

Chapitre 1

Révisions de calcul élémentaire

1.1 Opérations et premières formules

1.1.1 Puissances entières d'un nombre réel

Définition (Puissance x^n avec n positif)

Soit x un nombre réel et n un entier positif, on pose $x^0 = 1$ (lorsque $x \neq 0$) et $x^n = x \times x \times \cdots \times x$ (n fois) si $n \geq 1$.

Remarque : Que pensez de 0^0 ?

- Dans un contexte algébrique, probabiliste ou informatique, on pourra considérer que $0^0 = 1$ et ainsi rendre plus simple la formulation de certains théorèmes.
- Dans un contexte analytique, la limite est une forme indéterminée. Nous pourrions en rediscuter lors de la définition d'une puissance réelle d'une variable réelle.

Définition (Puissance x^n avec n négatif)

Soit x un nombre réel non nul et n un entier négatif, on pose $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$.

Exemple : $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

Th. $\triangleright$ Règles de calcul

$\forall n, m \in \mathbb{Z}$ et $\forall a, b \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{array}{lll} a^n \times a^m = a^{n+m} & (a \times b)^n = a^n \times b^n & (a^n)^m = a^{n \times m} \\ a^0 = 1 & a^{-n} = \frac{1}{a^n} & \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \end{array}$$

Test 1

Soit $n \in \mathbb{N}$, simplifier :

- $A = -8 \left(\frac{-1}{2} \right)^n + 6 \left(\frac{-1}{2} \right)^{n-1} + 5 \left(\frac{-1}{2} \right)^{n-2}$
- $B = 6^n \left[4 \left(\frac{1}{2} \right)^n - 3 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \left(\frac{1}{6} \right)^n \right]$
- $C = 8^{n+1} - 4^n \times 2^{n+2}$
- $D = \left(\frac{2}{3} \right)^n \times (1,5)^{n-2} \times 9$
- $E = (-1)^{n-1} + (-1)^{n+1} + (-1)^{n+2}$
- $F = (-1)^{n-1} \times (-1)^n \times (-1)^{n+1}$

Test 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, simplifier :

$$A = \frac{10^{n+1} - 9 \times 10^n - 10^{n+2}}{20 \times 10^{n-2} + 8 \times 10^{n-1} - 10^{n+1}}$$

$$B = 2(-1)^n(-1)^{n-1} + (-1)^{-n}(-1)^{-n+2}$$

$$C = \frac{(-1)^n - (-1)^{n-1}}{(-1)^{2n} - (-1)^{2n+1}}$$

Attention

Attention aux priorités opératoires.

Notamment savoir à quel élément s'applique la puissance :

$$3^{\sqrt{2}} \neq (3^2)^{\frac{1}{2}}$$



Point Méthode :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0^n = 0$.
- $\forall n \in \mathbb{Z}, 1^n = 1$.
- $\forall n \in \mathbb{Z}, (-1)^{2n} = 1$ et $(-1)^{2n+1} = -1$.

Test 3

Soit $n \in \mathbb{N}$, Trouver l'erreur dans la simplification suivante :

$$\frac{12^{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{9^n 8^n} = \frac{(2^2 \times 3)^{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}{(3^2)^n (2^3)^n}$$

$$\frac{12^{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{9^n 8^n} = \frac{2^{4n+2} 3^{2n+1}}{3^{2n} 2^{3n} 2^1}$$

$$\frac{12^{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{9^n 8^n} = 2^{(4n+2-3n-n-1)} 3^{(2n+1-2n)}$$

$$\frac{12^{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{9^n 8^n} = 2 \times 3$$

$$\frac{12^{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{9^n 8^n} = 6$$

Proposition (Identités remarquables simples)

Soient a, b et c trois nombres réels.

$$\begin{array}{lcl} (a+b)^2 & = & a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 & = & a^2 - 2ab + b^2 \\ a^2 - b^2 & = & (a-b)(a+b) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} (a+b)^3 & = & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 & = & a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{array} \right.$$

Th. ▢ Identités remarquables : les nouvelles

Soient a, b et c trois nombres réels.

$$\begin{array}{lcl} (a+b+c)^2 & = & a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\ a^3 - b^3 & = & (a-b)(a^2 + ab + b^2) \end{array}$$

Test 4

• Développer $A = (-5 - 2x)^2 + (3x - 9)^2$

• Développer $B = (3x^2 - 5x + 2)(2x + 3)$

• Factoriser $C = (2x + 1)^2 - 2(4x^2 - 1)$

• Factoriser $D = 2x^2 - 8$

• Factoriser $E = (3x - 1)^2 - 4x^2$

Test 5

Soit $x \in \mathbb{R}$, développer :

• $A(x) = (x - 2)(2x + 5) - (x - 2)^2$

• $B(x) = (x^2 - 2x + 3)^2$

• $C(x) = (x + 1)^3 - 2(4x - 1)^3$

Test 6

Soit $x \in \mathbb{R}$, factoriser :

- $D(x) = 16 - x^2 - 2(x - 4)^2$
- $E(x) = 2x^3 - 2$
- $F(x) = (x^2 - x - 2)^2 - (2x^2 + x - 1)^2$
- $G(x) = (9 - x^2) + x(2x - 6) - (x - 3)^2$
- $H(x) = (2x - 1)^3 - (2x - 1)$

1.1.2 Logarithme népérien

Nous admettrons l'existence du logarithme népérien de x pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Proposition (Propriétés remarquables du logarithme)

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathbb{R}_+^* \quad & \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b) \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \\ & \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(a^n) = n \ln(a) \\ & \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b \quad \ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b \\ & \ln(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \quad \ln(a) = 1 \Leftrightarrow a = e \text{ avec } e \simeq 2.718 \end{aligned}$$

1.1.3 Exponentielle

Nous admettrons l'existence d'exponentielle de x pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pourra le noter, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)$ ou e^x .

