

DM 13 Cometh Suite 1

5) (b) $\forall x \in I, F_1(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$

$$F_1(x) = \text{Arctan}(x)$$

$$\text{et } F_2(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^x \frac{2t}{1+t^2} dt$$

$$F_2(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

(c) Récurrance

(I) $F_1(x) \neq F_2(x) = \frac{1}{2} x^2$

$$\text{donc } F_1(x) = \frac{1}{2} (x^2 - \ln(1+x^2))$$

(H) $F_{2n+2}(x) = \frac{1}{2n} x^{2n} - F_{2n}(x)$

et on remplace par l'RGp de récurrence.

(d) Récurrance

(e) les solutions de (E_n) sur I sont

$$y_n: I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{F_n(x) + \frac{\lambda}{x}}{x^n}$$

$$\text{donc } y_5: x \mapsto \frac{F_5(x) + \frac{\lambda}{x}}{x^5}$$

$$\text{avec } F_5(x) = (-1)^2 \text{Arctan}(x) + (-1)^1 \sum_{k=0}^1 (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$F_5(x) = \text{Arctan}(x) - x + \frac{x^3}{3}$$

6) (a) (E₁) a pour solution $y_1: \mathbb{R} \mapsto \text{Arctan}(x) + \frac{\lambda}{x}$

f est solution de (E₁) sur I avec

$$f(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \text{Arctan}(1) + \lambda = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \lambda = 0$$

$$\text{donc } f: x \mapsto \frac{\text{Arctan}(x)}{x}$$

(b) Soit $x > 0$:

sur $[0; x]$, Arctan dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\text{et } \text{Arctan}'(t) = \frac{1}{1+t^2} \text{ pour } t \in \mathbb{R}$$

donc pour $t \in [0; x]$

$$0 < t^2 < x^2$$

$$1 < 1+t^2 < 1+x^2$$

$$\frac{1}{1+x^2} < \text{Arctan}'(t) < 1$$

$$\text{Par l'ITAF,}$$

$$\frac{1}{1+x^2} (x-0) < \text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(0) < 1 \times (x-0)$$

donc

$$\frac{x}{1+x^2} < \text{Arctan}(x) < x$$

(c) $f \in \mathcal{D}(I)$ et $\forall x \in I,$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1+x^2} \times x - \text{Arctan}(x) \right) / x^2$$

$$f''(x) = \left(\frac{x}{1+x^2} - \text{Arctan}(x) \right) \times \frac{1}{x^2}$$

On a $\forall x \in I$, $\text{Arctan}(x) - \frac{x}{1+x^2} > 0$

Donc $f'(x) < 0$

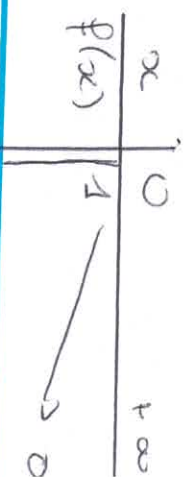
or f décroissante sur I

$\text{Arctan}(x) \sim x$

donc $f \sim 1$ or $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}^+; -\frac{\pi}{2} < \text{Arctan}(x) < \frac{\pi}{2}$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



Posons le prolongement par continuité de f en posant $f(0) = 1$

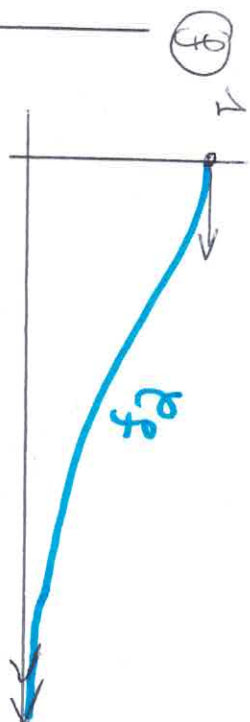
$$DL_2(0): \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$$

$$\text{Arctan}(x) = \text{Arctan}(0) + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$d'ou f(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$$

or f continue en 0

Donc f dérivable en 0 et $f'(0) = 0$



7) a) Soit $n \geq 1$ et $x \geq 0$

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2} dt$$

$$\forall t \in [0; x] \quad \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$$

Par Encadrement de l'intégrale avec $0 \leq x$

$$\frac{1}{1+x^2} \int_0^x t^{n-1} dt \leq F_n(x) \leq \int_0^x t^{n-1} dt$$

$$\frac{1}{1+x^2} \left[\frac{t^n}{n} \right]_0^x \leq F_n(x) \leq \left[\frac{t^n}{n} \right]_0^x$$

$$\frac{1}{1+x^2} \times \frac{x^n}{n} \leq F_n(x) \leq \frac{x^n}{n}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

Par encadrement

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F_n(x)}{x^n/n} = 1$$

c) les suites de (E_n) sur $I = \mathbb{R}^+$ sont

$$f_n: I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{F_n(x) + 1}{x^n}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{x^n} = \begin{cases} \pm \infty & \text{si } \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

avec $n > 1$

Donc f_n admet une limite finie en 0 si et seulement si $\lambda = 0$. Dans ce cas $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \frac{1}{n}$

On pose donc

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \frac{F_n(x)}{x^n} & \text{pour } x > 0 \\ \frac{1}{n} & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

(d) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{1+x^2} \times \frac{x^n}{n} \leq F_n(x) \leq \frac{x^n}{n}$$

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+x^2} - 1 \right) \leq \frac{n F_n(x) - x^n}{n x^{n+1}} \leq 0$$

$$\frac{1}{n} \left(-x + o(x) \right) \leq \frac{f_n(x) - \frac{1}{n}}{x} \leq 0$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x) - \frac{1}{n}}{x} = 0$ par encadrement

D'où f_n dérivable en 0 et $f_n'(0) = 0$

(e) f_n solution de (E_n) sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x f_n'(x) + n f_n(x) = \frac{1}{1+x^2}$

or

$$\frac{1}{1+x^2} \times \frac{x^n}{n} \leq F_n(x)$$

donc

$$(x f_n'(x) + n f_n(x)) \times \frac{x^n}{n} \leq F_n(x)$$

$$x f_n'(x) \leq \frac{F_n(x)}{x^n} \times n - n \underbrace{f_n(x)}_{= \frac{F_n(x)}{x^n}}$$

$$x f_n'(x) \leq 0$$

or $x > 0$

$$\frac{f_n'(x)}{f_n(x)} \leq 0 \quad \text{or} \quad \frac{f_n'(x)}{f_n(x)} = 0$$

Donc f_n décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

(f) Soit $n \geq 2$

$$I = \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} - x f_n'(x) dx$$

Par IPP:

$$I = \frac{1}{n} [\text{Arctan}(x)]_0^1 - \frac{1}{n} [x f_n(x)]_0^1 + \frac{1}{n} I$$

$$I \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} \text{Arctan}(1) - \frac{1}{n} f_n(1)$$

$$I = \frac{1}{n-1} \left(\frac{\pi}{4} - f_n(1) \right)$$