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est **majorée** ssi $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$
(c'est-à-dire $f \leq M$ où M est une fonction constante)

La fonction réelle $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est **minorée** ssi $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, m \leq f(x)$
(c'est-à-dire $m \leq f$ où m est une fonction constante)

La fonction réelle $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est **bornée** ssi f est majorée et minorée.

Th. ▷ **Caractérisation des fonctions bornées**

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Ceci permet une extension de la définition aux fonctions complexes :
 $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ est bornée ssi $|f|$ est majorée (module)

Test 254

Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ des fonctions numériques bornées sur I est un sous-anneau de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{K}), +, \times)$.

10.1.4 Borne supérieure, maximum, etc

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ présente un **maximum absolu**² en $a \in I \Leftrightarrow \forall x \in I, f(x) \leq f(a)$
 $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ présente un **maximum relatif** en $a \in I$
 $\Leftrightarrow \exists \eta > 0, \forall x \in I \cap]a - \eta, a + \eta[, f(x) \leq f(a)$
 (f présente un maximum absolu sur un voisinage de a .)

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ présente un **minimum absolu**³ en $a \in I \Leftrightarrow \forall x \in I, f(x) \geq f(a)$
 $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ présente un **minimum relatif** en $a \in I$
 $\Leftrightarrow \exists \eta > 0, \forall x \in I \cap]a - \eta, a + \eta[, f(x) \geq f(a)$
 (f présente un minimum absolu sur un voisinage de a .)

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ présente un **extremum** (absolu ou relatif) en $a \in I$
 ssi f présente un maximum ou un minimum en a .

Test 255

Trouver des exemples de fonctions réelles qui :
 -1- ne présente ni maximum, ni minimum
 -2- présente un maximum mais pas de minimum
 -3- plusieurs maximum relatifs mais pas de maximum absolu
 Si besoin la réponse pourra n'être que graphique.

Th. ▷ **Fonction majorée et borne supérieure**

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ majorée, $\Rightarrow f(I)$ admet une borne supérieure.

C'est la **borne supérieure** de f , notée $\sup_{x \in I} f(x)$ ou $\sup_I f$

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ minorée, $\Rightarrow f(I)$ admet une borne inférieure.

C'est la **borne inférieure** de f , notée $\inf_{x \in I} f(x)$ ou $\inf_I f$

Test 256

Montrer que si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ présente un maximum absolu en $a \in I$, alors $f(a) = \sup_I f$.
 Que pensez-vous de la réciproque autrement dit si f possède une borne supérieure, est-ce un maximum?

1. Applicable en **module** aux fonctions complexes.
2. Ce maximum est parfois noté $\max_{x \in I} f(x)$ ou $\max_I f$.
3. Ce minimum est parfois noté $\min_{x \in I} f(x)$ ou $\min_I f$.

Test 257

$f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ vérifient $f \leq g$ (I non dégénéré). Montrer que g majorée $\Rightarrow f$ majorée, et que $\sup_I f \leq \sup_I g$. Que peut-on dire si $f < g$?

10.1.5 Fonctions réelles monotones

La fonction réelle $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ est croissante⁴ sur E ssi

$$\forall (x, y) \in E^2, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

f est strictement croissante⁵ sur E ssi

$$\forall (x, y) \in E^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

La fonction réelle $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ est décroissante sur E ssi

$$\forall (x, y) \in E^2, x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

f est strictement décroissante sur E ssi

$$\forall (x, y) \in E^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

f est monotone sur E (strictement ou non) si et seulement si f est croissante ou décroissante sur E .

A RETENIR

Une fonction croissante conserve l'ordre
Une fonction décroissante renverse l'ordre

Test 258

- la négation de " f croissante sur E " est-elle " f décroissante sur E " ?
- Si f est croissante sur E_1 et E_2 , peut-on dire que f est croissante sur $E_1 \cup E_2$?
- Si f est croissante sur E_1 et E_2 , peut-on dire que f est croissante sur $E_1 \cap E_2$?
- Qu'en est-il si E_1 et E_2 sont deux intervalles et sont non disjoints ?

Test 259

Existe-t-il des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ monotones sur aucun intervalle non dégénéré ? On pourra par exemple penser à la fonction caractéristique d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Test 260

Montrer que la somme de deux fonctions croissantes est croissante.
Peut-on remplacer "croissante" par "monotone" ?

Test 261

Sur I , f est croissante et $f \leq g$. Peut-on en déduire que g est croissante ?

Th. ▷ Sens de variations d'une composée

Soit les fonctions réelles $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, \mathbb{R})$ sont monotones

- de même sens, alors $g \circ f$ est croissante
- de sens contraires, alors $g \circ f$ est décroissante

Il est impératif que l'image de E par f soit incluse dans l'ensemble de départ de g .

Test 262

Que penser de la réciproque ? dans les mêmes conditions de définition, a-t-on $g \circ f$ monotone $\Rightarrow f$ et g monotones ? On pourra chercher un contre-exemple avec la fonction indicatrice $\chi_{\mathbb{Q}}$

Test 263

Quel est le sens de variations sur $I = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ de $f : x \mapsto \sin x$?
de $g = 1 + f$? de $f \circ f$?

IMPORTANT :

Les transformations d'inégalités (du genre $x \leq y \Rightarrow -y \leq -x$) sont en fait des conséquences du sens de variation. Il ne faut pas les retenir comme recettes, mais comme utilisation d'une fonction monotone.