Proposition (Propriétés remarquables de l'exponentielle)

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathbb{R} \quad & \exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b) \quad \exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} \\ & \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \exp(na) = (\exp a)^n \\ & \exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b \quad \exp(a) < \exp(b) \Leftrightarrow a < b \\ & \exp(a) = 1 \Leftrightarrow a = 0 \end{aligned}$$

Proposition (Lien entre exponentielle et logarithme)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad (e^x = y) \Leftrightarrow (x = \ln(y))$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad e^{\ln(x)} = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(e^x) = x$$

1.1.4 Puissances réelles d'un réel strictement positif

Définition (Puissances réelles d'un réel strictement positif)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, soit $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x^\alpha \stackrel{\text{par définition}}{=} e^{\alpha \ln x}$$

Remarque : Lorsque α est un entier relatif, les propriétés de l'exponentielle et du logarithme montre que cette dernière définition coïncide avec la définition des puissances entières. Cette nouvelle définition a l'avantage de définir des puissances non entières mais a l'inconvénient de se restreindre à x strictement positif.

Les règles de calculs sont similaires à celles des puissances entières et nous les explicitons dans la proposition suivante

Proposition (Règles de calcul)
 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,$

$x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ $x^0 = 1$	$(x \times y)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha$ $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$	$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \times \beta}$ $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$	


Remarque :

- Remarquons que $\sqrt{x} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x} = \sqrt{4}\sqrt{x} = \sqrt{4x}$. En général :
 $\sqrt{x} + \sqrt{y} \neq \sqrt{x+y}$


Point Méthode : Simplification des racines carrées : exemple.

$$\sqrt{72} = \sqrt{2^3 \times 3^2} = \sqrt{2^3} \sqrt{3^2} = 2 \times 3 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

Test 7

Simplifier :

$A = 4\sqrt{24} - 5\sqrt{96} + 4\sqrt{54}$ $B = 2\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{180}$ $C = \left(\sqrt{7-2\sqrt{6}} + \sqrt{7+2\sqrt{6}} \right)^2$ $D = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}} \right)^2$	$E = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ $F = \sqrt{3-2\sqrt{2}} \times \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ $G = \frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ $H = \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$
---	---

Remarque : Les limites faisant appel à des opérations algébriques peuvent souvent être évaluées en remplaçant des sous-expressions par des limites. Si l'expression qui en résulte ne permet pas de déterminer la limite initiale, l'expression est appelée une forme indéterminée.

Dans le cadre analytique, on peut dire que 0^0 est une forme indéterminée.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^t = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\exp \frac{-1}{t^2} \right)^t = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\exp \frac{-1}{t} \right)^{-t} = e$$

1.1.5 Valeur absolue

Définition (Valeur absolue)

La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Proposition (Propriétés remarquables de la valeur absolue)

Soit $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$,

$x \geq 0$ $x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $x+y \leq x + y$	$x = -x$ $xy = x \times y$ - Si $y \neq 0$, $\left \frac{x}{y} \right = \frac{ x }{ y }$	$x = \max(x, -x)$ $x-y$ est la distance sur la droite réelle entre x et y - Attention : $x+y \neq x + y$ en général
--	--	--

Exprimer sans le symbole valeur absolue les expressions suivantes :

$A = 3 \ln 2 + \ln \frac{1}{9}$ $B = 3 \ln 6 - 2 \ln 4 - \ln 9$ $C = \ln(e^2 + 1)$ $D = 3 - 2\sqrt{2}$	
---	--

Test 8



Point Méthode : Equations et Inéquations simples avec une valeur absolue.



1. Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Résolvons l'équation $|x| = k$,

$$|x| = k \Leftrightarrow x = -k \text{ ou } x = k$$

2. Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Résolvons l'inéquation $|x| \leq k$,

$$|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \text{ et } x \leq k$$

3. Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Résolvons l'inéquation $|x| \geq k$,

$$|x| \geq k \Leftrightarrow x \leq -k \text{ ou } k \leq x$$

Th. $\triangleright$ **Propriété essentielle de la valeur absolue**



Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$,

$$|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$$

Test 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. $|x + 1| = 2$
2. $|x - 1| < 2$
3. $|x + 1| \geq 2$
4. $|4 - 2x| \leq 8$

Test 10

Pour chacune des fonctions f , montrer que $\forall x \in I, |f(x)| \leq M$.

1. $f : x \mapsto 2x, I = [-2; 3]$ et $M = 6$.
2. $f : x \mapsto 2e^{2x} - 6, I = [0; \ln(2)]$ et $M = 4$.
3. $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{2}{3}, I = [3; +\infty[$ et $M = \frac{2}{3}$.



Point Méthode : Oter le symbole valeur absolue.

Exprimons sans le symbole valeur absolue, selon les valeurs du réel x :

$$C(x) = 2|x + 1| - |1 - 2x|$$

Etude préliminaire avec un tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x + 1$		$-$	0	$+$
$1 - 2x$	$+$	$+$	0	$-$
	$\underbrace{\quad}_1$		$\underbrace{\quad}_2$	$\underbrace{\quad}_3$

Dès lors, il y a trois cas possibles :

- 1 : Si $x < -1$,

$$C(x) = 2 \times (-x - 1) - (1 - 2x) = -3$$

- 2 : Si $x \in [-1; \frac{1}{2}]$,

$$C(x) = 2 \times (x + 1) - (1 - 2x) = 4x + 1$$

- 3 : Si $x > \frac{1}{2}$,

$$C(x) = 2 \times (x + 1) - (-(1 - 2x)) = 3$$

Test 11

Exprimer sans le symbole valeur absolue, selon les valeurs du réel x , les expressions suivantes :

1. $A(x) = |x + 1|$
2. $B(x) = |1 - 2x|$
3. $C(x) = 3|2x + 5| + |x + 2|$

Th. ▷ Utilisation de la valeur absolue $\forall x, y \in \mathbb{R},$

- si $xy > 0$, alors

$$\ln(xy) = \ln(|x|) + \ln(|y|) \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(|x|) - \ln(|y|)$$

- si $x \neq 0$, alors

$$\ln(x^2) = 2 \ln(|x|)$$

- si $xy > 0$, alors

$$\sqrt{xy} = \sqrt{|x|}\sqrt{|y|} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|y|}}$$

Th. ▷ Relation fondamentale de la racine carrée

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2} = |x|$$

Test 12Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(3x + 4)^2 = 25$.

1.2 Sommes et produits

1.2.1 Définitions

Remarque

Nous commencerons la familiarisation avec ces notations dans ce chapitre mais nous aurons maintes fois l'occasion d'y revenir.

Définition (Intervalle d'entiers)

Soient n et p deux entiers avec $n \leq p$.

On désigne par $\llbracket n; p \rrbracket$ l'ensemble des entiers compris entre n et p .

