

Chapitre 9

Suites numériques

Suites réelles ou suites complexes ?

$\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné mais il est impossible de munir $\mathbb{C}$ d'une structure de corps totalement ordonné.

Dans ce chapitre, pratiquement tous les résultats qui ne font pas intervenir l'ordre sont applicables aussi bien aux suites réelles que complexes.

Pour les autres, l'introduction d'un module permet parfois l'extension au domaine complexe.

La présence d'un $\textcircled{R}$ dans la marge signale les résultats non valables dans $\mathbb{C}$

9.1 Généralités

9.1.1 Vocabulaire

Une suite numérique est une famille de réels¹ ou complexes² indexée par $\mathbb{N}$.

C'est donc une application $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Notations : u_n désigne l'image de n par u (notation indicielle)

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (et $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) désignent l'ensemble des suites réelles (et complexes)

$u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est également notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou plus simplement (u_n)

Egalité : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n$ (égalité des applications)

(u_n) est une suite constante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}$ (L'application u est constante.)

(u_n) est une suite stationnaire ssi $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, n \geq n_0, \Rightarrow u_n = u_{n+1}$ (c'est une "suite constante à partir d'un certain rang").

Changement de l'ensemble des indices :

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est définie sur $\mathbb{N}^*$.

On revient au cas général par un changement d'indice : $v_n = u_{n+1}$

- De même, pour la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ définie sur $\llbracket n_0, +\infty \rrbracket$, on pose $v_n = u_{n_0+n}$.

9.1.2 Suites récurrentes

Une suite peut être définie de façon explicite :

on donne la valeur de u_n en fonction de l'entier n .

Mais le plus souvent, la suite est définie implicitement :

u_n se calcule en fonction de n et des valeurs précédentes $u_k, k < n$

Une suite récurrente³ est le cas particulier où $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

1. On parle alors de suite réelle

2. C'est alors une suite complexe

3. C'est une suite récurrente d'ordre 1. Une suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$ est récurrente d'ordre 2, etc.

Une telle suite est définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence.

Test 208

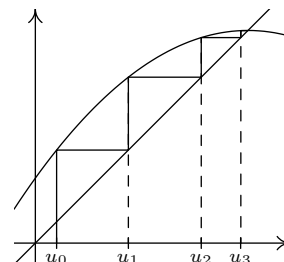
Déterminer la valeur du terme général de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par

- 1- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (n+1)u_n$
- 2- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k$
- 3- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + n + 1$

Indications : -1- factoriel ? -2- $u_{n+1} = u_n + u_n$ -3- somme des $k \dots$

Visualisation graphique d'une suite réelle récurrente :

On utilise la représentation graphique de la fonction f pour déterminer la valeur de u_{n+1} en fonction de u_n , puis la droite d'équation $y = x$ pour placer cette valeur sur l'axe $x'Ox$.



Test 209

Visualiser la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.
Visualiser la suite définie par $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin u_n$.

9.1.3 opérations sur les suites numériques

Comme les termes d'une suite sont des nombres réels ou complexes, on retrouve les opérations usuelles sur ces nombres :

- $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$
- $\lambda (u_n) = (\lambda u_n)$
- $(u_n) \times (v_n) = (u_n v_n)$

®

Pour les suites réelles, on retrouve également la relation d'ordre (partiel)

$$(u_n) \leq (v_n) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$$

Attention : $(u_n) < (v_n)$ signifie $(u_n) \leq (v_n)$ et $(u_n) \neq (v_n)$,
ce qui n'implique pas $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$.

Il vaut mieux éviter cette notation⁴

Th. ▸ **Structure de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ à titre informatif**

$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Ce qui signifie que l'addition et la multiplication par une constante font bon ménage avec les suites.

Nous verrons cette structure algébrique au second semestre.

$(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{C}$ -algèbre commutative non intègre.

Ce qui signifie que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, \times)$ est un anneau non intègre
et que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre commutative ordonnée non intègre.

Ce qui signifie que la relation d'ordre est compatible avec
l'addition et avec la multiplication par une suite positive.

Test 210

Peut-on parler de la composition de deux suites numériques ?

Test 211

Quelles sont les suites inversibles (pour la multiplication) ?

Test 212

Soit la suite u définie par $u_n = 1 + (-1)^n$.
-1- Montrer que cette suite vérifie $u^2 = 2u$.
-2- Pouvez-vous trouver d'autres suites vérifiant la même propriété ?
-3- $u^2 - 2u = 0$ est une équation du second degré qui admet plus de deux solutions. Est-ce surprenant ? D'où provient ce phénomène ?

