

Chapitre 8

Les nombres réels

8.1 Les ensembles de nombres

Rappelons les ensembles de nombres standards.

Définition (Ensembles de nombres)

$\mathbb{N}$: ensemble des nombres naturels c'est-à-dire $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z}$: ensemble des nombres relatifs c'est-à-dire des entiers naturels ainsi que leurs opposés.

$\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels. Il est l'ensemble des nombres pouvant s'écrire comme le quotient d'un entier relatif et d'un entier naturel non nul.

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels c'est-à-dire de tous les nombres que vous avez rencontré dans votre scolarité. Par exemple : 2, -13, $\frac{2002}{2003}$, $\frac{\sqrt{2}}{3}$, π , e^6 ...

$\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes (chapitre dédié)

Test 181

Quelles sont les structures algébriques (groupes/anneaux/corps) de ces ensembles pour les opérations addition et produit usuelles ? Quelles sont les inclusions entre ces ensembles ?

Test 182

Démontrer que $\sqrt{2}$ est un irrationnel autrement dit montrer par l'absurde qu'il ne peut s'écrire comme le quotient irréductible de 2 entiers.

8.2 Notion d'ordre

8.2.1 Relation d'ordre

Une relation d'ordre sur un ensemble E est une relation binaire $\prec$

qui vérifie : $\blacktriangleright \prec$ est *réflexive* $\forall x \in E, x \prec x$

$\blacktriangleright \prec$ est *antisymétrique* $\forall x, y \in E, (x \prec y \text{ et } y \prec x) \Rightarrow x = y$

$\blacktriangleright \prec$ est *transitive* $\forall x, y, z \in E, (x \prec y \text{ et } y \prec z) \Rightarrow x \prec z$

On dit alors que $(E, \prec)$ est un ensemble ordonné.

$\prec$ est un ordre total si deux éléments quelconques de E sont comparables

$$\forall x, y \in E, x \prec y \text{ ou } y \prec x$$

$\prec$ est un ordre partiel dans le cas contraire

Exemples :

- l'égalité définit un ordre sur un ensemble.
 - L'ordre naturel dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, noté $\leq$.
- Attention :** "l'ordre strict" $<$ n'est pas une relation d'ordre.
- Dans $\mathbb{N}$ la relation "divise", notée $|$ est une relation d'ordre.
- Attention :** ce n'est pas une relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$.
0 est un multiple de tous les entiers mais n'est diviseur que de lui-même.
- L'inclusion $\subset$ dans $\mathcal{P}(E)$

Test 183 Montre que l'égalité est antisymétrique ?

Test 184 A-t-on : $a \not\leq b \Rightarrow b \not\leq a$?
On pourra exhiber un contre-exemple avec la relation d'ordre divise sur $\mathbb{N}$.

Test 185 Si $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont deux relations d'ordre.
La relation " $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ " est-elle une relation d'ordre ?
Même question avec la relation " $\mathcal{R}_1$ ou $\mathcal{R}_2$ ".

8.2.2 Majorant, etc

Soit $(E, \prec)$ un ensemble ordonné et $A \subset E$.

$M \in E$ est un **majorant** de A dans E ssi $\forall a \in A, a \prec M$

$m \in E$ est un **minorant** de A dans E ssi $\forall a \in A, m \prec a$

On dit aussi que M majore A et que m minore A

M est le **plus grand élément** de A ssi M majore A et $M \in A$.

m est le **plus petit élément** de A ssi m minore A et $m \in A$.

Remarques

- L'existence d'un majorant (d'un minorant) n'est pas assurée
- Un ensemble peut admettre plusieurs majorants (plusieurs minorants)

Th. ▷ Unicité du plus grand élément

Si A est un sous-ensemble de l'ensemble ordonné E :

- s'il existe, le plus grand élément de A est unique
- s'il existe, le plus petit élément de A est unique



Test 186 Dans l'ensemble ordonné $(E, \prec)$, montrer que si M majore A , m minore A et $A \neq \emptyset$, alors $m \prec M$.

Test 187 Deux majorants de $A \subset E$ sont-ils nécessairement comparables ?
On exhibera un contre-exemple avec la relation d'ordre divise sur $\mathbb{N}$.

Test 188 Traduisez " x n'est pas un majorant de A ".

8.2.3 Borne supérieure - inférieure

A est une partie de l'ensemble ordonné $(E, \prec)$.