4. On dit parfois " f est croissante au sens large".

5. On dit aussi "croissante au sens strict".

Test 264

Rappeler le résultat (et éventuellement les conditions) pour transformer $x \leq y$ par passage

- | | | | |
|-----------------|---------------------|------------|--------------|
| • à l'opposé | • à l'inverse | • au carré | • au cube |
| • au logarithme | • à l'exponentielle | • au sinus | • au cosinus |

Th. ▷ **Utilisation du taux d'accroissement :**

- $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ est croissante ssi $\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$
 ◦ $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ est décroissante ssi $\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 0$

10.1.6 Parité

La fonction $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ est paire ssi

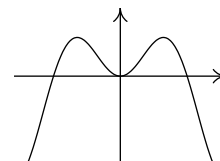
$$\forall x, x \in E \Rightarrow -x \in E \text{ et } f(-x) = f(x)$$

La fonction $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ est impaire ssi

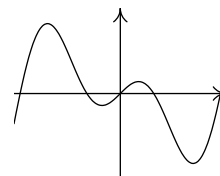
$$\forall x, x \in E \Rightarrow -x \in E \text{ et } f(-x) = -f(x)$$

Propriétés :

- En repère orthogonal,
le graphe d'une fonction paire
admet $y'Oy$ pour axe de symétrie



- En repère quelconque,
le graphe d'une fonction impaire
admet O pour centre de symétrie



- Si $E \subset \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0,
 $\mathcal{P}(E, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions paires
 $\mathcal{I}(E, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions impaires

alors

$$\mathcal{P}(E, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{I}(E, \mathbb{R}) = \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$$

(voir le chapitre "Espaces vectoriels".)

Pour une autre symétrie :

- La droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie de la représentation graphique de f

$$\Leftrightarrow \forall x \in E, 2a - x \in E \text{ et } f(2a - x) = f(x)$$

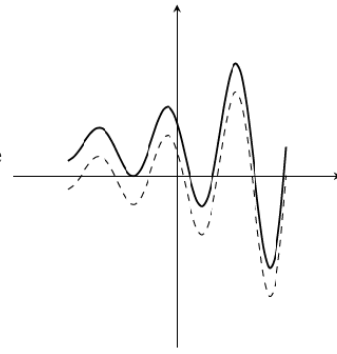
- Le point de coordonnées (a, b) est centre de symétrie de la représentation graphique de f

$$\Leftrightarrow \forall x \in E, 2a - x \in E \text{ et } f(2a - x) + f(x) = 2b$$

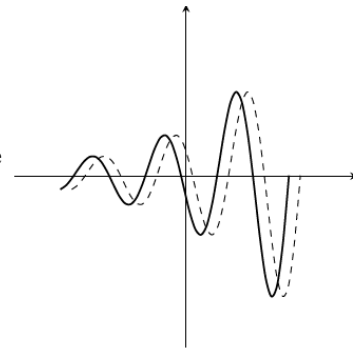
Fonctions associées :

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Son graphe est en trait pointillé et le graphe de la fonction associée est en trait plein, ceci dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

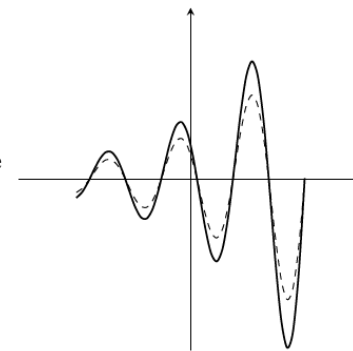
- Soit a un réel, le graphe de la fonction : $x \mapsto f(x) + a$ est l'image du graphe de f par la translation de vecteur $a \vec{j}$.



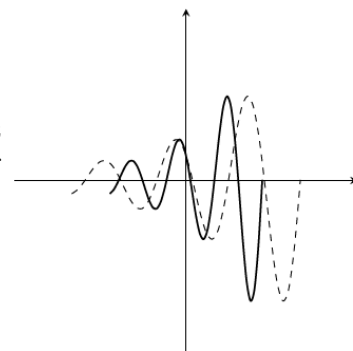
- Soit a un réel, le graphe de la fonction : $x \mapsto f(x + a)$ est l'image du graphe de f par la translation de vecteur $-a \vec{i}$.



- Soit a un réel, le graphe de la fonction : $x \mapsto af(x)$ est l'image du graphe de f par la dilatation verticale de facteur a .



- Soit a un réel non nul, le graphe de la fonction : $x \mapsto f(ax)$ est l'image du graphe de f par la dilatation horizontale de facteur $\frac{1}{a}$.



Test 265

Quelles sont les particularités géométriques des graphes de f lorsque :

$f(-x) = f(x)$? $f(a-x) = f(x)$? $f(x-a) = f(x)$?

Même question en remplaçant " $= f(x)$ " par " $= -f(x)$ "

10.1.7 Fonctions périodiques

$T \in \mathbb{R}$ est une période de $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ ssi

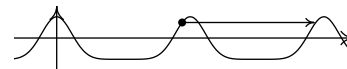
$$\forall x, \quad x \in E \Leftrightarrow x + T \in E \text{ et } f(x + T) = f(x)$$

f est périodique ssi f admet au moins une période T non nulle.

On dit alors que f est T -périodique⁶.