4. On peut tolérer la notation $(u_n) \leq (v_n)$.

9.1.4 Suites bornées

(u_n) est une suite réelle majorée ssi $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ ®

(u_n) est une suite réelle minorée ssi $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$ ®

(u_n) est une suite réelle bornée ssi elle est majorée et minorée. ®

Th. ▷ **Caractérisation d'une suite bornée**

Une suite réelle est bornée ssi elle est majorée en valeur absolue

$$(u_n) \text{ bornée} \Leftrightarrow (|u_n|) \text{ majorée.}$$



Ceci permet une extension de la définition au domaine complexe :

(u_n) est une suite complexe bornée ssi elle est majorée en module. ©

Test 213 L'ensemble des suites réelles majorées est-il stable pour l'addition ? pour la multiplication par un réel ? pour la multiplication des suites ?

Test 214 Même question pour les suites bornées.

9.1.5 Suites monotones

La suite réelle (u_n) est

- croissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$
- strictement croissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$
- décroissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$
- strictement décroissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$
- monotone ssi elle est croissante ou décroissante

• Une suite simultanément croissante et décroissante est une suite constante

Test 215 La négation de "la suite u est croissante" est-elle "la suite u est strictement décroissante" ?

Test 216 Les deux suites réelles u et v vérifient $u \leq v$ et u croissante. Peut-on en déduire que v est croissante ?

Test 217 La suite u définie par $u_0 = 100$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = E(\frac{u_n}{2})$ est-elle monotone ?

Test 218 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, croissante. Que peut-on dire de la suite (u_n) dans les deux cas :

-1- $u_n = f(n)$

-2- $u_{n+1} = f(u_n)$

Test 219 Sens de variation de la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

(On commencera par montrer que la suite est définie, positive, majorée par 2)

Test 220 Sens de variation de la suite v définie par $v_n = \frac{20^n}{n^{20}}$

9.1.6 Méthodes pratiques :

- Étude du signe de la différence :

$$(u_n) \text{ est croissante } \text{ssi } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$$

- Pour les suites strictement positives : étude du quotient :

$$(u_n) \text{ est croissante } \text{ssi } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$$

- Pour les suites récurrentes d'ordre 1 :

$$\text{si } \left\{ \begin{array}{l} f(I) \subset I \quad (I \text{ est stable par } f) \\ u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right\} \quad \text{alors } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I.$$

- De plus :
- si f est croissante sur I alors la suite (u_n) est monotone
 - si $\forall x \in I, f(x) \geq x$, alors la suite (u_n) est croissante
 - si $\forall x \in I, f(x) \leq x$, alors la suite (u_n) est décroissante



Test 221

Considérons la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$. Montrer que tous les termes de cette suite sont dans $[0; 1]$ puis montrer que $\forall x \in [0; 1], \sin(x) \leq x$. En déduire le sens de variation de (u_n) .

9.2 Limite d'une suite

9.2.1 Suite convergente

Rappel important :

ε est un réel strictement positif.

Le réel (ou complexe) x approche ℓ à ε près si

$$|x - \ell| \leq \varepsilon$$

Dans $\mathbb{R}$ ceci est équivalent à

$$\ell - \varepsilon \leq x \leq \ell + \varepsilon$$

Soit la suite numérique $u = (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et le scalaire $\ell \in \mathbb{K}$.

La suite converge vers ℓ ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \underbrace{|u_n - \ell|}_{\Leftrightarrow \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon} < \varepsilon$$

On dit alors que la suite (u_n) est une suite convergente.

Une suite divergente est une suite non convergente.

propriétés

- Une suite converge si et seulement si elle admet une limite finie
- On ne change pas la définition en remplaçant $n \geq N$ par $n > N$ et/ou $|u_n - \ell| < \varepsilon$ par $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$
- On ne change pas la définition en imposant une condition du genre $N \geq N_0$ et/ou $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 > 0$)

Test 222

Montrer que la suite $(\frac{1}{n})$ converge vers 0.

Test 223

Montrer qu'une suite stationnaire est convergente

Test 224

Montrer que la suite $((-1)^n)$ ne converge pas vers 1.

On raisonne souvent par conditions suffisantes :⁵

Exemple

Pour montrer que la suite $(\frac{n+1}{n^2})$ converge vers 0, il faut montrer

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad n \geq N \Rightarrow \frac{n+1}{n^2} < \varepsilon$$

Pour cela, il faut majorer $\frac{n+1}{n^2}$ (noter qu'ici, les valeurs absolues sont

inutiles). Or $\frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n}$.

Donc, pour que $\frac{n+1}{n^2} < \varepsilon$,

il suffit que $\frac{2}{n} < \varepsilon$

il suffit que $n > \frac{2}{\varepsilon}$

il suffit que $n > N$ avec $N = 1 + E(\frac{2}{\varepsilon})$

9.2.2 Propriétés des suites convergentes

Th. ▷ **Unité de la limite**

Si une suite converge vers une limite ℓ alors cette limite est unique.

Note : l'unicité reste valable si la suite admet une limite infinie (voir le test)



Test 225

Soit une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n + u_n^2$. Si u converge vers une limite ℓ , que peut-on dire sur ℓ ?