La **borne supérieure** de A dans E est

le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A

La **borne inférieure** de A dans E est

le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A

Th. ▷ Propriétés de la borne supérieure

- Si elle existe, la borne supérieure (inférieure) est unique
- S'il existe, le plus grand élément (resp. plus petit élément) est la borne supérieure (resp. inférieure)

Pratique

Pour montrer que $S = \sup A$:

► montrer que S majore A

► puis montrer au choix :

▷ soit : tout autre majorant M de A vérifie $S < M$

▷ soit sa contraposée : $\forall x \in E, s \not\leq x \Rightarrow \exists a \in A, a \not\leq x$ (assez rare)

Si E est totalement ordonné :

cette dernière méthode est souvent la plus pratique puisqu'elle devient

▷ $\forall x \in E, x < S \Rightarrow \exists a \in A, x < a$

Test 189

Dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$, montrer que $\sup \{A, B\} = A \cup B$

On pourra montrer que $A \cup B$ majore $\{A, B\}$ et que tout majorant X de $\{A, B\}$ contient $A \cup B$.

Test 190

On se place dans $\mathbb{R}$ muni de l'ordre $\leq$ habituel.

Soit $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Trouver $\sup_{\mathbb{R}} A$ et $\inf_{\mathbb{R}} A$.

Test 191

A et B sont deux sous-ensembles de $(E, <)$.

Montrer que $\sup(A \cup B) = \sup \{ \sup(A), \sup(B) \}$.

(on suppose l'existence des bornes supérieures)

8.3 L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels

Les ensembles successifs de nombres présentent des lacunes :

- $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe d'où l'extension à $\mathbb{Z}$
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ n'est pas un corps d'où l'extension à $\mathbb{Q}$
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ n'a pas de borne sup¹ d'où la construction de $\mathbb{R}$
- puis l'existence de certaines équations algébriques sans solutions réelles conduit à construire $\mathbb{C}$ qui est algébriquement clos².

Mais ceci sort du cadre de ce chapitre.

8.3.1 Le corps des réels

Th. ► **Corps des réels**

(Admis sans démonstration)

A un "isomorphisme près", il existe un unique ensemble noté $\mathbb{R}$, qui vérifie :

- $\mathbb{R}$ est un corps commutatif
- $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre total (notée $\leq$), compatible avec l'addition et avec la multiplication par un réel positif

La compatibilité signifie :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y \text{ et } 0 \leq z \Rightarrow xz \leq yz$$

- $\mathbb{R}$ vérifie l'axiome de la borne supérieure

Important:**Axiome de la borne supérieure :**

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.



On démontre alors que $\mathbb{R}$ prolonge la structure de corps totalement ordonné de $\mathbb{Q}$ autrement dit $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ et l'ordre dans $\mathbb{Q}$ coïncide avec l'ordre de $\mathbb{R}$.

1. Historiquement, c'est l'absence de solutions rationnelles de l'équation $x^2 = 2$ qui pousse à trouver une extension de $\mathbb{Q}$.

2. C'est-à-dire que toute équation à coefficients complexes admet des solutions complexes.

Test 192

Justifier les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \leq y &\Leftrightarrow x + z \leq y + z \\ \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \leq y &\Leftrightarrow xz \leq yz \end{aligned}$$

On en déduit les premières propriétés :

- $x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$
- *règle des signes* : $\begin{cases} 0 \leq x \text{ et } 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy \\ x \leq 0 \text{ et } y \leq 0 \Rightarrow 0 \leq xy \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq x \text{ et } y \leq 0 \Rightarrow xy \leq 0 \\ x \leq 0 \text{ et } 0 \leq y \Rightarrow xy \leq 0 \end{cases}$
- *Somme d'inégalités* : $x \leq y \text{ et } x' \leq y' \Rightarrow x + x' \leq y + y'$
- *Produit d'inégalités* : $0 \leq x \leq y \text{ et } 0 \leq x' \leq y' \Rightarrow xx' \leq yy'$
- Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure

**Th.** $\triangleright$ **Propriétés d'Archimède**Le groupe $(\mathbb{R}, +)$ est Archimédien

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad y \leq nx$$

Le groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$ est Archimédien

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \quad x > 1 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad y \leq x^n$$



8.3.2 Cas particulier de $\mathbb{N}$

Th. $\triangleright$ **Parties non vides de $\mathbb{N}$** Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ majorée admet un plus grand élément.Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.**Le principe de récurrence se base sur ce théorème****Test 193**Démontrer que toute liste strictement décroissante de nombres de $\mathbb{N}$ est finie