Remarque :

1. Il y a n nombres entiers dans l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket$.
2. $\llbracket 0; n \rrbracket = \{0\} \cup \llbracket 1; n \rrbracket$, donc il y a $n + 1$ nombres entiers dans l'ensemble $\llbracket 0; n \rrbracket$.
3. $\llbracket 1; n + 1 \rrbracket = \llbracket 1; n \rrbracket \cup \{n + 1\}$, donc il y a $n + 1$ nombres entiers dans l'ensemble $\llbracket 1; n + 1 \rrbracket$.
4. Plus généralement, il y a $p - n + 1$ entiers dans l'ensemble $\llbracket n; p \rrbracket$.

Définition (Somme et Produit)

1. Soient $a_0, a_1, \dots, a_n, (n + 1)$ nombres réels.

La notation symbolique

$$\sum_{k=0}^n a_k$$

désigne la somme

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

et elle se prononce "somme de $k = 0$ à n des a_k ".

2. Plus généralement, si $a_n, a_{n+1}, \dots, a_p$ sont des nombres réels, avec $n \leq p$.

La notation symbolique $\sum_{k=n}^p a_k$ désigne la somme $a_n + a_{n+1} + \dots + a_p$ et elle se prononce "somme de $k = n$ à p des a_k ".

3. De la même manière $\prod_{k=n}^p a_k$ désigne le produit $a_n \times a_{n+1} \times \dots \times a_p$

Test 13

1. Ecrire $\ln(2) + \ln(3) + \dots + \ln(12)$ à l'aide du symbole $\sum$.
2. De même pour $5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + \dots + 25^2$.
3. Que représente la notation symbolique $\sum_{k=1}^{29} \frac{1}{7k^2}$?

Remarque :

- $\sum_{k=0}^0 a_k = a_0$,
- $\sum_{k=1}^n 1 = n$, $\sum_{k=0}^n 1 = n+1$, $\sum_{k=0}^{n+1} 1 = n+2$,
- $\sum_{k=1}^n 2 = 2n$.

**Proposition (Propriétés de calcul)**

Soient n, p deux entiers naturels avec $n \leq p$ et $a_n, a_{n+1}, \dots, a_p$ et $b_n, b_{n+1}, \dots, b_p$ des nombres réels. Alors on a



1. $\sum_{k=n}^p (a_k + b_k) = \sum_{k=n}^p a_k + \sum_{k=n}^p b_k$
2. Pour tout nombre réel λ , $\sum_{k=n}^p \lambda a_k = \lambda \sum_{k=n}^p a_k$
3. **Relation de Chasles.**

Pour tout entier positif $l \in \llbracket n; p-1 \rrbracket$, on a

$$\sum_{k=n}^p a_k = \sum_{k=n}^l a_k + \sum_{k=l+1}^p a_k$$

4. $\prod_{k=n}^p (a_k \times b_k) = \left(\prod_{k=n}^p a_k \right) \times \left(\prod_{k=n}^p b_k \right)$
5. $\prod_{k=n}^p (a_k^N) = \left(\prod_{k=n}^p a_k \right)^N$

6. **Relation de Chasles.**

Pour tout entier positif $l \in \llbracket n; p-1 \rrbracket$, on a

$$\prod_{k=n}^p a_k = \prod_{k=n}^l a_k \times \prod_{k=l+1}^p a_k$$

Test 14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S = \sum_{k=1}^n k$ et $S' = \sum_{k=1}^n n+1-k$

Calculer $S + S'$: la mettre sous une seule somme et voir qu'après simplifications elle se calcule facilement.

Proposition (Changement d'indice)

Soient l, n, p des entiers naturels avec $n \leq p$ et $a_{n+l}, a_{n+l+1}, \dots, a_{p+l}$ des nombres réels.

Alors, en posant $j = k + l$, on a $\sum_{k=n}^p a_{k+l} = \sum_{j=n+l}^{p+l} a_j$
 (on dit que l'on a fait le changement d'indice $j = k + l$).



Test 15

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S = \sum_{k=1}^n a^k$.

Calculer $S - aS$: exprimer ces sommes à l'aide des pointillés et voir qu'après simplifications il reste deux termes.

**Th. ▷ Télescopage**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_{n+1}$ des nombres réels.

Alors on a

$$\sum_{k=0}^n a_{k+1} - a_k = a_{n+1} - a_0$$

1.2.2 Combinaisons**Définition (Factoriel)**

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$n! = n \times (n-1) \cdots \times 1 \quad 0! = 1$$

Proposition (Factoriel)

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = n! \times (n+1)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, n! = (n-1)! \times n = (n-2)! \times (n-1) \times n$$

$n!$ désigne le nombre de permutations possibles dans un ensemble à n éléments.

**Proposition (Combinaison de p parmi n)**

Soient n et p deux entiers naturels avec $p \leq n$. Soit E un ensemble à n éléments.

$\binom{n}{p}$ désigne le nombre de sous-ensembles à p éléments de E et vaut

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemple : Si $E = \{1; 2; 3; 4\}$ alors il y a 6 sous-ensembles à 2 éléments : on choisit un premier élément (4 choix) puis le second (3 choix) puis on ôte l'ordre (diviser par 2).

Simplifier les expressions suivantes, on précisera le bon quantificateur pour n :

$$\begin{aligned} & \frac{7!}{6!} \quad \frac{13!}{11!} \quad \frac{(n+1)!}{n!} \quad \frac{(n+3)!}{n!} \\ & \frac{n!}{(n-2)!} \quad \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!} \\ & \binom{7}{3} \quad \binom{30}{2} \quad \binom{n}{2} \quad \binom{n}{3} \\ & \binom{n+1}{3} \quad \binom{n+1}{n-1} \quad \binom{2n+1}{2} \end{aligned}$$

Test 16

Ecrire avec des factorielles les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} & n(n+1)(n+2) \\ & (n+1)(n+2) \\ & (2n+1)(2n+2) \cdots (3n) \end{aligned}$$

Proposition (Convention parfois utilisée)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$.

Pour $p < 0$ et $p > n$, par convention on pose :

$$\binom{n}{p} = 0$$

On pourra interpréter qu'il y a 0 sous-ensembles à p éléments dans un ensemble à n éléments pour $p < 0$ et $p > n$.

