

# Programme de Colle 25

## Chapitre 22 : Matrices

### Rang et trace d'une matrice

- Définition de rang, invariance par multiplication par une inversible
- Caractérisation du rang, manipulations élémentaires
- Matrices semblables
- Définition de trace, égalité pour des matrices semblables, trace d'un endomorphisme

## Chapitre 23 : Espaces euclidiens

### Produit scalaire, norme associée

- Définition du produit scalaire sur un  $\mathbb{R}$ -ev, espace préhilbertien, espace euclidien
- Produits scalaires canoniques de  $\mathbb{R}^n$  et de  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$
- Expression analytique d'un produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz
- Définition de norme, inégalité triangulaire inversée
- Norme euclidienne, identités de polarisation et du parallélogramme,

### Orthogonalité

- Définition, propriétés de l'orthogonal d'une partie
- Familles orthogonales, liberté, relation de Pythagore

### Espaces euclidiens

- Orthogonalisation de Gram-Schmidt
- Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormale
- Supplémentaire orthogonal, hyperplan et vecteur normal
- Projection orthogonale, caractérisation avec le produit scalaire, calcul de l'image, distance à un SEV
- Symétrie orthogonale, caractérisation avec le produit scalaire

## *Démonstrations possibles*

- Caractérisation du rang
- Inégalité de Cauchy-Schwarz
- Norme associée à un produit scalaire
- Propriétés de l'orthogonal d'une partie
- Bijection entre E et son dual
- Caractérisation des projecteurs orthogonaux avec le produit scalaire