8.3.3 Valeur absolue (Rappel)

La valeur absolue du réel x est définie au choix par :

- $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$
- le terme positif ou nul de l'ensemble $\{-x, x\}$
- $|x| = \max(-x, x)$

Propriétés :

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = |-x|$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad ||x|| = |x|$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |xy| = |x||y|$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

- Inégalité triangulaire

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \left| |x| - |y| \right| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

**Test 194****Très important :**Soit a et x des réels et $\epsilon > 0$, montrer l'équivalence $|x - a| \leq \epsilon \Leftrightarrow a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon$ **Test 195****Très important :**montrer l'équivalence $(\forall \epsilon > 0, |x| \leq \epsilon) \Leftrightarrow x = 0$

Test 196 Représentation graphique de $f : x \mapsto x + |x + 1| + 2x - 1$

Test 197 **Une astuce pour calculer $\max(x, y)$:**
 – Montrer que $\max(x, y) = \frac{1}{2}(|x - y| + x + y)$
 – Trouver une formule analogue pour déterminer $\min(x, y)$

8.3.4 Distance sur $\mathbb{R}$

Une **distance** sur un ensemble E est une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie :

- ▶ $\forall x, y \in E, \quad d(x, y) \geq 0$
- ▶ $\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$
- ▶ $\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{symétrie})$
- ▶ $\forall x, y, z \in E, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{inégalité triangulaire})$

Th. ▶ **Distance naturelle sur $\mathbb{R}$**

L'application $d : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto |x - y| \end{cases}$ définit une distance sur $\mathbb{R}$.

8.3.5 La droite numérique achevée

La **droite numérique achevée** est l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

où $+\infty$ est un élément vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, x < +\infty$

et $-\infty$ est un élément vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, -\infty < x$

(on prolonge la relation d'ordre)

On prolonge *partiellement* les opérations " + " et " $\times$ ", de façon naturelle

$a + (+\infty) = +\infty, (+\infty) + (+\infty) = +\infty$, etc.

si $a > 0 : a \times (+\infty) = +\infty, (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$, etc.

mais $(+\infty) + (-\infty), 0 \times (+\infty)$, etc. ne sont pas définis

(ce qui correspond aux résultats sur la limite d'une somme ou d'un produit)

Test 198 $(\overline{\mathbb{R}}, +, \times)$ est-il un anneau ? un corps ?

8.3.6 Les intervalles de $\mathbb{R}$

Un **intervalle** de $\mathbb{R}$ est constitué de tous les réels compris entre a et b ($a, b \in \overline{\mathbb{R}}$)

Ils sont classés en différentes catégories, prenons a et b des réels :

- suivant l'appartenance (ou non) des bornes à l'intervalle
 - Intervalles fermés $[a, b],]-\infty, a], [a, +\infty[,]-\infty, +\infty[, \emptyset$
 - Intervalles ouverts $]a, b[,]-\infty, a[,]a, +\infty[,]-\infty, +\infty[, \emptyset$
 - Intervalles semi-ouverts (semi-fermés) $[a, b[,]a, b],]-\infty, a], [a, +\infty[,]-\infty, +\infty[, \emptyset$
- suivant que les bornes sont réelles ou non
 - Intervalles bornés $[a, b], [a, b[,]a, b],]a, b[, \emptyset$
 - non bornés $] - \infty, a],] - \infty, a[, [a, +\infty[,]a, +\infty[,] - \infty, +\infty[$

Un **segment** est un intervalle fermé borné.

Note :

Généralement, la notation $[a, b],]a, b]$, etc suppose que $a \leq b$.
 Cependant, dans certaines situations on ignore "l'ordre des bornes".
 Il est alors acceptable d'utiliser ces notations avec $a > b$.

(ce préférence en signalant cette éventualité)

Test 199 Pourquoi l'ensemble vide est-il borné ?

Test 200 Ecrire l'ensemble vide comme un intervalle ? Précisez-en la nature.

Th. ▷ **Intervalles et convexité**

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les sous-ensembles convexes :

$$I \text{ intervalle} \Leftrightarrow \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \left. \begin{array}{l} a, c \in I \\ a \leq b \leq c \end{array} \right\} \Rightarrow b \in I$$

Test 201

Montrer que toute intersection (finie ou non) d'intervalles de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
On pourra montrer que cette intersection est convexe.
Donner un contre-exemple pour la réunion ?