Proposition (Formules)

$\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall p \in \{0; \dots; n\}$, on a

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

Th. $\triangleright$ **Triangle de Pascal**

Pour tous n et p deux nombres entiers positifs tels que $p < n$, on a

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$\dots$	p	$p+1$	$\dots$	n	$n+1$
$n=0$	1										
$n=1$	1	1									
$n=2$	1	2	1								
$n=3$	1	3	3	1							
$n=4$	1	4	6	4	1						
$n=5$	1	5	10	10	5						
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$									
n	1	n					$\binom{n}{p}$	$\binom{n}{p+1}$		1	
$n+1$	1	$n+1$	$\dots$				$\dots$	$\binom{n+1}{p+1}$		$n+1$	1

Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :

Test 17

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 3n(n-1)$$

$$\binom{4n-17}{2n-1} = \binom{4n-17}{2n-3}$$

Théorème (Formule du binôme de Newton)

Soient a, b deux nombres réels et n un entier. Alors on a

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} a^n b^0$$



Point Méthode :

1. Développons $(x+3)^5$

$$(x+3)^5 = 1 \times x^0 \times 3^5 + 5 \times x^1 \times 3^4 + 10 \times x^2 \times 3^3 + 10 \times x^3 \times 3^2 + 5 \times x^4 \times 3^1 + 1 \times x^5 \times 3^0$$

2. Calculons $A = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \dots + \binom{10}{10}$

$$\begin{aligned} A &= \binom{10}{0} 1^0 1^{10} + \binom{10}{1} 1^1 1^9 + \binom{10}{2} 1^2 1^8 + \dots + \binom{10}{10} 1^{10} 1^0 \\ &= (1+1)^{10} = 2^{10} \end{aligned}$$

Le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à 10 éléments est 2^{10} , il est égal à l'addition des nombres de sous-ensembles à 0, 1, 2, ..., 10 éléments.

Développer les expressions suivantes :

$$(2+x)^4 \quad (3-2x)^3 \quad (2-x)^4$$

$$(1+x^2)^7 \quad (1002)^3 \quad (\sqrt{3}-1)^4$$

Préciser le terme de degré 4 dans $(2+5x)^6$.

Test 18

Test 19

Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

puis déterminer pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$$

En déduire :

$$\sum_{k=0, k \text{ impair}}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0, k \text{ pair}}^n \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

1.3 Trigonométrie

1.3.1 Définition de sinus et cosinus

Définition (Cercle trigonométrique)

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan. On appelle *cercle trigonométrique* tout cercle de rayon 1 et de centre l'origine du repère.

Définition (Radian)

Un radian correspond à la mesure de l'angle au centre d'un cercle trigonométrique qui intercepte un arc de longueur d'une unité de longueur.

2π est le périmètre du cercle trigonométrique donc toutes les mesures en radians d'un angle sont données à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$\alpha \equiv \beta[2\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \alpha = \beta + 2k\pi$$

Définition (Cosinus et sinus)

Soit x un réel, il lui correspond un unique point M sur le cercle trigonométrique tel que x soit une mesure en radians de l'angle $(\vec{i}, \widehat{OM})$ où

- $\cos(x)$, est l'abscisse de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- $\sin(x)$, est l'ordonnée de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Remarque : Si $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, en appelant H et K les projetés orthogonaux de M respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées, alors on a dans le triangle rectangle OMH où $OM=1$ (le cercle étant un cercle trigonométrique) :

$$\cos(\widehat{MOH}) = \frac{OH}{OM} = OH = \cos(x) \quad \sin(\widehat{MOH}) = \frac{KH}{OM} = OK = \sin(x)$$

La définition du cosinus et du sinus pour un réel compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ coïncide donc avec la définition du cosinus et du sinus dans un triangle rectangle.

Proposition

Pour tout réel x et tout entier relatif k :

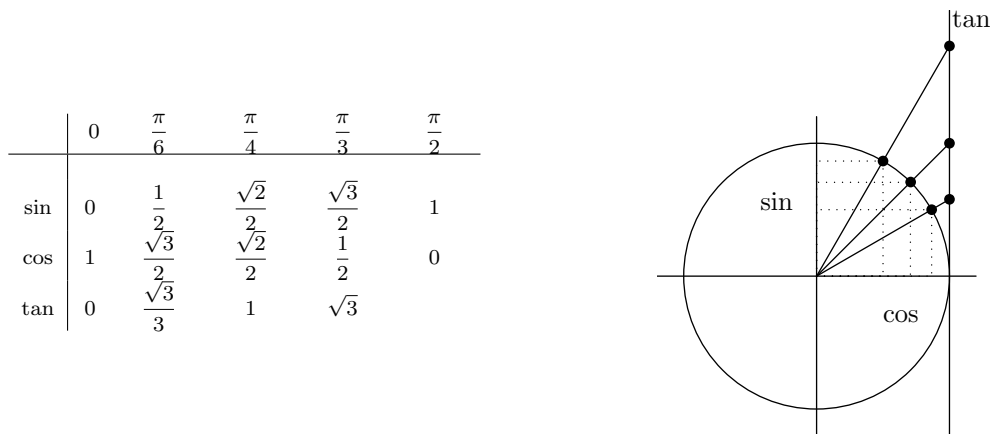
- $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
- $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$
- $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$

Test 20

Retrouver par lecture graphique sur le cercle trigonométrique des relations entre sinus et cosinus de x , $-x$, $\pi + x$ et $\pi - x$ pour x un réel.

1.3.2 Valeurs particulières

Là encore, il faut utiliser le cercle trigonométrique :



Test 21

Donnez les valeurs de $\sin \frac{17\pi}{2}$ $\cos \frac{123\pi}{6}$ $\cos \frac{107\pi}{3}$

1.3.3 Formules d'addition

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b\end{aligned}$$



Test 22

Soit a un réel. Calculer le sinus et le cosinus de $-a$, $a + \frac{\pi}{2}$ et $a + \pi$ en fonction du cosinus et du sinus de a .

Test 23

Calculer le sinus et le cosinus de $\frac{7\pi}{12}$ et de $\frac{\pi}{8}$

1.4 Equations

Proposition (Produit en croix)

Soient a , b , c et d quatre nombres réels.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow (ad = bc \text{ et } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0)$$

Théorème (Equation du second degré)

Soient a , b , c trois nombres réels tels que $a \neq 0$.

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles distinctes $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et on a la factorisation

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

d'où les relations

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution double $x_1 = -\frac{b}{2a}$ et on a la factorisation

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

- aucune solution si $\Delta < 0$ et il n'y a pas de factorisation.

