

Devoir Surveillé 01 - Eléments de Correction

Exercice 1

φ continue positive (sauf en un nombre fini de points), $\lim_{\infty} \varphi = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$(E_x) : \int_x^y \varphi(t) dt = 1 \quad \text{a pour solution } y = f(x).$$

Partie I

$\varphi(x) = e^x$ vérifie les conditions avec $\ell = +\infty$.

1. L'équation (E_x) devient $\int_x^y e^t dt = 1 \Leftrightarrow [e^t]_x^y = 1 \Leftrightarrow e^y - e^x = 1 \Leftrightarrow e^y = 1 + e^x$.

Comme $1 + e^x > 0$, (E_x) admet une solution unique y où

$$y = f(x) = \ln(1 + e^x)$$

2. f est définie, continue dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^x = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^x = 1 \text{ et } \lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

On obtient le tableau des variations ci-dessous

x	$-\infty$	$+\infty$
y'		+
y	0	$\nearrow +\infty$

3. Étudions rapidement la différence $f(x) - x$:

$$f(x) - x = \ln(1 + e^x) - x = \ln(1 + e^x) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right)$$

qui montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ et $f(x) - x > 0$.

La droite d'équation $y = x$ est asymptote, la courbe est au dessus

4. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est :

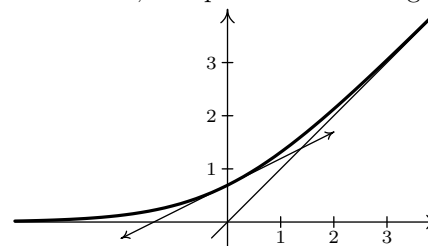
$$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0) = \frac{1}{2} \times (x - 0) + \ln(2)$$

$$f(x) - \frac{x}{2} - \ln(2) = \ln\left(\frac{1 + e^x}{2e^{\frac{x}{2}}}\right) = \ln\left(ch\left(\frac{x}{2}\right)\right) > 0$$

d'où la tangente à $\mathcal{C}$ en $x = 0$ et la position relative

tangente d'équation $y = \ln(2) + \frac{x}{2}$, $\mathcal{C}$ au dessus

5. Ci-dessous, la représentation où figurent les différents résultats obtenus



Partie II

$$\Phi_x(u) = \int_x^u \varphi(t) dt$$

6. Dans cette question, $\varphi(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$.

(a) Pour tous réels x et y , nous avons

$$\int_x^y \varphi(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_x^y \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{\pi} (\text{Arctan } y - \text{Arctan } x)$$

Comme $\text{Arctan } y < \frac{\pi}{2}$ et $\text{Arctan } x > -\frac{\pi}{2}$, nous avons $\int_x^y \varphi(t) dt < 1$

(b) Ainsi, $\int_x^y \varphi(t) dt = 1$ est impossible : l'équation (E_x) n'a pas de solution

(c) La limite en $+\infty$ de $\frac{1}{\pi(1+t^2)}$ est immédiate :

$$\ell = 0$$

Désormais : $\ell \neq 0$.

7. Il est immédiat que l'équation (E_x) s'écrit

$$(E_x) : \Phi_x(y) = 1$$

8. (a) φ étant continue, Φ_x est la primitive de φ qui s'annule en x . Elle est de classe $\mathcal{C}^1$.

Sa dérivée est φ qui est positive (ou nulle en un nombre fini de points) donc Φ_x est strictement croissante.

Φ_x est continue strictement croissante

Nous pouvons en déduire que l'équation (E_x) admet au plus une solution.

- (b) φ étant strictement positive, $\ell = \lim_{+\infty} \varphi$ vérifie soit $\ell = +\infty$, soit $\ell \in \mathbb{R}_+$.

