Solutions polynomiales d'une Equa. Diff., App. Lin.

Soit λ un réel donné, et soit I l'intervalle $]-1;1[$.
On considère l'équation différentielle :

$$(E_\lambda) : (1-x^2)y' + (3x+1-\lambda)y = 0$$

1. Déterminer les réels a et b dépendant de λ tels que pour tout $x \in$ I,
$$\frac{3x+1-\lambda}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$$
2. Résoudre l' équation (E_λ) sur I pour tout réel λ .
3. Montrer que les seules valeurs de λ pour lesquelles les solutions de (E_λ) sont des fonctions polynômiales sont : -2 ;0 ;2 ;4 . Préciser alors les solutions correspondantes.
4. Soient $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3 , et $B = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
On note R et S les polynômes définis par $R = 1 - X^2$, et $S = 1 + 3X$.
   (a) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a : $RP' + SP \in \mathbb{R}_3[X]$.
   (b) Montrer que l'application f qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe $f(P) = RP' + SP$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (c) Calculer $f(P)$ pour $P \in \{1, X, X^2, X^3\}$, et en déduire la matrice A de f dans la base B.
   (d) Déterminer les polynômes Q et les réels λ tels que $f(Q) = \lambda Q$
   (e) En déduire une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Correction

1. Soient a et b deux réels. On a
$\forall x \in I, \frac{3x+1-\lambda}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} \Leftrightarrow \forall x \in I, 3x+1-\lambda = (a-b)x + a + b$
En identifiant les coefficients des fonctions polynomiales $x \mapsto 3x+1-\lambda$ et $x \mapsto (a-b)x+a+b$, il vient
$\begin{cases} a-b=3 \\ a+b=1-\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2-\frac{\lambda}{2} \\ b=-1-\frac{\lambda}{2} \end{cases}$
Conclusion : $\boxed{\forall x \in I, \frac{3x+1-\lambda}{1-x^2} = \frac{2-\frac{\lambda}{2}}{1-x} + \frac{-1-\frac{\lambda}{2}}{1+x}}$

2. (E_λ) est une équation différentielle linéaire du premier ordre, homogène, à coefficients continus . Si l'on note $x \mapsto A(x)$ une primitive sur I de la fonction continue $a : x \mapsto \frac{3x+1-\lambda}{1-x^2}$, les solutions de (E_λ) sur I sont les fonctions $f_k : x \mapsto ke^{-A(x)}, k \in \mathbb{R}$.
or $\forall x \in I, a(x) = \frac{2-\frac{\lambda}{2}}{1-x} + \frac{-1-\frac{\lambda}{2}}{1+x} \Rightarrow A(x) = -\left(2-\frac{\lambda}{2}\right)\ln(1-x) - \left(1+\frac{\lambda}{2}\right)\ln(1+x)$
et $e^{-A(x)} = e^{\left(2-\frac{\lambda}{2}\right)\ln(1-x)+\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)\ln(1+x)} = (1-x)^{2-\frac{\lambda}{2}}(1+x)^{1+\frac{\lambda}{2}}$
Conclusion : $\boxed{S_{E_\lambda} = \left\{ \begin{array}{l} f_k : I \to \mathbb{R} \\ \qquad x \mapsto k(1-x)^{2-\frac{\lambda}{2}}(1+x)^{1+\frac{\lambda}{2}}, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}}$

3. Les solutions sont des fonctions polynômiales si et seulement si $2-\frac{\lambda}{2}$ et $1+\frac{\lambda}{2}$ sont des entiers naturels.
$2-\frac{\lambda}{2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, 2-\frac{\lambda}{2} = n \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \lambda = 4-2n \Leftrightarrow \lambda \in 4, 2, 0, -2, -4, \ldots$
et $1+\frac{\lambda}{2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \exists n' \in \mathbb{N}, 1+\frac{\lambda}{2} = n' \Leftrightarrow \exists n' \in \mathbb{N}, \lambda = 2n'-2 \Leftrightarrow \lambda \in -2, 0, 2, 4, \ldots$
Les seules valeurs de λ vérifiant ces deux conditions sont $\boxed{-2; 0; 2; 4}$

4. (a) Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$ alors il vient

$$\begin{aligned} RP' + SP &= (1 - X^2)(b + 2cX + 3dX^2) + (1 + 3X)(a + bX + cX^2 + dX^3) \\ &= (a + b) + (3a + b + 2c)X + (2b + c + 3d)X^2 + (c + d)X^3 \end{aligned}$$

alors $\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_3[X], RP' + SP \in \mathbb{R}_3[X]}$

(b) On vient de montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_3[X], RP' + SP \in \mathbb{R}_3[X]$. De plus :
$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \forall Q \in \mathbb{R}_3[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= R(\lambda P + Q)' + S(\lambda P + Q) \\ &= R(\lambda P' + Q') + S(\lambda P + Q) \text{ par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda(RP' + SP) + (RQ' + SQ) \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

Conclusion : f est linéaire et donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_3[X]}$

(c) D'après le calcul trouvé au 4.a il vient :
$f(1) = 1 + 3X$
$f(X) = 1 + X + 2X^2$
$f(X^2) = 2X + X^2 + X^3$
$f(X^3) = 3X^2 + X^3$

La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est donc $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

(d) $f(Q) = \lambda Q \Leftrightarrow (1 - X^2)Q' + (1 + 3x - \lambda)Q = 0$
Q est donc une solution non nulle et polynomiale de l'équation différentielle E_λ. On en déduit le résultat d'après la question 3.
Réciproquement, si $\lambda \in \{-2; 0; 2; 4\}$, alors tout élément Q de l'ensemble solution S_λ est un polynôme vérifiant $(1 - X^2)Q' + (1 + 3x - \lambda)Q = 0$, donc $f(Q) = \lambda Q$.

$\boxed{S_{-2} = \{k(1 - X)^3, k \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1 - X)^3)}$

$\boxed{S_0 = \{k(1 - X)^2(1 + X), k \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1 - X)^2(1 + X))}$

$\boxed{S_2 = \{k(1 - X)(1 + X)^2, k \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((X - 1)(1 + X)^2)}$

$\boxed{S_4 = \{k(1 + X)^3, k \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((X + 1)^3)}$

(e) Démontrons que les 4 polynômes $P_1 = (1 - X)^3$, $P_2 = (1 - X)^2(1 + X)$, $P_3 = (X - 1)(1 + X)^2$ et $P_4 = (X + 1)^3$ forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Comme la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$ est 4, il suffit de démontrer que la famille est libre.
Considérons une combinaison linéaire :

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = 0$$

En évaluant en $X = 1$, il vient $\lambda_4 \times 8 = 0 \Rightarrow \lambda_4 = 0$.
En évaluant en $X = -1$, il vient $\lambda_1 \times 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$.
Ré-écrivons la combinaison linéaire :

$$\lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2(1 - X)^2(1 + X) + \lambda_3(X - 1)(1 + X)^2 = 0$$

On peut alors prendre deux valeurs supplémentaires de X pour montrer que $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ou factoriser par $(1 - X)(1 + X)$ qui n'est le polynôme nul, on peut donc simplifier dans $\mathbb{R}_3[X]$ qui est un anneau intègre et il vient :

$$\lambda_2(1 - X) + \lambda_3(1 + X) = 0$$

En évaluant à nouveau en 1 et -1 on obtient le résultat annoncé.
A cause de la question (d), $f(P_1) = -2P_1$, $f(P_2) = 0$, $f(P_3) = 2P_3$ et $f(P_4) = 4P_4$, on a donc dans la base $\mathcal{C} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$, $\boxed{Mat_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$.