6. Ou encore f est périodique de période T .

En repère quelconque,
le graphe d'une fonction T -périodique
est invariant par la translation de vecteur $T \vec{i}$



Propriétés des périodes

- Si T_1 et T_2 sont deux périodes de f , alors f est $(T_1 + T_2)$ -périodique.
- Si T est une période de f alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, f est nT -périodique.
- L'ensemble $\mathcal{T}$ des périodes de f est un groupe additif.
- Si elle existe, la plus petite période strictement positive de f est appelée "période fondamentale" de f .

Propriétés des fonctions périodiques

- Si f est T -périodique, alors toute composée $g \circ f$ est T -périodique.

Test 266 Une fonction constante est-elle périodique ? Quelle est sa période fondamentale ?

Test 267 Montrer : f 2-périodique et g 3-périodique $\Rightarrow f + g$ 6-périodique.
Peut-on généraliser ? (Attention au piège !)

Test 268 Montrer que si f est 3-périodique et 7-périodique alors f est 1-périodique.

Test 269 Comment limiter l'ensemble d'étude de la fonction f qui vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}$
 $f(x + 10) = -f(x)$ et $f(6 - x) = 2 - f(x)$

10.2 Étude locale

Sauf mention contraire, dans les paragraphes qui suivent, f est une fonction réelle.

10.2.1 Limite, continuité en un point

La définition intuitive de " ℓ est la limite de $f(x)$ quand x tend vers a " est

*On peut rendre $f(x)$ arbitrairement proche de ℓ
à condition que x soit suffisamment proche de a*

Remarque : cette notion n'a d'intérêt que si l'ensemble $\mathcal{D}_f$ de définition de la fonction contient des éléments $x \neq a$ arbitrairement proches de a .

Dans la pratique, f est définie sur I , ou sur $I - \{a\}$, où I est un intervalle non dégénéré qui contient a ou dont a est une borne (finie ou infinie).

Dans la suite de ce chapitre,

nous supposons cette dernière condition vérifiée.

Nous dirons que f est définie au voisinage de a , c'est-à-dire

- si $a \in \mathbb{R}$ (a fini)
 - $\exists \varepsilon > 0$, $]a - \varepsilon, a[\cup]a, a + \varepsilon[\subset \mathcal{D}_f$
 - $\exists \varepsilon > 0$, $]a - \varepsilon, a[\subset \mathcal{D}_f$ (voisinage à gauche)
 - $\exists \varepsilon > 0$, $]a, a + \varepsilon[\subset \mathcal{D}_f$ (voisinage à droite)
- si $a = +\infty$ $\exists m \in \mathbb{R}$, $[m, +\infty[\subset \mathcal{D}_f$
- si $a = -\infty$ $\exists m \in \mathbb{R}$, $] -\infty, m] \subset \mathcal{D}_f$

Ceci donne 9 cas différents, suivant que a et ℓ sont finis ou infinis :

$\lim_a f = \ell$	$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, x - a \leq \eta \Rightarrow f(x) - \ell \leq \varepsilon$
$\lim_{+\infty} f = \ell$	$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in E, x \geq A \Rightarrow f(x) - \ell \leq \varepsilon$
$\lim_{-\infty} f = \ell$	$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in E, x \leq A \Rightarrow f(x) - \ell \leq \varepsilon$
$\lim_a f = +\infty$	$\Leftrightarrow \forall B \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in E, x - a \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq B$
$\lim_{+\infty} f = +\infty$	$\Leftrightarrow \forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in E, x \geq A \Rightarrow f(x) \geq B$
$\lim_{-\infty} f = +\infty$	$\Leftrightarrow \forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in E, x \leq A \Rightarrow f(x) \geq B$
$\lim_a f = -\infty$	$\Leftrightarrow \forall B \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in E, x - a \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq B$
$\lim_{+\infty} f = -\infty$	$\Leftrightarrow \forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in E, x \geq A \Rightarrow f(x) \leq B$
$\lim_{-\infty} f = -\infty$	$\Leftrightarrow \forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in E, x \leq A \Rightarrow f(x) \leq B$

Remarques :**Comme pour les suites :**

- On peut utiliser indifféremment des inégalités strictes ou larges
- On peut imposer des conditions :
valeur maximum positive sur ε ou sur η
valeur minimum sur A ou B en $+\infty$
valeur maximum sur A ou B en $-\infty$
- Pour les calculs, on procède souvent par conditions suffisantes

Test 270Peut-on dire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} = x$?**Test 271**Utiliser la définition (les ε) pour montrer

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^5 = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$$

Important:Définition : f est continue en $a \in E$ ssi $\lim_a f = f(a)$.(La négation de "f continue en a" est "f discontinue en a")

10.2.2 Propriétés

Unicité de la limite :⁷

- si elle existe, la limite de f en a est unique.

**Limite d'une restriction :**⁷

- si f admet une limite en $a \in E$, alors la restriction $f|_{E-\{a\}}$ admet la même limite en a .

Important:**Limite et continuité :**⁷

- En $a \in \mathbb{R}$, si f est définie,
 f admet une limite ssi elle est continue en a
- En $a \in \mathbb{R}$, si f n'est pas définie,
 f admet une limite finie ssi elle est prolongeable par continuité en a

**Limite et fonction bornée :**⁷

- si f admet une limite finie en a , alors f est bornée sur un voisinage de a .

(On dit que f est localement bornée)

Test 272

Montrer que la réciproque est fautive en prenant $a = +\infty$ et en trouvant une fonction bornée au voisinage de $+\infty$ mais ne possédant pas de limite en $+\infty$.