Th. ▷ **Lien entre convergence et bornée**

Si une suite numérique est convergente alors elle est bornée.

Attention : la réciproque est fautive : [C.E. $u_n = (-1)^n$.]



• **Se ramener en 0 :**

La suite (u_n) converge vers ℓ ssi la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0.

Th. ▷ **Utiliser le module**

La suite (u_n) converge vers 0 ssi la suite réelle $(|u_n|)$ converge vers 0.



• **Implication ailleurs qu'en 0 :**

Si (u_n) converge vers ℓ , alors $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.

Attention : la réciproque est fautive [C.E. $u_n = (-1)^n$.]

Test 226

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $z_n = \frac{e^{in\pi/3}}{n}$. Montrer que la suite (z_n) converge vers 0

• **Éviter les termes nuls :**

- Si la suite réelle (u_n) converge vers $\ell > 0$, il existe un rang à partir duquel (u_n) est minorée par une constante strictement positive.
- *Conséquence :* si la suite réelle (u_n) converge vers $\ell < 0$, il existe un rang à partir duquel u_n est majorée par une constante strictement négative.
- *Conséquence :* Pour toute suite numérique qui converge vers $\ell \neq 0$, il existe un rang à partir duquel $|u_n|$ est minoré par une constante strictement positive.

(Donc à partir de ces rangs, la suite ne s'annule plus.)

• **Les premiers termes sont sans importance**

Modifier, supprimer ou ajouter un nombre fini de termes ne change pas la limite d'une suite

5. On "part du but" et on "remonte les implications".

9.2.3 Opérations sur les suites convergentes

• **Opérations sur les limites finies :**

- Si $(u_n) \rightarrow \ell$ et $(v_n) \rightarrow \ell'$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors
$$\begin{cases} (u_n + v_n) \rightarrow \ell + \ell' \\ (\lambda u_n) \rightarrow \lambda \ell \\ (u_n v_n) \rightarrow \ell \ell' \end{cases}$$
- Si $(u_n) \rightarrow \ell \neq 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel u_n ne s'annule pas.
La suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$ converge alors vers $\frac{1}{\ell}$.

• **Produit par une suite bornée :**

Si $(u_n) \rightarrow 0$ et (v_n) est bornée, alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Note : le produit par un scalaire en est un cas particulier.

9.2.4 limites infinies

®

La suite réelle (u_n) tend vers $+\infty$ ssi

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Rightarrow u_n > A$$

La suite réelle (u_n) tend vers $-\infty$ ssi

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Rightarrow u_n < A$$

Remarques

- Ne s'applique qu'aux suites réelles.
- Une suite qui tend vers $\pm\infty$ est une suite divergente.
- On peut indifféremment utiliser des inégalités larges ou strictes.
- La condition reste valable si on impose à A une valeur minimale pour $(u_n) \rightarrow +\infty$, (maximale pour $(u_n) \rightarrow -\infty$).
- Ces suites divergent parce que la limite n'est pas réelle.
Comme $\pm\infty \in \mathbb{R}$, on dit parfois que la suite "converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ ".

Test 227

Donner un exemple de suite divergente qui ne tend pas vers l'infini.

Test 228

Peut-on affirmer qu'une suite qui tend vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang ?

Test 229

Montrer que les suites (n^2) et $(\sqrt{n})$ divergent vers $+\infty$, mais que ce n'est pas le cas pour la suite $(n(-1)^n)$

Test 230

Montrer qu'une suite réelle qui tend vers $+\infty$ est minorée.
Au fait : est-elle majorée ?

9.2.5 Opérations sur les limites infinies

®

- Si $(u_n) \rightarrow +\infty$ et (v_n) minorée, alors $(u_n + v_n) \rightarrow +\infty$

◦ Ceci reste donc vrai si (v_n) converge ou si $(v_n) \rightarrow +\infty$

®

- Si $(u_n) \rightarrow +\infty$ et (v_n) minorée par un réel strictement positif, alors $(u_n v_n) \rightarrow +\infty$

◦ Ceci reste vrai si la minoration n'est vraie qu'à partir d'un certain rang

◦ C'est donc le cas si $(v_n) \rightarrow \ell > 0$

◦ Si v_n est majorée par un réel strictement négatif, alors $(u_n v_n) \rightarrow -\infty$

◦ Vrai en particulier si (v_n) est constante, donc
$$\begin{cases} \lambda > 0 \Rightarrow (\lambda u_n) \rightarrow +\infty \\ \lambda < 0 \Rightarrow (\lambda u_n) \rightarrow -\infty \end{cases}$$

®

- Si $(u_n) \rightarrow +\infty$ (ou $-\infty$), il existe un rang n_0 à partir duquel u_n ne s'annule pas. La suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$ converge vers 0.

®

- Si la suite (u_n) strictement positive (resp. négative) converge vers 0, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)

Les formes indéterminées : certaines situations ne permettent pas de conclure.