Les solutions de l'équation sont appelées les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Remarque : L'équation du second degré ayant pour solution x_1 et x_2 de somme S et de produit P est $x^2 - Sx + P = 0$.

Proposition (Equation et carré)

Soient A et B deux réels.

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 = B^2 \\ A \text{ et } B \text{ de même signe} \end{cases}$$



Point Méthode : Résolution de $\sqrt{x+2} = x$

- Ensemble de définition.
Soit $x \in \mathbb{R}$, l'égalité $\sqrt{x+2} = x$ a un sens si $x+2 \geq 0$.
- Réolvons dans $[-2; +\infty[$, l'équation $\sqrt{x+2} = x$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} &= x \\ (\sqrt{x+2})^2 &= x^2 \text{ et } x \geq 0 \\ x+2 &= x^2 \text{ et } x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \text{ et } x \geq 0 \\ (x = -1 \text{ ou } x = 2) \text{ et } x \geq 0 \end{aligned}$$

- Finalement l'équation $\sqrt{x+2} = x$ admet pour unique solution 2.

Test 24

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $\sqrt{x-4} = 2$
- $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 5$
- $\sqrt{6x+19} = 3x+1$
- $\sqrt{x^2+9} = 5$
- $x-2 = \sqrt{x}$



Point Méthode : Résolution de $e^{3x} = 2$

- Ensemble de définition.
L'égalité a un sens pour tout x de $\mathbb{R}$.
- Réolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $e^{3x} = 2$
Or $2 > 0$ et $e^{3x} > 0$
Donc $e^{3x} = 2 \Leftrightarrow \ln(e^{3x}) = \ln(2) \Leftrightarrow 3x = \ln(2)$. Finalement $x = \frac{1}{3} \ln(2)$ est l'unique solution.

Théorème (Principe d'identification)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ et $b_0, b_1, \dots, b_p$ des réels.

Soient α, β deux réels tels que $\alpha < \beta$.

$$(\forall x \in [\alpha; \beta], a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = b_0 + b_1x + \dots + b_px^p) \Leftrightarrow \left(n = p \text{ et } \begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 \\ \vdots \\ a_n = b_n \end{cases} \right)$$

Test 25

Dans chacun des cas suivants, déterminer les réels a, b (éventuellement c) tels que

1. $\forall x \in \mathbb{R},$

$$a(x+1)(x+2) + b(x+2) = 3x^2 + 2x - 8$$

2. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\},$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{1}{x^2+x}$$

3. $\forall x \in \mathbb{R},$

$$a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1) = (x+1)^2$$

4. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\},$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$

1.5 Inéquations

Proposition (Règles de calcul sur les inégalités)

Soient a, b et c trois nombres réels.

Transitivité : Si $a \leq b$ et si $b \leq c$ alors $a \leq c$.

Ajouter : Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ et $a - c \leq b - c$.

Multiplier : Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$. Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$



Point Méthode : Cas du quotient

Il est interdit de diviser !

Pour encadrer $\frac{2x}{5-x}$ sur $[1; 3]$:

$$2 \leq 2x \leq 6 \text{ et } 2 \leq 5-x \leq 4$$

$$2 \leq 2x \leq 6 \text{ et } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{5-x} \leq \frac{1}{2}$$

On multiplie les inégalités membre à membre :

$$\frac{2}{4} \leq \frac{2x}{5-x} \leq \frac{6}{2}$$

Test 26

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $15x^2 - 22x + 8 \leq 0$

2. $\frac{5x+2}{x-1} \geq 0$

3. $(2x-3)(3-2x) < 0$

4. $x^2(4x-8) > 0$

Définition (Monotonie)

Soit I un intervalle sur lequel f est définie ; dire que

1. f est croissante (resp. décroissante) sur I signifie que

$$\forall x_1, x_2 \in I, \begin{cases} x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \\ \text{resp. } x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2). \end{cases}$$

2. f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I signifie que

$$\forall x_1, x_2 \in I, \begin{cases} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \\ \text{resp. } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2). \end{cases}$$

3. Dire qu'une fonction est monotone sur un intervalle signifie qu'elle est croissante (ou décroissante) sur cet intervalle.

Proposition (Monotonie et antécédents)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Soient x_1 et x_2 deux nombres de I tels que $f(x_1) < f(x_2)$.

— Si f est croissante sur I alors $x_1 < x_2$.

— Si f est décroissante sur I alors $x_1 > x_2$.

Soient x_1 et x_2 deux nombres de I tels que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

— Si f est strictement croissante sur I alors $x_1 \leq x_2$.

— Si f est strictement décroissante sur I alors $x_1 \geq x_2$.



Point Méthode : Nous avons vu précédemment la gestion des inégalités. La monotonie permet d'aller plus loin.

Lorsque nous déciderons d'appliquer aux deux membres d'une inégalité une fonction, nous commencerons par nous assurer que les deux membres appartiennent à un même intervalle où cette fonction est monotone.

Et grâce à la proposition précédente, nous pourrions obtenir une équivalence.

Retenons la rédaction imposée, grâce à ce premier exemple :

Résolution de $\sqrt{x-4} < 5$

1. Ensemble de définition.

Soit $x \in \mathbb{R}$, l'inégalité $\sqrt{x-4} < 5$ a un sens ssi $x-4 \geq 0$ autrement dit si $x \geq 4$.

2. Résolvons dans $[4; +\infty[$, l'inéquation $\sqrt{x-4} < 5$

$$\begin{aligned} \sqrt{x-4} &< 5 \\ \text{Or } \sqrt{x-4} &\geq 0 \text{ et } 5 > 0 \\ \text{Et la fonction } x &\mapsto x^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x-4})^2 &< 5^2 \\ \Leftrightarrow x-4 &< 25 \\ \Leftrightarrow x &< 29 \end{aligned}$$

Or les solutions appartiennent à $[4; +\infty[$.

3. Finalement l'ensemble des solutions de l'inéquation $\sqrt{x-4} < 5$ est $[4; 29[$.

Précisons la démarche, grâce à ce second exemple :



Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\sqrt{x+2} > x$.

1. Ensemble de définition.

Soit $x \in \mathbb{R}$, l'inégalité a un sens ssi $x+2 \geq 0$ autrement dit $x \geq -2$.