Limite et signe :

- si f admet une limite strictement positive en a ,
elle est localement minorée par un réel strictement positif.

Th. $\triangleright$ **Limite séquentielle**⁷

Soit $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ définie au voisinage de a .

$f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ admet une limite en a ssi
pour toute suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $(u_n) \rightarrow a \Rightarrow (f(u_n))$ admet une limite.

Alors : pour toutes les suites nous avons $(f(u_n)) \rightarrow \lim_a f$

Remarques

- le théorème n'exige pas de montrer que toutes les suites $(f(u_n))$ ont la même limite
- C'est souvent une méthode efficace pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite
- Il justifie le calcul des "limites possibles" d'une suite récurrente⁸

Test 273

Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x$ n'a pas de limite quand $x \rightarrow +\infty$

10.2.3 Limite à droite et à gauche

$f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{K})$.

La limite à droite de f en a ⁹ est la limite de sa restriction à $E \cap]a, +\infty[$.

$$\lim_a f|_{E \cap]a, +\infty[} \text{ se note }^{10} \quad \lim_{a^+} f = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$$

La limite à gauche de f en a ¹¹ est la limite de sa restriction à $E \cap]-\infty, a[$.

$$\lim_a f|_{E \cap]-\infty, a[} \text{ se note }^{12} \quad \lim_{a^-} f = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$$

Test 274

Traduisez "avec des ε ", $\lim_{a^+} f = \ell$ et $\lim_{a^-} f = -\infty$

Remarque :

- Contrairement à la notion initiale de limite :
- le comportement de f en a n'intervient pas
 - En particulier, il est possible que $\lim_{a^+} f \neq f(a)$

Th. $\triangleright$ **Lien entre les différentes limites**

Soit $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ et $a \in E$ ¹³.

$$\lim_a f = \ell \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = \ell \\ \text{et} \begin{cases} \text{soit } f \text{ n'est pas définie en } a \\ \text{soit } f(a) = \ell \end{cases} \end{cases}$$

Test 275

Que pensez-vous de $\lim_{x \rightarrow 0} E(x)$? $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{E(x)}{x}$?

7. Valable également pour les fonctions complexes.

8. voir ?? page ??

9. N'a de sens que si f est définie au voisinage à droite de a ($\mathcal{D}_f \supset]a, a + \eta[$)

10. Certains ouvrages utilisent également la notation $f(a^+)$

11. N'a de sens que si f est définie au voisinage à gauche de a ($\mathcal{D}_f \supset]a - \eta, a[$)

12. Certains ouvrages utilisent également la notation $f(a^-)$

13. Ceci assure que a est adhérent à droite et à gauche.

Test 276

Représenter graphiquement sur $] -1, 3[$ la fonction $f : x \mapsto E(x) + E(-x)$.
 Cette fonction admet-elle une limite en 1 ? une limite à droite en 1 ? une limite à gauche en 1 ?

Important :

$f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ est continue à droite (resp. à gauche) en $a \in E$
 $\text{ssi} \quad \lim_{a^+} f = f(a)$ (resp. $\lim_{a^-} f = f(a)$).

**Remarques :**

- f est continue en $a \in E \Leftrightarrow f$ y est continue à droite et à gauche
- Si f est définie sur un intervalle (semi) fermé, la continuité aux bornes est en fait une continuité à droite ou à gauche.
- Ceci est surtout utilisé dans le cas d'une fonction définie par morceaux

Test 277

Étudier la continuité en 0 de f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-x}} & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{1-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

10.2.4 Opérations, composition

Se placer en 0 :

- f tend vers $\ell \in \mathbb{K}$ ¹⁴ en a ssi $f - \ell$ tend vers 0 en a
- f tend vers ℓ en $a \in \mathbb{R}$ ¹⁵ ssi $x \mapsto f(x+a)$ tend vers ℓ en 0

Ensemble des fonctions tendant vers 0 en a :

- Si $\lim_a f = \lim_a g = 0$, alors $\begin{cases} \lim_a (f+g) = 0 \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lim_a \lambda f = 0 \end{cases}$
- Si $\lim_a f = 0$ et g localement bornée au voisinage de a , alors $\lim_a fg = 0$
- Ceci est donc vrai si f et g tendent vers 0 en a

$\left\{ f \in \mathcal{F}(E, K) \mid \lim_a f = 0 \right\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$

Opérations sur les limites finies :

- $\lim_a f = \ell \Rightarrow \lim_a \lambda f = \lambda \ell$
- $\lim_a f = \ell$ et $\lim_a g = \ell' \Rightarrow \lim_a f + g = \ell + \ell'$
- $\lim_a f = \ell$ et $\lim_a g = \ell' \Rightarrow \lim_a fg = \ell \ell'$
- $\lim_a f = \ell \neq 0 \Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}(a), x \in V \Rightarrow f(x) \neq 0$ et $\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$

(La combinaison produit et inverse permet d'obtenir la limite d'un quotient.)