C'est alors une forme indéterminée $\infty - \infty$ $\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$ $0 \times \infty$

formes équivalentes

Rappel : les formes 0^0 ∞^0 1^∞ sont également indéterminées.



9.2.6 Limites et ordre

L'usage de l'ordre ne peut se faire qu'avec des suites réelles

Th. > Passage à la limite d'une inégalité :

Une relation d'ordre large est conservée par passage à la limite :

$$\left. \begin{array}{l} (u_n) \leq (v_n) \\ (u_n) \rightarrow \ell \\ (v_n) \rightarrow \ell' \end{array} \right\} \Rightarrow \ell \leq \ell'$$

Attention

- Ce théorème suppose l'existence des limites ℓ et ℓ' .
Il ne permet pas d'établir l'existence d'une limite.
- Le passage à la limite transforme une inégalité stricte en une inégalité large :
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n \Rightarrow \ell \leq \ell'$

®



Test 231 Donner un exemple de suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$, et ayant la même limite finie.

Th. > Ordre et limites infinies :

- $(u_n) \leq (v_n)$ et $(u_n) \rightarrow +\infty \Rightarrow (v_n) \rightarrow +\infty$
- $(u_n) \leq (v_n)$ et $(v_n) \rightarrow -\infty \Rightarrow (u_n) \rightarrow -\infty$

®

Remarque : Ce théorème permet d'établir l'existence d'une limite.

Th. > Théorème des pincements

Toute suite encadrée par deux suites qui convergent vers la même limite, converge vers cette limite :

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n \\ (u_n) \rightarrow \ell \\ (w_n) \rightarrow \ell \end{array} \right\} \Rightarrow (v_n) \rightarrow \ell$$

Ce théorème est également désigné par le théorème **des gendarmes**.

®

Remarque : Ce théorème est très utile pour établir l'existence d'une limite.

Test 232 Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n} E(n + \ln n)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
(On utilisera un encadrement.)

Quelques cas particuliers importants :

Majoration en module

$$\left. \begin{array}{l} (|u_n|) \leq (v_n) \\ (v_n) \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (u_n) \rightarrow 0$$

Suite géométrique divergente

$$r \in \mathbb{R}, \quad r > 1 \Rightarrow (r^n) \rightarrow +\infty$$

Suite géométrique convergente

$$r \in \mathbb{R}, \quad |r| < 1 \Rightarrow (r^n) \rightarrow 0$$

®

9.2.7 Application aux suites complexes

Partie réelle et imaginaire d'une suite complexe :

$(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ s'écrit $(z_n) = (x_n + i y_n)$ où $(x_n), (y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Les notations sont déjà connues :

$$x_n = \operatorname{Re} z_n \quad \text{et} \quad y_n = \operatorname{Im} z_n$$

On définit également la suite conjuguée

$$(\overline{z_n}) = (x_n - i y_n)$$

et la suite des modules^a

$$(|z_n|) = (\sqrt{x_n^2 + y_n^2})$$

^a On rappelle qu'une suite complexe est bornée ssi la suite des modules est majorée.

Th. ▷ Convergence d'une suite complexe

La suite complexe (z_n) converge ssi la partie réelle $(\operatorname{Re} z_n)$ et la partie imaginaire $(\operatorname{Im} z_n)$ convergent. Plus précisément (avec $a, b \in \mathbb{R}$) :

$$(z_n) \rightarrow \ell = a + ib \Leftrightarrow \begin{cases} (\operatorname{Re} z_n) \rightarrow a \\ (\operatorname{Im} z_n) \rightarrow b \end{cases}$$

Utiliser cette caractérisation et les théorèmes sur les limites des suites réelles pour retrouver :

Test 233

- 1- qu'une suite complexe convergente est bornée
- 2- la limite d'une somme de deux suites complexes
- 3- la limite d'un produit de deux suites complexes



9.3 Suites extraites

9.3.1 Définition

Une suite extraite de la suite (u_n) est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Exemples

- Supprimer le premier terme d'une suite en donne une suite extraite.
- La suite (u_n) est une suite extraite de (u_n) .
- Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont extraites de la suite (u_n) .

Test 234

La suite constante (1) est-elle extraite de $((-1)^n)$?
 La suite (2^n) est-elle extraite de (n) ?
 La suite constante (u_0) est-elle extraite de (u_n) ?

Test 235

Une suite extraite d'une suite extraite de (u_n) est-elle extraite de (u_n) ?

Test 236

Soit deux suites (u_n) et (v_n) telles que chacune est extraite de l'autre :
 $((u_n)$ est extraite de (v_n) et (v_n) est extraite de $(u_n))$.
 Peut-on dire que $(u_n) = (v_n)$?
 (On pourra travailler avec les suites de nombres 1,1,0,1,1,0,1,1,0... et 1,0,1,0,1,0...)

9.3.2 Suites extraites et limites

Un outil : $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$$

Th. ▷ limites des suites extraites

Si la suite (u_n) admet pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$,
 alors toute suite extraite admet la même limite.