2. Résolvons dans $[-2; +\infty[$, l'inéquation $\sqrt{x+2} > x$

(a) Premier cas : supposons $x \geq 0$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} &> x \\ \text{Or } \sqrt{x+2} &\geq 0 \text{ et } x \geq 0 \\ \text{Et la fonction } x &\mapsto x^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x+2})^2 &> x^2 \\ \Leftrightarrow x+2 &> x^2 \\ \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 &> 0 \dots \\ &x \in]-1; 2[\\ \text{Or } x &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x &\in [0; 2[\end{aligned}$$

(b) Second cas : supposons $-2 \leq x < 0$

$$\sqrt{x+2} > x$$

Or $\sqrt{x+2} \geq 0$ et $x < 0$

Donc $\forall x \in [-2; 0[, \sqrt{x+2} > x$.

3. Finalement l'ensemble des solutions de $\sqrt{x+2} > x$ est $[-2; 2[$.

Réolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $e^{3x} > 2$.

$$\begin{aligned} e^{3x} &> 2 \\ \text{Or } e^{3x} &> 0 \text{ et } 2 > 0 \\ \text{Et la fonction } x &\mapsto \ln(x) \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ \Leftrightarrow 3x &> \ln(2) \end{aligned}$$

Réolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $x^2 > 9$.

$$\begin{aligned} x^2 &> 9 \\ \text{Or } x^2 &\geq 0 \text{ et } 9 \geq 0 \\ \text{Et la fonction } x &\mapsto \sqrt{x} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+ \\ \Leftrightarrow |x| &> 3 \end{aligned}$$

Test 27

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+4x}} > \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sqrt{x+1} < x-3$$

1.6 Systèmes d'équations linéaires

1.6.1 Définitions

Système :

Soient p et n deux nombres entiers non-nuls.

On appelle système d'équations linéaires de n équations à p inconnues (appelé aussi système $n \times p$) un système de la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

où les $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des nombres réels et $x_1, \dots, x_p$ les inconnues,

$a_{i,j}$ s'appelle le coefficient de la $j^{\text{ème}}$ inconnue x_j dans la $i^{\text{ème}}$ équation (L_i) .

Système carré :

Si $n = p$, on dit que le système (S) est carré d'ordre n .

Système homogène :

On dit que le système (S) est homogène (ou sans second membre)

si seulement si $b_1 = \dots = b_n = 0$.

Dans ce cas, $(0; \dots; 0)$ est solution de (S) .

Système homogène associé :

On appelle système homogène associé à (S) le système obtenu à partir de (S) en remplaçant tous les nombres b_i par 0.

Solution d'un système :

Résoudre un système, c'est déterminer toutes les listes de nombre réels $(x_1, \dots, x_p)$ vérifiant simultanément les n équations $L_1, \dots, L_n$.

Système équivalents :

On dit que deux systèmes (S) et (S') sont équivalents si et seulement si ils ont les mêmes solutions

Définition (Système triangulaire)

On dit qu'un système (S) est triangulaire si et seulement si

$\forall i \in \{1; \dots; n\}, \forall j \in \{1; \dots; p\}$ avec $i > j$ on a $a_{i,j} = 0$.

Autrement dit le système (S) est de la forme

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + a_{2,4}x_4 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 & (L_2) \\ a_{3,3}x_3 + a_{3,4}x_4 + \dots + a_{3,p}x_p = b_3 & (L_3) \\ \vdots \\ a_{n,n}x_n + \dots + a_{n,p}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

Définition (Opérations élémentaires)

Soit (S) un système $n \times p$. On appelle opération élémentaire l'une des trois opérations suivantes.

1. L'échange de la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i et de la $j^{\text{ème}}$ ligne L_j se note $L_i \longleftrightarrow L_j$
2. Soit λ un nombre réel **non-nul**.
Le remplacement de la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i par la ligne λL_i se note $L_i \leftarrow \lambda L_i$
(on a multiplié la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i par λ).
3. Soit λ un nombre réel **quelconque**.
Le remplacement de la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$ se note $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
(on a multiplié la $j^{\text{ème}}$ ligne L_j par λ et on a ajouté le résultat à la $i^{\text{ème}}$ ligne)

Théorème

Tout système obtenu à partir de (S) en transformant l'une des ses équations par une transformation élémentaire est équivalent à (S) .

1.6.2 Résolution des systèmes**Pivot de Gauss**

C'est la méthode fondamentale dans la résolution des systèmes linéaires.

Elle utilise les opérations élémentaires précédentes et permet d'obtenir des systèmes équivalents autrement dit qui ont exactement le même ensemble de solutions.

Exemple :

Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} \boxed{1}x + y + z = 6 & (L_1) \\ 2x - y + z = 3 & (L_2) \\ 3x & -z = 0 & (L_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 & (L_1) \\ \boxed{-3}y - z = -9 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ -3y - 4z = -18 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 & (L_1) \\ -3y - z = -9 & (L_2) \\ -3z = -9 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{cases}$$

Après la descente, on obtient un système triangulaire. On peut maintenant effectuer la remontée.

$$\begin{cases} x + y + 3 = 6 \\ -3y - 3 = -9 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2 + 3 = 6 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Finalement le système a une unique solution $(1, 2, 3)$. Autrement dit l'ensemble des solutions est $\{(1, 2, 3)\}$.

Test 28

Les systèmes suivants sont-ils résolubles. Si oui, expliciter les solutions :

1.
$$\begin{cases} -x - y + 2z = -1 \\ 3x + 2y - 4z = 1 \\ x + 3y - 6z = 5 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 4x - 5y + z = 15 \\ 2x + 4z = 1 \end{cases}$$

Forme générale des solutions

FONDAMENTAL

Soit (S) un système de taille $n \times p$. Le pivot de Gauss permet d'obtenir un système (S') équivalent au système (S) de la forme suivante :

$$(S') \left\{ \begin{array}{l} a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + \dots + a'_{1,p}x_p = b'_1 \\ \vdots \\ a'_{r,r}x_r + \dots + a'_{r,p}x_p = b'_r \\ 0 = b'_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = b'_n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{équations principales} \\ \\ \text{équations auxiliaires} \end{array}$$

Alors le système (S) admet des solutions si et seulement si toutes les équations auxiliaires sont vérifiées.

Si une des équations auxiliaires n'est pas vérifiée, il n'y a pas de solutions au système.

Supposons que dans (S') , toutes les équations auxiliaires soient vérifiées.