Opérations sur les limites infinies :

- $\lim_a f = \lim_a g = +\infty \Rightarrow \lim_a f + g = +\infty$
- $\lim_a f = \lim_a g = +\infty \Rightarrow \lim_a fg = +\infty$
- $\lim_a f = +\infty$ et $\lim_a g = \ell \neq 0 \Rightarrow \lim_a fg = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ell > 0 \\ -\infty & \text{si } \ell < 0 \end{cases}$
- $\lim_a f = +\infty \Rightarrow \lim_a \frac{1}{f} = 0$
- $\lim_a f = 0^+ \Rightarrow \lim_a \frac{1}{f} = +\infty$

14. Limite finie seulement.

15. Non utilisable pour une limite en $\pm\infty$

Remarques

- Remplacer f par $-f$ permet d'obtenir les résultats pour $-\infty$
- Mais il reste des situations où la conclusion est impossible :

ce sont les **formes indéterminées**¹⁶ $\infty - \infty, 0\infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Composition des limites :

Soit f et g définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$, telles que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$.

$$\text{Si } \lim_a f = b \text{ et } \lim_b g = \ell \quad \text{alors} \quad \lim_a g \circ f = \ell$$

Test 278

Comportement au voisinage de 0 de $\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^3 x - 1}$ et $\frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$

**Important:****Conséquence sur la continuité en un point :**

- f et g continues en $a \Rightarrow f + g, \lambda f, fg$ sont continues en a
- Si de plus $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est définie au voisinage de a , continue en a
- f continue en a et g continue en $f(a) \Rightarrow g \circ f$ continue en a

10.2.5 Limite et ordre

Grâce au théorème des limites séquentielles, les résultats déjà connus pour les suites sont également valables pour les fonctions réelles.

Si $f, g \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ sont définies au voisinage de a :

- $f \leq g, \lim_a f = \ell, \text{ et } \lim_a g = \ell' \Rightarrow \ell \leq \ell'$
- $f \leq g \text{ et } \lim_a f = +\infty \Rightarrow \lim_a g = +\infty$
- $f \leq g \text{ et } \lim_a g = -\infty \Rightarrow \lim_a f = -\infty$
- En particulier : $|f| \leq g \text{ et } \lim_a g = 0 \Rightarrow \lim_a f = 0$
- **Théorème des pincements :**

$$f \leq g \leq h \text{ et } \lim_a f = \lim_a h = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_a g = \ell$$

Test 279

Comportement de $\frac{E(x)}{x}$ en $+\infty$? et de $x E(\frac{1}{x})$ en 0 ?
On pourra utiliser l'encadrement $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < E(x) \leq x$.

10.2.6 Fonction monotone et limite**Th. > Limite aux bornes d'une fonction monotone**

$a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b$. Si $f \in \mathcal{F}([a, b[, \mathbb{R})$ est croissante alors :

- si f est majorée, elle admet une limite finie en b et :

$$\lim_b f = \sup f[a, b[$$

- si f n'est pas majorée, alors

$$\lim_b f = +\infty$$

Résultats facilement adaptables en a , et dans le cas où f est décroissante.

16. voir 9.2.5 page 233. Rappel : $0^0, \infty^0$ et 1^∞ sont également indéterminées.

Th. ▷ **Limite d'une fonction monotone**

$a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Si $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ est croissante alors :
 en tout point $x_0 \in]a, b[$, f admet une limite finie à droite et à gauche.

$$\text{De plus : } \lim_{x_0^-} f \leq f(x_0) \leq \lim_{x_0^+} f$$

Résultat facilement adaptable si f est décroissante.



10.3 Fonctions continues sur un intervalle

10.3.1 L'ensemble des fonctions continues sur I

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ est continue sur I ssi f est continue en tout point de I .

Plus précisément : f est continue en tout point de $\overset{\circ}{I}$
 aux bornes¹⁷, f est continue soit à droite, soit à gauche.

L'ensemble des fonctions continues sur I est noté¹⁸ $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$

Les propriétés sur la continuité en un point¹⁹ donnent :



- $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$
- $f, g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ et $\forall x \in I, g(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$
- $f \in \mathcal{C}^0(I, J)$ et $g \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{K}) \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$
- En particulier :
 - $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}) \Rightarrow |f| \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$
 - $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}) \Rightarrow f^+, f^- \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$
 - $f, g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}) \Rightarrow \sup(f, g), \inf(f, g) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$

Rappel

- $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$ et $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$
- Si l'une des bornes appartient à l'intervalle I ,
 en ce point la continuité n'est que d'un seul côté.
- Par conséquent : f continue sur $[a, b]$ et $]b, c]$ $\nRightarrow f$ continue sur $[a, c]$
- Mais : f continue sur $[a, b]$ et $[b, c] \Rightarrow f$ continue sur $[a, c]$
- Si f est continue sur I , sa restriction à tout intervalle $J \subset I$ est continue sur J
- $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ est prolongeable par continuité
 - sur $]a, b]$ ssi f admet une limite finie à gauche en b
 - sur $[a, b[$ ssi f admet une limite finie à droite en a

Test 280

Étudier la continuité de f définie par $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \cos x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

10.3.2 Image d'un intervalle

Th. ▷ **Théorème des valeurs intermédiaires**²⁰

17. Ceci ne concerne que les bornes qui appartiennent à I .

18. On dit que " f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I " (prononcer $\mathcal{C}$ zéro).

On peut éventuellement abréger la notation en $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ ou même $\mathcal{C}(I)$

19. voir 10.2.4 page 271 (conséquences sur la continuité)



Par une fonction réelle continue, l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$
 I intervalle : $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \Rightarrow f(I)$ est un intervalle.

Autre formulation :

Si f est continue sur $[a, b]$, f atteint toute valeur entre $f(a)$ et $f(b)$

$$f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \Rightarrow \forall y \in [f(a), f(b)] \quad \exists x \in [a, b], y = f(x)$$

(Ici, on ignore si $f(a) \leq f(b)$)

Test 281

Attention : la réciproque est fausse.