9.3.3 Deux outils très utiles

**Th.** ▷ Une méthode pour l'existence d'une limite :

La suite (u_n) admet une limite
ssi les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent la même limite.

$$(u_n) \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_{2n}) \rightarrow \ell \\ (u_{2n+1}) \rightarrow \ell \end{cases}$$

Th. ▷ Une méthode pour la non existence d'une limite :

Pour montrer que la suite (u_n) n'admet pas de limite

il suffit de trouver deux suites extraites de (u_n) qui admettent des limites différentes (ou qui ne peuvent avoir la même limite)



Test 237

Montrer que la suite $((-1)^n)$ diverge, et que $\left(\frac{1}{(3 + (-1)^n)^n}\right)$ converge.
On pourra étudier les sous-suites de rangs pairs et de rangs impairs.

Test 238

Montrer que la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + (-1)^n n$ diverge.
On pourra calculer u_{n+2} en fonction de u_n .

9.4 Théorèmes d'analyse

9.4.1 Suite réelle monotone

Th. ▷ Convergence d'une suite monotone

Toute suite réelle croissante majorée converge. De plus $\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$

Toute suite réelle décroissante minorée converge. De plus $\ell = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$

donc une suite monotone converge ssi elle est bornée.

Corollaires :

- Pour toute suite croissante majorée par M ,
sa limite ℓ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq M$
- Une suite croissante qui diverge tend vers $+\infty$.



Test 239

Reprendre le test $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ de la page 228

Test 240

Montrer que la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin u_n$ est positive convergente.

On pourra montrer que $\forall x \in [0; 1], \sin x \in [0; 1]$ et $\sin x \leq x$.

(On ne demande pas la limite)

9.4.2 Suites adjacentes

Deux suites adjacentes sont deux suites réelles, l'une croissante, l'autre décroissante, et la différence converge vers 0

$$(u_n) \nearrow \quad (v_n) \searrow \quad (u_n - v_n) \rightarrow 0$$

Th. ▷ Convergence des suites adjacentes

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

Nous avons alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$



Test 241

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes

$$(u_n) = \left(\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} \right) \quad (v_n) = \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \right)$$

Remarque : La différence est parfois difficile à étudier.

On démontre alors que deux suites sont adjacentes en montrant que l'une est croissante, l'autre décroissante, et qu'elles convergent vers la même limite.

Test 242

Deux suites u et v sont définies par

$$u_0 = 0, v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}$$

- 1- Montrer (par récurrence) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$.
- 2- En déduire que les deux suites sont convergentes.
- 3- Montrer qu'elles ont même limite.
- 4- Sont-elles adjacentes ?

Th. ▷ **Théorème des segments emboîtés**Si (I_n) est une suite décroissante de segments de $\mathbb{R}$ dont la longueur tend vers 0 alors
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \text{ est un singleton.}$$

$$\left. \begin{array}{l} I_n = [a_n, b_n] \\ \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n \\ (b_n - a_n) \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{a\}$$

Remarques :

- Ce théorème est faux avec des intervalles non fermés $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]0, \frac{1}{n}] = \emptyset$
- La technique de **dichotomie** en est un cas particulier fréquent :

On part d'un segment $[a, b]$ on le remplace par une de ses moitiés $[a, \frac{a+b}{2}]$ ou $[\frac{a+b}{2}, b]$

on recommence le processus aussi longtemps que nécessaire

Test 243

On définit la suite de segments par $I_0 = [0, 10]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = [a, b] \Rightarrow I_{n+1} = \begin{cases} [a, \frac{a+b}{2}] & \text{si } (a+b)^2 > 8 \\ [\frac{a+b}{2}, b] & \text{si } (a+b)^2 \leq 8 \end{cases}$$

- 1- Justifier que (I_n) est une suite de segments emboîtés.
- 2- Montrer que l'intersection est $\{\sqrt{2}\}$?

Approximation décimale d'un réel : soit $x \in \mathbb{R}$

en posant $a_n = E(10^{-n}x)$, les suites $(d_n) = \left(\frac{a_n}{10^n}\right)$ et $(e_n) = \left(\frac{a_n + 1}{10^n}\right)$ sont adjacentes et convergent vers x . Ces suites sont constituées par les approximations décimales de x par défaut et par excès.

9.4.3 Suites extraites convergentes

Th. ▷ **Théorème de Bolzano-Weierstrass**

De toute suite numérique bornée on peut extraire une suite convergente.

$$(u_n) \text{ bornée} \Rightarrow \exists (u_{\varphi(n)}) \text{ extraite qui converge}$$

Ce théorème énoncé par Bolzano (vers 1830) a été démontré
(dans le cas réel) par Weierstrass (vers 1860).

Test 244

Pour une suite (u_n) bornée,

- 1- la suite extraite convergente est-elle unique ?
- 2- toutes les suites extraites convergentes ont-elles la même limite ?