Test 202

Montrer que $I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]0, \frac{n+1}{n}[$ est un intervalle et qu'il n'est pas ouvert.

Test 203

Que pensez-vous de $I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]0, \frac{1}{n}]$?

8.4 Approximations dans $\mathbb{R}$

8.4.1 Congruence

Soit $a \in]0, +\infty[$.

La **congruence modulo a** est la relation binaire sur $\mathbb{R}$ définie par

$$x \equiv y [a] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad y - x = k a \quad (\Leftrightarrow y - x \in a\mathbb{Z})$$

La congruence est une **relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$** , car elle est :

- ▶ *réflexive* : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \equiv x [a]$
- ▶ *symétrique* : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \equiv y [a] \Rightarrow y \equiv x [a]$
- ▶ *transitive* : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \equiv y [a] \text{ et } y \equiv z [a] \Rightarrow x \equiv z [a]$

Propriété : La congruence est compatible avec l'addition :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \equiv y [a] \Rightarrow x + z \equiv y + z [a]$$

Conséquence : $\forall x, x', y, y' \in \mathbb{R}, \quad \left. \begin{array}{l} x \equiv y [a] \\ x' \equiv y' [a] \end{array} \right\} \Rightarrow x + x' \equiv y + y' [a]$

Se méfier de la multiplication :

Que pensez-vous des propositions suivantes où t est un réel non nul :

Test 204

- (1) $x \equiv y [a] \Rightarrow tx \equiv ty [a]$
- (2) $x \equiv y [a] \Leftrightarrow tx \equiv ty [a]$
- (3) $x \equiv y [a] \Rightarrow tx \equiv ty [ta]$
- (4) $x \equiv y [a] \Leftrightarrow tx \equiv ty [ta]$

Éventuellement, dire quelles sont les précisions qui peuvent rendre les propositions vraies ?

8.4.2 Partie entière

Th. ▷ **Encadrement d'un réel**

$\forall a, x \in \mathbb{R}, a > 0, \quad \exists ! n \in \mathbb{Z}, \quad na \leq x < (n+1)a$
c'est-à-dire : tout réel x est, de manière unique, compris entre deux multiples entiers consécutifs de a

Utilisé avec $a = 1$, ce théorème montre que tout réel x est compris entre deux entiers consécutifs. Cet unique entier, noté $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$, est la **partie entière** de x .

3. La notion de congruence n'est pas explicitement au programme.
Il en est de même pour la notion générale de "relation d'équivalence".

On retient :

$$E(x) \in \mathbb{Z}$$

et

$$\begin{array}{l} E(x) \leq x < E(x) + 1 \\ x - 1 < E(x) \leq x \end{array}$$

(voir la note⁴)**Attention :** $E(x)$ n'est pas "ce qui se trouve avant la virgule".(Cela n'est vrai que si le réel x est positif)**Test 205**Quand c'est possible, calculer en fonction de $E(x)$ et $E(y)$ les quantités

$$E(x+1), \quad E\left(\frac{x}{2}\right), \quad E(2x), \quad E(x+y), \quad E(-x)$$

Test 206Donner la représentation graphique sur $[-3; 3]$ de

$$f(x) = E(2x), \quad g(x) = E(x^2), \quad h(x) = E(\sqrt{x})$$



8.4.3 $\mathbb{R}$ et les rationnels

Th. $\triangleright$ $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b \Rightarrow]a, b[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

*Ceci montre qu'on peut, avec une précision arbitraire ε ,
approcher un réel quelconque x par un rationnel r :*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists r \in \mathbb{Q}, \quad |x - r| < \varepsilon$$

**Conséquence :** entre deux réels distincts il existe au moins un irrationnel.Ceci signifie que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On dit que $\mathbb{Q}$ est rare dans $\mathbb{R}$.

8.4.4 Les décimaux

 $x \in \mathbb{R}$ est un nombre décimal s'il se met sous la forme $x = \frac{p}{10^n}$, $(p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ **Rappel :** l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.**Test 207**Pourquoi $\mathbb{D}$ n'est-il pas un corps ?**Th.** $\triangleright$ Approximation décimale d'un réel

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{Z} \quad \frac{p}{10^n} \leq x < \frac{p}{10^n} + \frac{1}{10^n}$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{p}{10^n} \text{ est l'approximation décimale par défaut} \\ \frac{p+1}{10^n} \text{ est l'approximation décimale par excès} \end{array} \right.$$

4. La tendance actuelle est d'utiliser la notation $\lfloor x \rfloor$.
Certains ouvrages utilisent encore la notation $[x]$

8.5 Exercices

Révisions sur le calcul avec les inégalités

Exercice 1

Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 10$, on a $n^3 \leq 2^n$.