Trouver un exemple de fonction f non continue sur un intervalle I , où $f(I)$ est un intervalle. Si besoin, la réponse pourra n'être que graphique.

Test 282

Peut-on en déduire que si f est continue sur $[a, b]$, alors

$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$? (Justifier la réponse. Si besoin, la réponse pourra n'être que graphique.)

Test 283

Une généralisation : montrer que si f est continue non majorée sur $[a, +\infty[$, elle atteint toutes les valeurs supérieures à $f(a)$.

Résolution de certaines équations : Le théorème des valeurs intermédiaires permet de prouver l'existence d'une solution²¹ de $f(x) = \alpha$ (où f est continue) :

- $f(x) = \alpha$: (f continue)
il suffit de trouver a et b tels que $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$
- En particulier : si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires (f continue)
l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[a, b]$
- Par **dichotomie**²², on peut approcher arbitrairement une solutions.
- **Note :** l'unicité des solutions n'est pas assurée.

Par contre, si f est strictement monotone, alors f est injective.

Dans ce cas il y a unicité.

Test 284

Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution réelle.

Donner une valeur approchée de cette solution à $\frac{1}{10}$ près.

On n'oubliera pas de poser $f : x \mapsto \cos(x) - x$.

Th. ▷ Image d'un segment

Par une application continue, l'image d'un segment est un segment.

$$f \text{ continue sur le segment } [a, b] \Rightarrow f([a, b]) \text{ est un segment}$$

Conséquence importante :

Dans cette situation, une fonction continue atteint ses extremums

Remarques :

Par une fonction continue, l'image d'un intervalle est un intervalle.

- **Mais la nature de cette image est inconnue :**

- I borné $\nRightarrow f(I)$ borné
- I non borné $\nRightarrow f(I)$ non borné
- I fermé $\nRightarrow f(I)$ fermé
- I ouvert $\nRightarrow f(I)$ ouvert, etc.

- Seul, le cas de I segment permet de préciser la nature de l'image $f(I)$

Test 285

Trouver des exemples de fonctions continues et d'intervalles I tels que :

- I borné et $f(I)$ non borné
- I non borné et $f(I)$ borné
- I ouvert et $f(I)$ semi-ouvert
- I ouvert et $f(I)$ fermé
- I fermé et $f(I)$ non fermé

(On peut se contenter d'exemples sous forme graphique.)

21. Si le théorème prouve l'existence d'une solution, mais ne permet pas de savoir si elle est unique, et n'en donne pas la valeur. Ce théorème permet cependant d'en obtenir des valeurs approchées (par dichotomie).

22. voir 9.4.2 page 238.

10.4 Bijections continues

10.4.1 Image d'un intervalle par une fonction monotone

Si f est continue sur l'intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle.

Attention : la réciproque est fautive, même avec des hypothèses plus fortes :

- I et $f(I)$ intervalles n'impliquent pas f continue sur I
- Même dans le cas où, pour tout intervalle $I \subset E$, $f(I)$ est un intervalle, f n'est pas forcément continue sur E .

Pourtant, dans le cas des fonctions monotones . . .

Th. ▷ **Cas des fonctions monotones**

Soit une fonction réelle f , monotone sur l'intervalle I .

Si $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue sur I

Précisions sur la nature de $f(I)$

Si f une fonction réelle continue strictement croissante sur l'intervalle I :

- $I = [a, b] \Rightarrow f(I) = [f(a), f(b)]$
- $I = [a, b[\Rightarrow f(I) = [f(a), \lim_b f[\quad (b \in \overline{\mathbb{R}})$
- $I =]a, b] \Rightarrow f(I) =]\lim_a f, f(b)] \quad (a \in \overline{\mathbb{R}})$
- $I =]a, b[\Rightarrow f(I) =]\lim_a f, \lim_b f[\quad (a, b \in \overline{\mathbb{R}})$

(Facilement adaptable aux fonctions décroissantes.)

10.4.2 Fonctions continues monotones

Th. ▷ **Bijection continue monotone**

Si la fonction f est continue strictement monotone sur l'intervalle I

alors • f définit une bijection de I vers l'intervalle $J = f(I)$.^a

• $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue strictement monotone de même sens.

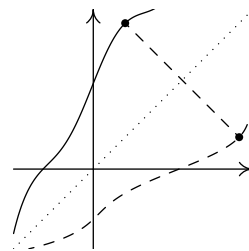
(On dit que f est un homéomorphisme²³)

a. Le paragraphe précédent précise alors la valeur exacte de $f(I)$.



Rappel :

En repère orthonormé, le graphe de f^{-1} se déduit de celui de f par la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice (d'équation $y = x$).



Bien distinguer l'origine des propriétés :

- f continue $\Rightarrow f(I)$ est un intervalle
 $\Rightarrow [f(a), f(b)] \subset f(I)$ (ou $[f(a), \lim_b f[, \dots)$
 - mais on n'a pas forcément l'égalité
 - f n'est pas forcément bijective



23. Homéomorphisme : bijection f telle que f et f^{-1} sont continues.

- f strictement monotone $\Rightarrow f$ injective (bijective de I dans $f(I)$)
 $\Rightarrow f(I) \subset [f(a), f(b)], [f(a), \lim_b f[...]$
 - mais on n'a pas forcément l'égalité
 - $f(I)$ n'est pas forcément un intervalle
 - f n'est pas nécessairement continue

Test 286

 Si f est continue sur $[a, b]$, peut-on dire que :

- $\forall x, x \in [a, b] \Rightarrow f(x) \in [f(a), f(b)]$?
- $\forall x, x \in [a, b] \Rightarrow f(x) \in f([a, b])$?