Test 245

Montrer par un contre-exemple, que la réciproque du théorème de Bolzano-Weierstrass est fausse.

9.4.4 Densité

Th. ▷ **Caractérisation séquentielle de la densité**Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si $\forall \epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists a \in A \mid |x - a| < \epsilon$ si, et seulement si tout réel x est limite d'une suite d'éléments de A .

Th. ▷ **Développement décimal d'un réel**

Soit x un réel. Il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ et une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ d'entiers entre 0 et 9, telle que

$$x = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=n_0}^N \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

Si x n'est pas un décimal, une telle suite est unique, et l'expression précédente est appelé *développement décimal propre* de x .

Si x est un décimal, il existe deux telles suites : l'une nulle à partir d'un certain rang (développement décimal propre), l'autre valant 9 à partir d'un certain rang (cette deuxième est qualifiée de développement décimal impropre de x).

Voici le début du développement décimal de quelques nombres remarquables :

- $1/3 = 0, 3333333333\dots$
- $\pi = 3, 1415926535\dots$
- $e = 2, 718281\dots$
- $\sqrt{2} = 1, 414213\dots$

Le développement décimal impropre de 1 est :

$$1 = 0, 999999999\dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n}$$

Th. ▷ **Densité de $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$**

$\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et par conséquent $\mathbb{Q}$ aussi.

9.4.5 Caractérisation de la borne supérieure**Th.** ▷ **Caractérisation séquentielle du sup**

Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$,

- s est la borne supérieure de X si et seulement si s majore X et il existe une suite d'éléments de X de limite s .
- X non majorée si et seulement si il existe une suite d'éléments de X de limite $+\infty$.

9.5 Outils pour une étude pratique**9.5.1 suites arithmétiques et géométriques**

(u_n) est **arithmétique**⁶ de raison $r \in \mathbb{C}$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$
ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + n r$
ssi $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, u_n = u_p + (n - p) r$

Somme des termes d'une suite arithmétique :

$$\sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2} = (\text{nombre de termes}) \times (\text{moyenne des extrêmes})$$

(u_n) est **géométrique**⁷ de raison $r \in \mathbb{C}$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = r u_n$
ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 r^n$
ssi $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, u_n = u_p r^{(n-p)}$

Somme des termes d'une suite géométrique :

$$\text{si } r \neq 1 : \quad \sum_{k=0}^n u_k = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1 - r} = u_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1^{er} \text{ terme} - 1^{er} \text{ terme manquant}}{1 - \text{raison}}$$

6. Chaque terme est la moyenne **arithmétique** des deux termes qui l'entourent

7. En module, chaque terme est la moyenne **géométrique** des deux termes qui l'entourent

$$\text{Rappel : } \lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 1 \\ 0 & \text{si } |r| < 1 \end{cases}$$

Test 246

Trouver toutes les suites arithmétiques (u_n) telles que $u_{100} = 10 u_{10}$.
Même question avec des suites géométriques.

9.5.2 Suite arithmético-géométrique

(u_n) est arithmético-géométrique ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a u_n + b$.

Étude

- si $a = 1$, la suite est arithmétique.
- si $a \neq 1$, l'application $x \mapsto ax + b$ admet un unique point fixe α que l'on détermine en résolvant l'équation $x = ax + b$.
La suite $(u_n - \alpha)$ est géométrique.
On en déduit la valeur de u_n

Test 247

(u_n) est définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3$. Déterminer le terme général de cette suite.

Test 248

La somme d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique est-elle arithmético-géométrique?

9.5.3 Comparaison avec une suite géométrique

Soit (u_n) une suite réelle strictement positive (au moins à partir d'un certain rang).

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1$ alors (u_n) converge vers 0
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 1$ alors (u_n) tend vers $+\infty$
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, on ne peut pas conclure.



9.5.4 Suites récurrentes d'ordre 1

La suite (u_n) vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.



Th. ▷ **Théorème du point fixe**

|| Si (u_n) converge vers ℓ et f est continue en ℓ , alors $\ell = f(\ell)$

En pratique

- ℓ est alors un point fixe de f
- Ceci est utilisable si les éléments de (u_n) appartiennent à un intervalle fermé où f est continue
- **Attention :** l'existence d'un point fixe n'assure pas la convergence de la suite.

Test 249

(u_n) est définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = x \ln(x)$.
Étudier les variations de f .
Que peut-on en déduire pour la suite? Montrer que la suite diverge.

Test 250

Soit $f(x) = \sqrt{x} - E(x)$.
-1- Montrer que 0 est l'unique point fixe de f .
-2- Montrer que la suite définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers 1.
-3- Qu'en pensez-vous?

9.6 Suite récurrente sur 2 termes

Ce qui suit n'est pas explicitement au programme.

Les méthodes sont données à titre indicatif (d'autres méthodes plus efficaces seront vues dans le chapitre "Espaces vectoriels de dimension finie").