• Cas $\ell = +\infty$ Considérons un réel $A > 0$. $\lim_{+\infty} \varphi = +\infty$ montre

$$\exists t_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, t \geq t_0 \Rightarrow \varphi(t) \geq A$$

• Cas $\ell \in \mathbb{R}_+$ donc $\ell > 0$ (puisque $\ell \neq 0$). Avec $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$, $\lim_{+\infty} \varphi = \ell$ montre

$$\exists t_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, t \geq t_0 \Rightarrow \ell - \frac{\ell}{2} \varphi(t) \leq \ell + \frac{\ell}{2} \Rightarrow \underbrace{A = \frac{\ell}{2}}_{A > 0} \leq \varphi(t)$$

Dans les deux cas :

$$\boxed{\exists A > 0, \exists t_0 \in \mathbb{R}, t \geq t_0 \Rightarrow \varphi(t) \geq A}$$

(c) Avec les notations précédentes, pour $u > t_0$ nous avons

$$\Phi_x(u) = \underbrace{\int_x^{t_0} \varphi(t) dt}_{=K \text{ constante}} + \int_{t_0}^u \varphi(t) dt \geq K + (u - t_0) A$$

Ceci prouve que $\lim_{+\infty} \Phi_x = +\infty$ donc

$$\boxed{\exists u \in \mathbb{R}, \Phi_x(u) > 1}$$

(d) Φ_x est continue sur $[x, u]$ vérifie $\underbrace{\Phi_x(x)}_{=0} < 1 < \Phi_x(u)$. Le théorème des valeurs intermédiaires prouve l'existence d'un réel t vérifiant $\Phi_x(t) = 1$. L'équation (E_x) admet une solution, unique d'après **8-a-**.

(E_x) admet une solution unique

Partie III

9. Rappelons que φ est continue, donc $\Phi_0 : y \mapsto \int_0^y \varphi$ est une primitive de φ .

$f(x)$ est la solution de (E_x) se traduit par $f(x) > 0$ et

$$\int_x^{f(x)} \varphi(t) dt = 1 \Leftrightarrow [\Phi_0]_x^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow \Phi_0(f(x)) = \Phi_0(x) + 1$$

Continue strictement croissante, Φ_0 induit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\underbrace{] \lim_{-\infty} \varphi, \lim_{+\infty} \Phi_0[}_{=] \alpha, +\infty[}$.

En notant Φ_0^{-1} l'application réciproque, l'égalité précédente est équivalente à

$$\boxed{f(x) = \Phi_0^{-1}(\Phi_0(x) + 1)}$$

Note : on pouvait aussi composer l'égalité par Φ_0^{-1}

en s'assurant que $\Phi_0(x) \in]\alpha, +\infty[\Rightarrow \Phi_0(x) + 1 \in]\alpha, +\infty[$.

10. La fonction Φ_0 étant continue strictement croissante, il en est de même pour $x \mapsto \Phi_0(x) + 1$ et sa réciproque $(\Phi_0)^{-1}$.

Composée de deux telles fonctions

f est continue strictement croissante

11. (a) La bijection continue Φ_0 est dérivable, et sa dérivée φ ne s'annule pas (hypothèse de cette question **-a-**). L'application réciproque est donc dérivable et vérifie $(\Phi_0^{-1})' = \frac{1}{\varphi \circ \Phi_0^{-1}}$. Ainsi, composée de fonctions dérivables, f est dérivable avec

$$f'(x) = (\Phi_0^{-1})'(\Phi_0(x) + 1) \cdot \Phi_0'(x) = \frac{\Phi_0'(x)}{\varphi(\Phi_0^{-1}(\Phi_0(x) + 1))} : \quad \boxed{f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}}$$

(b) Dans cette question, $\varphi(x_0) \neq 0$ strictement positive sur $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ sauf en $f(x_0)$ où $\varphi(f(x_0)) = 0$.

► Le raisonnement du **-a-** s'applique en tout point x tel que $\varphi(f(x)) \neq 0$, donc f est dérivable sur $V - \{x_0\}$, avec $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}$.