Test 287

 Soit $f : x \mapsto \sin x$.

- Calculer $f([-1, 3])$ ainsi que les coordonnées des extremums
- Trouver $[a, b]$ sur lequel f n'est pas monotone mais vérifie

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$



Voir l'exercice page ??

Une fonction continue bijective est nécessairement monotone.

10.5 Résumé pour les fonctions complexes

- Une fonction à valeurs complexes $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ est déterminée par la donnée de deux fonctions à valeurs réelles $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$: $\forall t \in E, f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$.
 f_1 est la partie réelle de f , notée $f_1 = \operatorname{Re}(f)$
 f_2 est la partie imaginaire de f , notée $f_2 = \operatorname{Im}(f)$
- L'application conjuguée de f est l'application $\bar{f} = f_1 - i f_2$
 (elle vérifie $\forall t \in E, \bar{\bar{f}}(t) = f(t)$)
- L'application module de f est l'application $|f| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$
 (elle vérifie $\forall t \in E, |f|(t) = |f(t)|$)
- La fonction complexe f est bornée ssi la fonction réelle $|f|$ est majorée.
 (f est bornée ssi $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont bornées.)
- Limite d'une fonction complexe :
 - Une fonction complexe qui admet une limite ℓ ssi
 $\operatorname{Re}(f)$ tend vers $\operatorname{Re}(\ell)$ et $\operatorname{Im}(f)$ tend vers $\operatorname{Im}(\ell)$.
 - Une fonction complexe qui admet une limite en un point
 est localement bornée en ce point
- Les opérations sur les limites (finies) sont applicables aux fonctions complexes.
- $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ a une structure de $\mathbb{C}$ -algèbre commutative non intègre.

10.6 Exercices

Symétrie, périodicité

Exercice 1

Découverte de certaines symétries

- En repère orthonormé, quelles sont les coordonnées (x', y') du symétrique par rapport à la première bissectrice de $M(x, y)$?
En déduire une propriété que doit vérifier la fonction f pour que sa représentation admette la première bissectrice pour axe de symétrie.
- Reprendre cette question avec la deuxième bissectrice.

Exercice 2

Somme de fonctions périodiques

1. Pour $T > 0$, on note $\mathcal{C}_{T\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions T -périodiques à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Montrer que, pour les lois habituelles, $\mathcal{C}_{T\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un anneau.
2. On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions f et g par $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \cos(\sqrt{2}x)$.
 - (a) Montrer que $f + g$ atteint un maximum global en 0.
 - (b) En déduire que $f + g$ n'est pas périodique.

Exercice 3

Les fonctions suivantes sont-elles majorées ? minorées ?

- | | |
|---|---|
| 1. $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto E(x)$ | 6. $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ |
| 2. $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ | 7. $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan \frac{\pi}{2+x^2}$ |
| 3. $\cos, \sin, \tan$ | 8. $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \exp(e^{ix})$ |
| 4. $\text{ch}, \text{sh}, \text{th}$ | |
| 5. $\text{Arccos}, \text{Arcsin}, \text{Arctan}$ | |

Limite et continuité locale

Exercice 4

Calculer $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ dans chacun des cas suivants.

- | | |
|---|--|
| 1. En $\pm\infty$, $f(x) = -x^2 + 3x - 1 + 2e^{-x}$ | 4. En $+\infty$, $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$ |
| 2. En $\pm\infty$, $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}$ | 5. En $+\infty$, $f(x) = \left[2x \ln \left(\frac{x-1}{x} \right) \right]$ |
| 3. En $x_0 = 0$, $f(x) = \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x}$ | 6. En $\pm\infty$, $f(x) = \left[x \left(e^{\frac{2}{x}} - 1 \right) \right]$ |

Exercice 5

Étudier la continuité sur leur ensemble de définition des fonctions suivantes.

- | | |
|--|---|
| 1. $g(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 12}$ | 5. $m(x) = \frac{x+2}{x^2 - x - 6}$ |
| 2. $h(x) = \frac{1}{ x - 1}$ | 6. $p(x) = \frac{\ln(x^2 - 4x + 3)}{e^x - e^{-2}}$ |
| 3. $j(x) = \ln((x-1)(2x^2 - x - 1)x^2)$ | 7. $q(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ |
| 4. $k(x) = \ln(3+x) - \ln(4-2x) - \ln 3$ | |

$$8. r(x) = \begin{cases} \ln(2x) & \text{si } x > \frac{1}{2} \\ 2x^2 - x & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 9. s(x) = \begin{cases} x \ln(x) + 2 & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases} \\ 10. t(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+4x}-1}{x} & \text{si } x \in \dots \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Exercice 6

Déterminer, pour chaque fonction ci-dessous, son ensemble de définition, ainsi que l'ensemble des points où la fonction est continue.

$$1. x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 2. x \mapsto |x| \\ 3. E \text{ (partie entière).} \\ 4. x \mapsto E(x) - E(2x). \end{array} \right.$$

Prolongement par continuité**Exercice 7**

Étudier si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité aux points indiqués.