9.6.1 Récurrence linéaire d'ordre 2

(u_n) est définie par u_0, u_1 et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n, (a, b) \in \mathbb{C}^2$.

Étude

- r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation caractéristique $r^2 - a r - b = 0$
- Si $r_1 \neq r_2$ alors $u_n = A r_1^n + B r_2^n, A, B \in \mathbb{C}$
- Si $r_1 = r_2$ alors $u_n = (A + n B) r_1^n, A, B \in \mathbb{C}$
- On calcule A et B avec les deux premiers termes

Test 251

Calculer u_n lorsque $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3 u_{n+1} - 2 u_n$.

9.6.2 Application aux suites dépendantes

(u_n) et (v_n) sont définies par u_0, v_0 et $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = a u_n + b v_n \\ v_{n+1} = c u_n + d v_n \end{cases}$

Étude

- On transforme ces conditions en "suites récurrentes d'ordre 2".
- On se retrouve alors dans le cas précédent.

Test 252

Calculer (u_n) et (v_n) sachant que

$$u_0 = 0, v_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 5 u_n - 6 v_n \\ v_{n+1} = 3 u_n - 4 v_n \end{cases}$$



9.7 Exercices

Sens de variation

Exercice 1

Répondez à chacune des questions par *vrai* ou *faux*. Justifiez par un contre-exemple lorsque c'est faux, et par une courte démonstration lorsque c'est vrai. Toutes les suites considérées sont à valeurs réelles.

1. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
2. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas croissante, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang.
3. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas, alors elle diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
4. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas, alors elle diverge.
5. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas et est positive, alors elle diverge vers $+\infty$.
6. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors $(u_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi.
7. Si $(u_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi.
8. Si $(3u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi.
9. Si $(u_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers 0.
10. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite ne s'annulant pas telle que $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
11. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite ne s'annulant pas telle que $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 2.
12. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite divergente à valeurs positives, alors $\lim u_n = +\infty$.
13. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite divergente à valeurs positives et non bornée, alors $\lim u_n = +\infty$.

Exercice 2

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt[3]{6 + u_n}$.
On pose $f : x \mapsto \sqrt[3]{6 + x}$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$, étudier les variations de f
Trouver des intervalles stables par f .
2. En déduire le sens de variation puis la convergence de la suite.

Exercice 3

Soit $f : x \mapsto x^3 - 3x$. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur l'intervalle $[0, 2]$.

(u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{10}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ est-elle décroissante ?

(Vérifier par un calcul approché des 4 premiers termes.)

Exercice 4

Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite divergente à valeurs positives et monotone, alors $\lim u_n = +\infty$.

Limites

Exercice 5

Étudier la convergence et la limite éventuelle des suites de terme général donné ci-dessous :

- | | |
|--|--|
| 1. $\frac{\cos n}{n}$.
2. $\frac{3n+5}{2n+7}$.
3. $\frac{-4n^2+3n+3}{n^2-n+4}$. | 4. $\frac{4^n-3^n}{4^n+2^n}$.
5. $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}$.
6. $\left(1+\frac{1}{2}\sin n\right)^{\frac{1}{n}}$. |
|--|--|

Exercice 6

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites réelles telles que

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq a$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq b$.
- $u_n + v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b$

Montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$.

Exercice 7**Manipulation des "ε", moyenne de Césaro**

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On pose $v_n = \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{2n}}{n}$.

1. Montrer que si la suite (u_n) converge vers 0, il en est de même pour la suite (v_n)
2. En déduire que si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{K}$, alors (v_n) aussi.
3. Utiliser $u_n = (-1)^n$ pour montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 8**Approximation d'un réel par des rationnels :**

Cet exercice est important.

Il illustre une méthode de construction de suite.

1. Utiliser la suite de segments $\left([x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]\right)$ pour montrer que tout réel x est limite d'une suite de rationnels.
2. Modifier la suite de segments pour approcher x par défaut ?
Obtient-on une suite croissante de rationnels ?
3. Comment peut-on procéder pour que x soit limite d'une suite croissante de rationnels ?

Remarque : on peut remplacer "rationnel" par "décimal"

Exercice 9**Approcher rapidement une racine carrée :**

1. Soit $a > 0$. Justifier que, pour tout réel strictement positif x , $\sqrt{a}$ est encadré par x et $\frac{a}{x}$.

On peut ainsi espérer que $\frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x}\right)$ approche $\sqrt{a}$

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

Pour fixer les idées, prenons $a = 2$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée par $\sqrt{2}$ et 2.

Quelles sont les limites possibles ?

3. On pose $d_n = |u_n - \sqrt{2}|$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, d_n \leq d_0^{(2^n)}$
4. Montrer que $d_0 < \frac{1}{2}$. Combien faut-il d'itérations pour que u_n approche $\sqrt{2}$ à 10^{-9} près ?
(On trouve $n = 5$ mais en fait $n = 4$ suffit.)