► f et φ sont continues sur $\mathbb{R}$, donc

$$\lim_{x_0} \varphi = \varphi(x_0) \neq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x_0} \varphi \circ f = \varphi \circ f(x_0) = 0$$

ce qui montre que $\lim_{x_0} f' = \pm\infty$

► En résumé :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continue sur } V \\ f \text{ dérivable sur } V - \{x_0\} \\ f' \text{ a une limite infinie en } x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} f \text{ non dérivable en } x_0 \\ \text{tangente verticale en } x_0 \text{ pour } \mathcal{C} \end{array} \right.}$$

12. Dans cette question $\ell = +\infty$ et ε est un réel strictement positif.

(a) Puisque $\lim_{+\infty} \varphi = +\infty$, nous avons

$$\boxed{\exists a \in \mathbb{R}, \forall t, t \geq a \Rightarrow \varphi(t) \geq \frac{1}{\varepsilon}}$$

(b) Pour $x \geq a$ nous avons :

► $\varphi \geq 0$ et $\int_x^{f(x)} \varphi = 1 > 0$ entraînent $x < f(x)$

► Sur $[x, f(x)] \subset [a, +\infty[$, $\varphi(t) \geq \frac{1}{\varepsilon}$ donc

$$1 = \int_x^{f(x)} \varphi(t) dt \geq \int_x^{f(x)} \frac{1}{\varepsilon} dt = \frac{f(x) - x}{\varepsilon} \Rightarrow f(x) - x \leq \varepsilon \quad \text{Comme}$$

$f(x) - x \geq 0$, nous avons finalement

$$\boxed{x \geq a \Rightarrow |f(x) - x| \leq \varepsilon}$$

Ceci prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$

donc que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$

13. Dans cette question $\ell \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $\varepsilon > 0$:

► Comme $\lim_{+\infty} \varphi = \ell$, nous avons $\exists a \in \mathbb{R}, \forall t, a \leq t \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq \varphi(t) \leq \ell + \varepsilon$

► Pour la même raison qu'au **12-b-** : $x < f(x)$

► Ainsi, pour $x \geq a$: $\int_x^{f(x)} (\ell - \varepsilon) dt \leq \int_x^{f(x)} \varphi(t) dt \leq \int_x^{f(x)} (\ell + \varepsilon) dt$
 soit $(\ell - \varepsilon)(f(x) - x) \leq 1 \leq (\ell + \varepsilon)(f(x) - x)$ d'où (puisque $f(x) - x > 0$)
 $\ell - \varepsilon \leq \frac{1}{f(x) - x} \leq \ell + \varepsilon$ c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x) - x} = \ell$

Finalement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \frac{1}{\ell}$ La droite d'équation $y = x + \frac{1}{\ell}$ est asymptote

14. Dans cette question φ est paire, Γ est le graphe de f .

(a) Le changement de variable $u = -t$ (de classe $\mathcal{C}^1$) montre que

$$\int_x^y \varphi(t) dt = \int_{-x}^{-y} \underbrace{\varphi(-t)}_{=\varphi(t)} (-dt) = \int_{-y}^{-x} \varphi(t) dt$$

Ainsi : $\int_x^y \varphi(t) dt = 1 \Leftrightarrow \int_{-y}^{-x} \varphi(t) dt = 1$ donc $(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow (-y, -x) \in \Gamma$

(b) Ainsi

Γ admet la droite d'équation $y = -x$ pour axe de symétrie

Partie IV

Dans cette partie $\varphi(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$

15. Il est clair que la fonction φ est continue (polynôme), strictement positive sauf en deux points ($x = \pm 1$), paire, et que $\lim_{+\infty} \varphi = +\infty$.

16. Nous savons donc que :

- f est strictement croissante,
- Γ admet la droite d'équation $y = x$ pour asymptote,
- et la droite d'équation $y = -x$ comme axe de symétrie.