Ainsi (S') , et a fortiori (S) , est équivalent au système suivant :

$$(S') \left\{ \begin{array}{l} a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + \dots + a'_{1,p}x_p = b'_1 \quad (L_1) \\ \vdots \\ a'_{r,r}x_r + \dots + a'_{r,p}x_p = b'_r \quad (L_r) \end{array} \right.$$

avec $a'_{i,i} \neq 0 \forall i \in \{1; \dots; r\}$.

1. Puisque $a'_{r,r} \neq 0$, on peut donc exprimer x_r en fonction de $x_{r+1}, \dots, x_p$.
2. On substitue x_r dans (L_{r-1}) et puisque $a'_{r-1,r-1} \neq 0$, on exprime x_{r-1} en fonction de $x_{r+1}, \dots, x_p$.
3. On itère le processus et on obtient au final que (S) est équivalent à un système (S'') de la forme

$$(S'') \left\{ \begin{array}{l} x_1 = a''_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a''_{1,p}x_p + b''_1 \\ x_2 = a''_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a''_{2,p}x_p + b''_2 \\ \vdots \\ x_r = a''_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a''_{r,p}x_p + b''_r \end{array} \right.$$

et les variables auxiliaires $x_{r+1}, \dots, x_p$ pouvant prendre toutes les valeurs réelles.

Ainsi l'ensemble des solutions du systèmes (S) est

$$\left\{ \begin{pmatrix} a''_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a''_{1,p}x_p + b''_1 \\ \vdots \\ a''_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a''_{r,p}x_p + b''_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, x_{r+1} \in \mathbb{R}, \dots, x_p \in \mathbb{R} \right\}$$

Il y a donc ici une infinité de solutions.

Exemple :

Réolvons le système suivant :

$$\begin{cases} \boxed{2}x + 2y - z + t = 6 & (L_1) \\ x + 4y - 2z + 2t = 3 & (L_2) \\ 3x - 2y + z - t = 9 & (L_3) \\ x - 4y + 2z - 2t = 0 & (L_4) \\ x + 2y - z + t = 3 & (L_5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y - z + t = 6 \\ \boxed{6}y - 3z + 3t = 0 & (L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1) \\ -10y + 5z - 5t = 0 & (L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1) \\ -4y + 2z - 2t = 0 & (L_4 \leftarrow L_4) \\ +2y - z + t = 0 & (L_5 \leftarrow 2L_5 - L_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y - z + t = 6 \\ 6y - 3z + 3t = 0 \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow 3L_3 + 5L_2) \\ 0 = 0 & (L_4 \leftarrow 3L_4 + 2L_2) \\ 0 = 0 & (L_5 \leftarrow 3L_5 - L_2) \end{cases}$$

Les trois équations auxiliaires sont vérifiées, le système est donc équivalent à :

$$\begin{cases} 2x + 2y - z + t = 6 \\ 6y - 3z + 3t = 0 \end{cases}$$

On obtient un système triangulaire contenant deux inconnues principales x et y et des inconnues auxiliaires z et t .

$$\begin{cases} 2x + 2y = 6 + z - t \\ 6y = 3z - 3t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 6 + z - t \\ y = \frac{1}{2}(z - t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2}(z - t) \end{cases}$$

Finalement l'ensemble des solutions est $\left\{ \left(3, \frac{1}{2}(z - t), z, t \right), z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \right\}$.

Test 29

Les systèmes suivant sont-ils résolubles. Si oui, expliciter les solutions :

1.

$$\begin{cases} 2a + b + c - 3d = 1 \\ a - 2b + c + d = -2 \\ -a + b + 5c = 1 \\ 3a - 2b - c - d = -2 \\ 2a - b + c - d = -1 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 2x + y + z = -5 \\ 2x + 13y - 7z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Systèmes de Cramer

Reprenons le système (S') dans le cas où $n = p$ et voyons le cas particulier où il n'y a pas d'équations auxiliaires autrement dit $r = n$.

$$(S') \begin{cases} a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + \dots + a'_{1,n}x_n = b'_1 \\ \ddots \\ a'_{n,n}x_n = b'_n \end{cases}$$

La remontée nous montre que ce système admet une unique solution.

Définition (Système de Cramer)

Dire qu'un système carré est de Cramer signifie qu'il possède une unique solution.

Théorème

Un système (S) carré d'ordre n est de Cramer si et seulement si le pivot de Gauss fait apparaître n pivots successifs non-nuls.

Proposition

Un système (S) carré d'ordre n et homogène est de Cramer si et seulement s'il possède comme unique solution $(0; \dots; 0)$.

Proposition

Un système est de Cramer si et seulement si son système homogène associé est de Cramer.



1.7 Exercices

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_n = \frac{(9^{n+1} - 9^n)^2}{(3^{n+1} - 3^n)^4}$$

1. Calculer A_0 et A_1 . Que peut-on remarquer ?
2. Calculer A_n pour n quelconque dans $\mathbb{N}$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. $|x + 1| - |2x + 1| = 0$
2. $|x + 1| + |2x + 1| = 0$
3. $|x^2| - |x| = 0$
4. $|2x + 1| = |x - 3|$

Exercice 3

Simplifier les expressions suivantes :

$$\frac{(n+1)!}{(n+2)!} + \frac{n!}{(n+1)!}$$

$$\frac{\binom{n}{4}}{\binom{n-1}{2}}$$

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

$$\binom{n}{3} = n(2n - 9)$$

$$\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} = \frac{5n^2 - 4n}{3}$$

$$7 \binom{n}{2} = 2 \binom{n+10}{2}$$

$$\binom{2n+1}{2n-2} = \binom{2n+1}{2n-4}$$

Exercice 5

1. Quel est le coefficient de x^4 dans le développement de $(2x + 1)^8$.
2. Même question avec $(2x + 3)^5$.

Exercice 6

1. Développer $(2 - x)^4$.
2. Développer $(2 + \frac{x}{2})^5$.

Exercice 7

Sans calculatrice, calculer 101^3 et $(\sqrt{2} + 1)^5$

Exercice 8

Résoudre les équations suivantes (l'inconnue x est un nombre réel) :

1. $(x + 3)(2x - 5)(6x + 2) = 0$
2. $x^2 - 12 = 0$
3. $\frac{3}{x - 4} = \frac{2}{x + 1}$
4. $\frac{2x + 1}{x - 3} = -\frac{2x - 1}{x + 3}$
5. $\frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}} + x = 0$
6. $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$
7. $(\ln x)^2 + 3 \ln x + 2 = 0$
8. $x = \sqrt{x} + 2$