Suites adjacentes, couples de suites

Exercice 10

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes. *On démontrera plus tard que leur limite commune est $\pi^2/6$.*

Exercice 11

Supremum de deux suites convergentes

1. Soient a et b deux réels. On note $\max(a, b) = \max(\{a; b\})$ et de même en remplaçant $\max$ par $\min$, $\sup$ ou $\inf$. Montrer que

$$\sup(a, b) = \max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2} \quad \inf(a, b) = \min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}$$

2. Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites réelles convergentes. Montrer que les suites $\sup(u, v)$ et $\inf(u, v)$, de termes généraux respectifs $\sup(u_n, v_n)$ et $\inf(u_n, v_n)$, convergent également.
3. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 12

1. Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$. Vérifier que $x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y$.
2. (moyenne arithmético-géométrique). Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. On définit les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers la même limite.

Exercice 13

Soit $(u_n)_n$ une suite telle que les suites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{n^2})_n$ convergent. Montrer que $(u_n)_n$ converge.

Suites et matrices

Exercice 14

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Montrer qu'il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = a_n I + b_n A$
2. Expliciter a_n et b_n en fonction de n et en déduire l'expression de A^n .

Exercice 15

On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Démontrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1 - 2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1 + a_n \end{pmatrix}.$$

- Montrer que la suite a est arithmético-géométrique.
- En déduire a_n en fonction de n puis donner l'expression A^n en fonction de n .

Exercice 16

On considère les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calculez J^2 et J^3 . En déduire les puissances successives de $J : J^k, k \geq 3$.
- On pose $T = 2I + J$. Donnez l'expression de T^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
- Vérifier que l'expression est valable pour $n = 0$ et $n = 1$.
- On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les relations de récurrence :

$$\forall n \geq 0, \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 2b_n \\ c_{n+1} = b_n + 2c_n \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = T^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de a_0, b_0, c_0 et de n .

Exercice 17

On considère les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par la donnée de leurs premiers termes u_0 et v_0 et les relations de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 6u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}$

- Déterminer $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

- Montrez que l'on peut écrire $A = 5I + J$ où I est la matrice identité et J est une matrice que vous déterminerez.
- Calculer J^2 et en déduire $\forall n \in \mathbb{N}, J^n$.
- Calculez A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
- Déduisez de la question précédente les expressions de u_n et v_n en fonction de n .

Exercice 18

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- Expliciter α et β tel que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$
- Montrer par récurrence qu'il existe a_n et b_n tels $A^n = a_n A + b_n I_3$.
- Montrer que a est une suite récurrente d'ordre 2 puis expliciter a_n en fonction de n .
- En déduire l'expression de $b_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
- Expliciter $\forall n \in \mathbb{N}, A^n$.

9.8 Exercices Complémentaires

Problème : La formule de Stirling

Le but de cet exercice est de démontrer partiellement la célèbre formule de Stirling :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

En fait, nous allons "seulement" prouver que la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$ existe et est strictement positive (ce qui est en soi est déjà un très bon résultat)

Partie I : Quelques encadrements remarquables

L'objectif de cette partie est de démontrer que

$$(E) : \forall x \geq 1, \quad \frac{1}{12} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right) \leq 1 - \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq 0$$

Pour cela, on introduit deux fonctions auxiliaires définies sur $[1, +\infty[$ par

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = 1 - \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right)$$

1. Un encadrement auxiliaire :

- Montrer que $\forall x \geq 1, \quad \frac{1}{x+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$
- En déduire un encadrement de $\left(x + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ sur $[1, +\infty[$.
- Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ existe et calculer cette limite.

2. Etude du signe de f :

- Vérifier que l'on a

$$\forall x \geq 1, \quad f'(x) = -\ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) + \frac{2x+1}{2x(x+1)} \quad \text{et} \quad f''(x) = -\frac{1}{2x^2(x+1)^2}$$

- Dresser le tableau des variations de f' et en déduire le signe de f' .
- Dresser le tableau des variations de f et, à l'aide de la question 1.c), en déduire le signe de f .

3. Etude du signe de g :

- Vérifier que l'on a :

$$\forall x \geq 1, \quad g'(x) = f'(x) - \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2} \right) \quad \text{et} \quad g''(x) = \frac{1}{6x^3(x+1)^3}$$

- Dresser le tableau des variations de g' et en déduire le signe de g' .
- Dresser le tableau des variations de g et, à l'aide de la question 1.c), en déduire le signe de g .

Partie II : Preuve de l'existence de la limite

On introduit les trois suites suivantes :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}, \quad S_n = \left(\sum_{k=1}^n \ln k \right) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n, \quad T_n = S_n - \frac{1}{12n}$$

- Vérifier que $\forall n \geq 1, \quad \ln u_n = S_n$
- A l'aide de l'encadrement (E) obtenue dans la première partie, montrer que les deux suites S et T sont adjacentes.
- En déduire que la suite u converge vers un réel strictement positif.