D'autre part, on a une tangente horizontale en x_0 si $\varphi(x_0) = 0$ et $\varphi'(x_0) \neq 0$,

► donc ici pour $x = -1$, puisque

$$\star \varphi(1) = 0$$

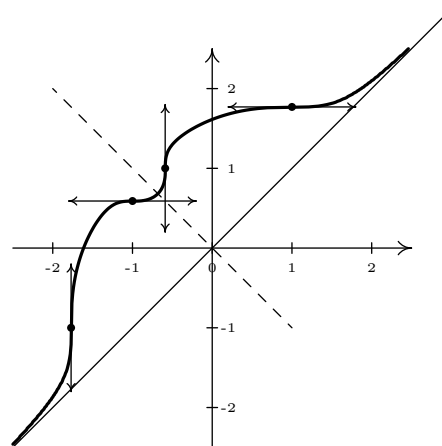
$$\star \varphi'(1) \neq 0 \text{ puisque } f(1) \neq -1 \quad (\text{on vérifie facilement que})$$

$$\int_1^{-1} \varphi \neq \pm 1)$$

$$f(1) \neq 1 \quad (\text{puisque } \int_1^1 \varphi = 0 \neq 1)$$

► Même raisonnement en $x = -1$ On obtient les tangentes verticales par symétrie.

D'où la représentation donnée ci-contre



Exercice 2

On considère l'équation différentielle définie sur $]0; +\infty[$ par : (E) $xy' - y = \frac{x^2}{1 - \operatorname{ch} x}$

$$1. (a) \forall x \in \mathbb{R}, 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 = 2 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - 1 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{2} - 1 = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \operatorname{ch}(2x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2 \operatorname{sh}^2 x + 1 = 2 \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 + 1 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{2} + 1 = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \operatorname{ch}(2x)$$

On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(2x) = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 \Rightarrow \operatorname{ch}^2 x = \frac{1 + \operatorname{ch}(2x)}{2}$ et
 $\operatorname{ch}(2x) = 2 \operatorname{sh}^2 x + 1 \Rightarrow \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) - 1}{2}$

Conclusion : pour tout réel x on a :

$$\operatorname{ch}(2x) = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 x + 1 \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1 + \operatorname{ch}(2x)}{2} \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) - 1}{2}$$

$$(b) \forall x > 0, \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{sh} \frac{x}{2}}{\operatorname{ch} \frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}}{\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}} \text{ car } x > 0 \Rightarrow \operatorname{sh} \frac{x}{2} > 0$$

$$\text{alors } \forall x > 0, \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}} = \sqrt{\frac{(\operatorname{ch} x - 1)^2}{\operatorname{ch}^2 x - 1}} = \frac{|\operatorname{ch} x - 1|}{|\operatorname{sh} x|} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} \text{ car } \operatorname{sh} x > 0 \text{ et } \operatorname{ch} x > 1$$

$$\text{Conclusion : } \forall x > 0, \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x}$$

2. (a) Soit x un réel strictement positif. La fonction : $u \mapsto \tanh \frac{u}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, x]$ et réalise une bijection de $[1, x]$ sur $[\tanh \frac{1}{2}; \tanh \frac{x}{2}]$

$$t = \tanh \frac{u}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} (1 - \tanh^2 \frac{u}{2}) du \Rightarrow du = \frac{2dt}{1-t^2} \text{ par ailleurs } \operatorname{ch} u - 1 =$$

$$2 \operatorname{ch}^2 \frac{u}{2} - 2 = 2 \left(\frac{1}{1 - \tanh^2 \frac{u}{2}} - 1 \right) = \frac{2t^3}{1-t^2}$$

$$\text{Ainsi } \int_1^x \frac{1}{\operatorname{ch} u - 1} du = \int_{\tanh \frac{1}{2}}^{\tanh \frac{x}{2}} \frac{1}{\frac{2t^2}{1-t^2}} \frac{2dt}{1-t^2} = \left[-\frac{1}{t} \right]_{\tanh \frac{1}{2}}^{\tanh \frac{x}{2}} = \frac{1}{\tanh \frac{1}{2}} - \frac{1}{\tanh \frac{x}{2}}$$

$$\text{Conclusion : } \forall x > 0, \int_1^x \frac{1}{\operatorname{ch} u - 1} du = \frac{1}{\tanh \frac{1}{2}} - \frac{1}{\tanh \frac{x}{2}}$$