Exercice 9

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 - 2x - 3 = 0$
2. $x^2 - x - 1 = 0$
3. $x^2 + x + 1 = 0$
4. $3x^2 + x - 2 = 0$
5. $-x^2 - 5x + 1 = 0$
6. $\frac{1}{x} = x - 1$
7. $x^2 - x + 1 = 0$
8. $\frac{x + 1}{x - 1} = x$

Exercice 10

Résoudre l'équation suivante, m étant un paramètre réel :

$$(m - 2)x^2 + 2(m + 1)x + m - 14 = 0$$

Exercice 11

Les systèmes suivants sont-ils résolubles. Si oui, expliciter les solutions :

1.
$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 1 \\ 4x - y + 3z = -1 \\ 2x + 5y + z = 1 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} y + z + t = -1 \\ x + z + t = 0 \\ x + y + t = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + y - z + t = 4 \\ x - y + 2z - t = -2 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 2 \\ -x + y - 2z = 7 \\ 3x - 4y - 3z = 4 \end{cases}$$

Exercice 12

Résoudre par la méthode du pivot en discutant suivant la valeur du paramètre λ les systèmes suivants. (*Indication : on pourra échanger des lignes afin de manipuler un pivot fonction de λ le plus tard possible*)

1.
$$(E_\lambda) : \begin{cases} (1 - \lambda)x + y = 0 \\ -x + (2 - \lambda)y + z = 0 \\ x + (1 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$
2.
$$(E_\lambda) : \begin{cases} (2 - \lambda)x + y + z = 0 \\ x + (2 - \lambda)y + z = 0 \\ x + y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$
3.
$$(E_\lambda) : \begin{cases} (1 - \lambda)x + y + z = 0 \\ x + (1 - \lambda)y + z = 0 \\ x + y + (1 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

Exercice 13

1. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $n \geq p$. Montrer que

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

2. En déduire $\sum_{k=1}^n k$ et $\sum_{k=1}^n k^2$

Exercice 14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto (1 + x)^n$$

1. Calculer de deux façons la dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k \binom{n}{k}$.
3. De la même manière, déterminer $\sum_{k=1}^n k(k-1) \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$.
4. Etablir une formule analogue en calculant de deux façons différentes $\int_0^1 f(x) dx$

Exercice 15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Exprimer en fonction de n le produit des n premiers entiers naturels non nuls pairs :

$$\prod_{k=1}^n 2k$$

2. Exprimer en fonction de n le produit des n premiers entiers naturels non nuls impairs :

$$\prod_{k=1}^n 2k + 1$$

Exercice 16

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $|2x + 5| \geq \sqrt{10 - x}$
2. $\left| \frac{4x + 5}{x - 2} \right| \leq 5$
3. $\binom{p}{3} + \binom{p}{2} \geq \binom{p}{4}$

1.8 Exercices Complémentaires

Exercice 1

Déterminer l'ensemble des polynômes P de degré 3 vérifiant

$$P(1) = P(-2) = 1$$

$$P'(1) = 1$$

Exercice 2

Soient a et b deux réels.

On considère le système

$$(E_{(a,b)}) : \begin{cases} ax + 2y - z = 1 \\ -x + 3y + z = b \\ 2x - 7y + 3z = -2 \end{cases}$$

Résoudre le système selon les valeurs de a et de b .

Exercice 3

- Développer

$$A = (2+x)^3 + (2-x)^3$$

- Factoriser

$$B = (x^2 - 4x + 1)^2 - (6x^2 - 3x + 1)^2$$

- Factoriser

$$C = (x+3)(2x^2-8) - (x^2+4x+4)(x-2)$$

Exercice 4

- Simplifier

$$A = \frac{10^3 + 10^5 + 10^7}{10^4 + 10^6 + 10^8}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$, simplifier

$$B = (-1)^{2n+2} - (-1)^{2n+3} + (-1)^{2n-1}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$, simplifier

$$C = 2^{n+2} - 3 \times 2^n - 8 \times 2^{n-2} + \frac{1}{2} 2^{n+1}$$

Exercice 5

Exprimer sans le symbole valeur absolue les expressions suivantes :

- $A = |\ln 3 - 2 \ln 2|$
- $B = |\ln 5 + \ln 2 - 2 \ln 3|$

- $C = |\ln e^{2x}|$

- $D = |x-1| + |x+1|$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

- $|3x-5| = 4$
- $|x-3| + 2|x-1| = 0$
- $|3-2x| \geq 1$
- $|3-x| = x+1$

Exercice 7

Simplifier :

- $A = \sqrt{48} + \sqrt{147} - 2\sqrt{75}$
- $B = \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}} \right)^2$
- $C = \frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2}$

Exercice 8

Résoudre les équations :

- $\sqrt{2x+1} = 3$
- $\sqrt{25-6x} = x-3$
- $\sqrt{3x-2} = 4$

Exercice 9

Les systèmes suivants sont-ils résolubles. Si oui, expliciter les solutions :

- $$\begin{cases} x - 3y + 6z = 0 \\ 6x - 8y + 12z = 0 \\ 3x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 3 \\ 2x - y - z = 5 \\ -x - y - z = 1 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} x + 3y - z + t = 1 \\ 2x + 13y - 7z + 2t = 2 \\ x - y + z + t = 0 \\ x + 7y - 4z + t = -1 \end{cases}$$

6.

$$\begin{cases} u + w = 1 \\ v + w = 0 \\ u + v = 12 \\ u + 3v = 0 \end{cases}$$

7.

$$\begin{cases} x + y - t = 1 \\ -x + y + z = 0 \\ -y + z + t = 0 \\ x - z + t = 1 \end{cases}$$

Exercice 10

Résoudre les systèmes selon les valeurs de λ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.

$$(E_\lambda) : \begin{cases} (1 - \lambda)x - 3y + 6z = 0 \\ 6x - (8 + \lambda)y + 12z = 0 \\ 3x - 3y + (4 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

2.

$$(F_\lambda) : \begin{cases} -\lambda x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - \lambda y - z = 0 \\ -x - y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

3.

$$(G_\lambda) : \begin{cases} -\lambda x + y = 0 \\ x - \lambda y + z = 0 \\ y - \lambda z = 0 \end{cases}$$