- En 0, $f : x \mapsto \frac{e^{-3x} - 1}{x^3 + x}$
- En 0, $f : x \mapsto \frac{\ln(\sqrt{1-2x})}{1 - e^{2x}}$
- En 0 et en 1, $f : x \mapsto \frac{\sqrt{6-2x} - 2}{4x^2 - 4x}$
- En -5, $f : x \mapsto (x^2 + 5x) \ln(x + 5) - 3x^2$

Exercice 8

Soit la fonction

$$f(x) = \frac{\ln(4-3x)}{x^2 - x}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
- Étudier si la fonction f est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$ puis en $x_0 = 1$.

Exercice 9

Soit la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-3x^2} - 1}{x^2 + x^4}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
- Étudier si la fonction f est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$.

Exercice 10

Soit la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{7-x} - 3}{x + 2}$$

Mêmes questions qu'à l'exercice précédent, on étudiera pour finir si la fonction f est prolongeable par continuité en $x_0 = -2$.

Autour du théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 11

Soit f une fonction continue sur un segment $[a; b]$ à valeurs dans $[a; b]$. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x)$ est rationnel pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Exercice 13

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I . On suppose que f et g ne s'annulent pas sur I et que $f^2 = g^2$. Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Fonctions continues et bornées

Exercice 14

Montrer qu'une fonction continue et périodique définie sur $\mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 15

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer que f admet un extremum global.

Exercice 16

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a; b]$ telles que $0 < g < f$.

1. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $(1 + \lambda)g \leq f$.
2. Le résultat reste-t-il valable si les fonctions sont définies sur un intervalle quelconque ?

Exercice 17

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ croissante. Montrer que $A = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \geq x\}$ admet une borne supérieure (notée s).

En procédant par l'absurde, montrer que $f(s) = s$.

Bijection

Exercice 18

Pour tout entier naturel $n \geq 0$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^3 + nx + n$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, l'équation " $f_n(x) = 0$ " possède une et une seule solution α_n sur $\mathbb{R}$.
2. Comparer α_n à -1 et 0. Déterminer le signe de $f_{n+1}(\alpha_n)$: en déduire la monotonie de la suite (α_n) .
3. Démontrer que la suite (α_n) est convergente, de limite (-1).

Exercice 19

Une fonction continue bijective est nécessairement monotone :

Soit f injective continue sur I , et $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$.

1. Montrer qu'on a nécessairement $f(b)$ compris entre $f(a)$ et $f(c)$.
2. En déduire que f est monotone.

10.7 Exercices Complémentaires

Exercice 1

Trouver toutes les fonctions $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui sont :

1. à la fois croissantes et décroissantes.
2. à la fois monotones et périodiques.

Exercice 2

Soit f et g , deux fonctions bornées sur I .

1. Prouver que $f + g$ est bornée sur I et $\sup_I(f + g) \leq \sup_I(f) + \sup_I(g)$.
2. Prouver qu'il n'y a pas égalité en général (avec les fonction sin et cos).
3. Établir une inégalité similaire avec la notion d'Inf.

Exercice 3

Soit f et g , deux fonctions de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ paires (ou impaires)

Que peut-on dire de la parité de $f + g$, $f \times g$, de $f \circ g$ et de f^{-1} (f est bijective) ?

Exercice 4

1. Montrer que, pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $|\tan(x)| \geq |x|$.
2. Montrer que tan n'est pas une fonction lipschitzienne sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 5

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. On veut prouver que f est lipschitzienne.

1. Montrer : $\forall a \in \mathbb{R}, \frac{|a|}{1+a^2} \leq \frac{1}{2}$.
2. Montrer que pour tous $x \neq y$: $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq 1$.
3. Conclure

Exercice 6

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, avec I intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

Ci dessous, 4 propositions :

- (1) " $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I : |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ "
- (2) " $\exists \eta > 0, \forall \varepsilon > 0, \forall x \in I : |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ "
- (3) " $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \forall x \in I : |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ "
- (4) " $\forall \eta > 0, \exists \varepsilon > 0, \forall x \in I : |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ "

Préciser lesquelles de ces propositions entraînent l'une des propositions suivantes :

- (a) " f est bornée sur I " (b) " f est constante sur un voisinage de a "
- (c) " f est continue en a " (d) " f est bornée sur un voisinage de a "

Exercice 7

Étudier si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en 0 :

1. $f(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

3. $f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$

4. $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

5. $f(x) = \frac{|x|}{x}$

6. $f(x) = x^x$

Exercice 8

1. Montrer que tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.
2. Montrer que l'équation $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ possède au moins une solution réelle.
3. Montrer que l'équation $x^2 = \sin x$ possède une solution réelle autre que 0.
4. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, une fonction continue. Montrer que f a un point fixe.

Exercice 9

Soit I , un segment de $\mathbb{R}$ stable par une fonction f . On suppose que f vérifie la propriété :

$$\forall x, y \in I, x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

On se propose de prouver que f possède un, et un seul, point fixe sur I , sans utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

1. Justifier la continuité de f sur I .
2. S'il existe, justifier l'unicité d'un éventuel point fixe.
3. On définit la fonction g par $g(x) = |f(x) - x|$. Justifier l'existence d'un minimum pour g sur I . On pose $g(\alpha) = \inf_I(g)$.
4. A l'aide d'un raisonnement par l'absurde (comparer $g(f(\alpha))$ et $g(\alpha)$), prouver que $f(\alpha) = \alpha$.