- (b) g est continue sur $]0; +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $]0; +\infty[$. D'après la question précédente, une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction

$$g : x \mapsto \frac{-1}{\operatorname{ch} x - 1} \text{ est la fonction } G \text{ définie par :}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, G(x) = \frac{1}{\tanh \frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$$

3. • Equation homogène : $xy' - y = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x}y = 0$: on pose $a(x) = -\frac{1}{x}$. a est une fonction continue sur $]0; +\infty[$. Une primitive de a sur $]0; +\infty[$ est la fonction A définie par $A(x) = -\ln |x| = -\ln x$ car $x > 0$

$$\forall x > 0, e^{-A(x)} = e^{\ln x} = x$$

$$\text{Donc } \mathcal{S}_{EH} = \{f_k : x \mapsto kx, k \in \mathbb{R}\}$$

- Recherche d'un solution particulière avec la méthode de la variation de la constante :

on pose $y_P(x) = k(x)x$ où k est une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$.

Alors $y'_P(x) = k'(x)x + k(x)$. On reporte dans (E) :

$$x(k'(x)x + k(x) - k(x)) = \frac{x^2}{1 - \operatorname{ch} x} \Leftrightarrow k'(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{ch} x} = g(x) \Rightarrow k(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$$

d'après la question précédente.

Alors une solution particulière est : $y_P(x) = \frac{x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$

- Conclusion : $\mathcal{S}_E \{f_k : x \mapsto kx + \frac{x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}, k \in \mathbb{R}\}$

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$

(a) $\operatorname{sh} x \underset{0}{\sim} x$ et $\operatorname{ch} x - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ alors $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$:

f est prolongeable par continuité en 0.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = \frac{-x \operatorname{sh}(-x)}{\operatorname{ch}(-x) - 1} = \frac{x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} = f(x)$ donc f est paire.

(c) $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x e^x}{e^x} = x$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Remarque : $\frac{f(x)}{x} \underset{+\infty}{\sim} 1$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

et $f(x) - x = \frac{x \operatorname{sh} x - x \operatorname{ch} x + x}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{x(1 - e^{-x})}{\operatorname{ch} x - 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{e^x}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$

ainsi la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$

- (d) f est dérivable sur chacun des intervalles $]0; +\infty[$ et $] -\infty; 0[$ en tant que quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur ne s'annulant pas sur chacun des intervalles $]0; +\infty[$ et $] -\infty; 0[$.

$$\begin{aligned} \text{pour tout } x \neq 0, f'(x) &= \frac{(\operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x)(\operatorname{ch} x - 1) - x \operatorname{sh}^2 x}{(\operatorname{ch} x - 1)^2} = \\ &= \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + x \operatorname{ch}^2 x - x \operatorname{ch} x - x \operatorname{sh}^2 x}{(\operatorname{ch} x - 1)^2} = \frac{\operatorname{sh} x(\operatorname{ch} x - 1) + x(\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x) - x \operatorname{ch} x}{(\operatorname{ch} x - 1)^2} \\ &= \frac{\operatorname{sh} x(\operatorname{ch} x - 1) + x(1 - \operatorname{ch} x)}{(\operatorname{ch} x - 1)^2} = \frac{(\operatorname{ch} x - 1)(\operatorname{sh} x - x)}{(\operatorname{ch} x - 1)^2} = \frac{\operatorname{sh} x - x}{\operatorname{ch} x - 1} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \text{pour tout } x \neq 0, f'(x) = \frac{\operatorname{sh} x - x}{\operatorname{ch} x - 1}$$

- (e) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \operatorname{sh} x - x$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \operatorname{ch} x - 1 > 0$ donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $h(0) = 0$ donc on en déduit le signe de $h(x)$:

$$\forall x > 0, h(x) > 0 \text{ et } \forall x < 0, h(x) < 0$$

Par ailleurs $\forall x \in \mathbb{R}^*, \operatorname{ch} x - 1 > 0$ donc f' est du signe de h .

Ainsi f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\parallel$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow \quad 2 \quad \nearrow$	$+\infty$