Exercice 2

a et b étant des réels (et b étant non nul), encadrer au mieux les nombres $|a|$, $|b|$, $a - b$, $a b$ et $\frac{a}{b}$ dans chacun des cas suivants.

1. $-2 \leq a \leq 7$ et $1 < b < 3$.
2. $0 < a < 2$ et $-1 < b \leq 4$.
3. $-1 \leq a < 4$ et $-2 < b \leq -1$.

Exercice 3

Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses (x, y, a, b, c, d désignant des nombres réels) :

- | | |
|--|---|
| 1. $x \leq 3$ implique $x^2 \leq 9$. | 9. $0 < a < 9$ et $4 < b$ implique $\frac{a}{4} < \frac{b}{9}$. |
| 2. $0 \leq x \leq 3$ implique $x^2 \leq 9$. | 10. $x < y$ et x et y non nuls implique $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$. |
| 3. $0 \leq x \leq 3$ équivaut à $x^2 \leq 9$. | |
| 4. $x > 3$ implique $x^2 > 3$. | 11. $0 < a < b$ et $0 < c < d$ implique $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$. |
| 5. $x > 3$ équivaut à $x^2 > 9$ et $x > 0$. | 12. $0 < a < b$ et $0 < c < d$ implique $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$. |
| 6. $x^2 < 9$ implique $x \leq 3$. | 13. $0 < a < b$ et $0 < c < d$ implique $ac < bd$. |
| 7. $x^2 > 9$ implique $x > 3$. | 14. $0 < a < b$ et $0 < c < d$ implique $ad < bc$. |
| 8. $0 < a < 4$ et $9 < b$ implique $\frac{a}{9} < \frac{b}{4}$. | |

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $\sqrt{x+1} \leq x-1$. | 3. $\sqrt{1-\cos t} = \sin t$. |
| 2. $\sqrt{x^2-x-2} \geq x+3$. | 4. $\sqrt{2-x} + \sqrt{3+x} \geq 1$. |

Exercice 5

Soient a et b tels que $0 \leq b \leq a$. Simplifier

$$\sqrt{a+2\sqrt{a-b}\sqrt{b}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-b}\sqrt{b}}$$

Exercice 6

Montrer que, pour tout a, b réels positifs

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Montrer que pour tous réels a et b ,

$$\sqrt{|a-b|} \geq |\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}|$$

Bornes supérieures

Exercice 7

Déterminer les bornes des ensembles suivants :

$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ $B = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^* \right\}$ $C = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ $D = \left\{ 1 + \frac{1}{n-m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, n \neq m \right\}$	$E = \left\{ x + \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$ $F = \mathbb{Q} \cap]0, 1[$ $G =]0, 1[\cup \{2\}$ $H = \{\exp(-n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ $J = \left\{ \frac{1}{2n} + \frac{1}{2m+1} \mid n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N} \right\}$
--	---

Exercice 8

Une application croissante de $[a; b]$ dans lui-même possède un point fixe

On se donne $f : [a; b] \rightarrow [a; b]$ croissante. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{ x \in [a; b] \mid f(x) \leq x \}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est non vide et en déduire qu'il possède une borne inférieure notée t .
2. Montrer que $f(t)$ minore $\mathcal{E}$. En déduire que $t = \min \mathcal{E}$.
3. Montrer que $f(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$. En déduire que $f(t) \geq t$. *Nous avons ainsi montré que toute fonction $f : [a; b] \rightarrow [a; b]$ croissante possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $t \in [a; b]$ tel que $f(t) = t$.*
4. Le résultat est-il toujours vrai pour une fonction croissante $f : [a; b[\rightarrow [a; b[$?

Partie entière

Exercice 9

Pour tout réel x , comparer $E(-x)$ et $E(x)$. Calculer $E(x) + E(-x)$.

Exercice 10

Soit x un réel, et n un entier naturel non nul. Montrer que

$$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$$

Exercice 11

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad E\left(\frac{n}{3}\right) + E\left(\frac{n+2}{6}\right) + E\left(\frac{n+4}{6}\right) = E\left(\frac{n}{2}\right) + E\left(\frac{n+3}{6}\right)$$

8.6 Exercices Complémentaires

Exercice 1

Soient A et B des parties non vides de $\mathbb{R}$. On note

$$-A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in A, x = -y\} = \{-x \mid x \in A\}$$

$$A + B = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (a, b) \in A \times B, x = a + b\}$$

$$AB = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (a, b) \in A \times B, x = ab\}$$

1. Soient A et B bornées. Déterminer $\sup(A \cup B)$ et $\inf(A \cup B)$, après en avoir justifié l'existence.
2. A-t-on une propriété analogue concernant $\sup(A \cap B)$ et $\inf(A \cap B)$?
3. Exprimer $-A$, $A+B$ et AB comme images respectivement de A et de $A \times B$ d'applications à préciser.
4. Montrer que si A est majorée, $-A$ est minorée, et donner une expression de $\inf -A$ à l'aide de $\sup A$.
5. Énoncer et démontrer une propriété analogue si l'on suppose que A est minorée.
6. On suppose que A et B sont bornées. Montrer que $A + B$ est bornée. Montrer que

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \quad \text{et} \quad \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

7. A-t-on $\sup(AB) = \sup(A) \sup(B)$?

Exercice 2

Montrer que, si $0 < x < y$, on a $\frac{x}{1+y} < \frac{y}{1+x}$ et $\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y}$.

Exercice 3

On définit les fonctions f et g par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = E(2x) - 2E(x) \text{ et } g(x) = 3E(2x) - 2E(3x)$$

Montrer que les fonctions f et g sont bornées, périodiques et déterminer $f(\mathbb{R})$ et $g(\mathbb{R})$.

Exercice 4

1. Que peut-on dire de la somme et du produit de deux rationnels ? d'un rationnel et d'un irrationnel ? de deux irrationnels ?
2. Soient a et b , deux rationnels positifs tels que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ soient irrationnels. Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est irrationnel.
Indication : examiner le produit et la somme de $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ et $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$.

Exercice 5

Soient I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$: montrer que $I + J$ est encore intervalle.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une application croissante telle que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer que :

1. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(na) = nf(a)$.
2. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, f(na) = nf(a)$.
3. $\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = rf(1)$.

4. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xf(1)$ (utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

Exercice 7

$\mathcal{R}$ est l'ensemble des relations binaires sur l'ensemble non vide E .

On définit sur $\mathcal{R}$ la relation "être plus fine", noté $R \prec R'$

$$R \prec R' \Leftrightarrow \forall x, y \in E, x R y \Rightarrow x R' y$$

1. Montrer que $\prec$ définit une relation d'ordre sur $\mathcal{R}$.

2. Soit $R \in \mathcal{R}$. On note $\overline{R}$ la relation binaire définie sur E par

$$\begin{aligned} a \overline{R} b &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n} \in E \\ &\text{tels que } a_0 = a, a_{2n} = b, \text{ et} \\ &\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \begin{cases} a_{2i} R a_{2i+1} \text{ ou } a_{2i} = a_{2i+1} \\ a_{2i+2} R a_{2i+1} \text{ ou } a_{2i+2} = a_{2i+1} \end{cases} \end{aligned}$$

(a) Montrer que $\overline{R}$ est une relation d'équivalence et que $R \prec \overline{R}$

(b) Montrer que, si R' est une relation d'équivalence et $R \prec R'$, alors $\overline{R} \prec R'$

(c) En déduire que R est d'équivalence ssi $R = \overline{R}$

Exercice 8

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. $\max(f)$ désigne le plus grand élément de $f(E)$ (image de E par f). Si f et g sont deux applications de $E \rightarrow \mathbb{R}$, montrer, en supposant l'existence des maximums, que $\max(f+g) \leq \max f + \max g$ et que $\max(f-g) \geq \max f - \max g$.

Donner des exemples où ces inégalités sont strictes.

Exercice 9

Des hussards de tailles variées sont disposés en rectangle. On repère le plus grand de chaque rangée et on retient le plus petit des plus grands, noté X . Puis on repère le plus petit de chaque colonne et on retient le plus grand des plus petits, noté Y . Comparer les tailles de X et Y .

Exercice 10

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$.

$$E(\sqrt{x}) = E\left(\frac{x}{2}\right)$$

