Chapitre 30

Familles Sommables

30.1 Série semi-convergentes

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle ou complexe.
Dire que la série $\sum_{k\geq 0} u_k$ est **semi-convergente** signifie que la série converge mais ne converge pas absolument.

Test 744

On considère la série $\sum_{k>0} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Utiliser le théorème des séries alternées.
2. En déduire que la série est semi-convergente.

Problématique

En échangeant les termes de la série du test précédent, on peut trouver des limites différentes.
La série harmonique alternée, de terme général $\frac{(-1)^k}{k}$ pour k entier strictement positif, converge vers $-\ln(2)$, tandis que celle obtenue en réordonnant les termes de la suite de façon à sommer deux fois plus vite les termes pairs que les impairs converge vers $-\ln(2)/2$.
On souhaite introduire une définition de la convergence qui exclut ce genre de situation, et qui assure que la sommation donne le même résultat quel que soit l'ordre choisi.

Il est important de retenir que changer l'ordre des termes dans une série peut modifier la somme (et même la nature) d'une série.
Le théorème de réarrangement de Riemann dit que si une série à termes réels est semi-convergente, alors on peut réarranger ses termes pour qu'elle converge vers n'importe quel réel, ou bien tende vers plus ou moins l'infini.

Test 745

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^1 (-t)^n dt$.
2. En déduire que
$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}dt$$
3. En majorant la seconde intégrale en valeur absolue, en déduire que la série harmonique alternée tend vers $\ln(2)$

Test 746

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\dfrac{1}{4n-2} - \dfrac{1}{2n-1}$.
2. On pose $v_n = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2n-1}$ et $u_n = \dfrac{1}{4n-2} - \dfrac{1}{2n-1} + \dfrac{1}{4n}$. En déduire une relation simple entre v_n et u_n.
3. D'après le test précédent, on sait que la série de terme général v_n converge vers $-\ln(2)$. En déduire la convergence et la somme de la série de terme général u_n.
4. Observez que les deux séries de termes généraux u_n et v_n comportent les même termes mais dans un ordre différent.

30.2 Ensembles dénombrables

Soit E un ensemble.
E est **dénombrable** si et seulement si il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E.

Remarques

— Les éléments d'un ensemble dénombrable peuvent être comptés les uns après les autres : le premier, le deuxième, le troisième ... Dit autrement, un ensemble dénombrable E peut être décrit comme l'ensemble des valeurs d'une suite bijective :

$$E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ avec } \forall x \in \ E \exists ! n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x = x_n$$

— S'il existe une bijection de E sur $\mathbb{N}$ alors sa bijection réciproque induit que E est dénombrable.

Test 747

Montrer que les entiers naturels pairs et l'ensemble des entiers naturels impairs sont deux ensemble dénombrables

Test 748

Montrer que

$$\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ k \mapsto \begin{cases} 2k & \text{si } k \geq 0 \\ 2(-k)-1 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

est bijective et en déduire que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Test 749

Montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. On pourra se souvenir qu'en arithmétique, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists!(m,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^m(2p+1)$

Th. ▷ **Partie non bornée de $\mathbb{N}$**

Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
Une partie de $\mathbb{N}$ est non bornée si et seulement si elle est dénombrable.

Th. ▷ **Propriétés des ensembles dénombrables**

— Toute partie infinie en injection dans $\mathbb{N}$ est dénombrable.
— Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable.
— La réunion de deux ensembles dénombrables est dénombrable.
— Si A et C dénombrables et $A \subset B \subset C$ alors B dénombrable.

Test 750

Montrer que $\mathbb{Q}$ est en bijection avec un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^2$ et en déduire que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Le cas de $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable : on le démontre avec le principe de la diagonale de Cantor

Le cas de $\mathbb{N}$

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable

CC BY NC SA

30.3 Familles sommables à termes positifs

Soient
— I un ensemble dénombrable ;
— $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels positifs ou nuls, indexée par I.
Dire que la **famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable** signifie que

$$\sup\left\{\sum_{i\in J} u_i \text{ tel que } J \text{ partie finie de } I\right\} < +\infty$$

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est non sommable dans le cas contraire.

Permutation

La définition implique l'invariance de la sommabilité par permutation des termes : ceci est induit par le fait qu'on considère un ensemble d'indices et non une liste d'indices.

Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, la **somme** est donnée par cette borne supérieure :

$$S(u) = \sum_{i\in I} u_i = \sup\left\{\sum_{i\in J} u_i \text{ tel que } J \text{ partie finie de } I\right\}$$

Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, on pose $\sum_{i\in I} u_i = +\infty$.

Th. ▷ **Lien avec les séries pour $I = \mathbb{N}$**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Elle est sommable si et seulement si la série de terme général u_n converge et dans ce cas les sommes coïncident :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Une **suite exhaustive** de parties d'un ensemble dénombrable I est une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de I telle que
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble I_n est fini ;
— la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subset I_{n+1}$;
— $\cup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$

Test 751 Construire une suite exhaustive de parties de $\mathbb{N}$

Test 752 Construire une suite exhaustive de parties de $\mathbb{N}^2$

Test 753 Soit I un ensemble dénombrable quelconque. Démontrer qu'il existe une suite exhaustive de parties de I

Th. ▷ **Etude de la sommabilité et calcul pratique de la somme dans $\mathbb{R}^+$**

Soient
- I un ensemble dénombrable ;
- $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de parties de I ;
- $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs ou nuls indexée par I.

Si la suite des $\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} u_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_n} u_i$$

 Alain Couteèle et Mélissa Bailloeuil

Test 754 Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{2^n 3^m}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

Proposition (Linéarité)
Soit I un ensemble dénombrable d'indices.
Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs indexées par I.

Si les familles $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont sommables, alors pour tous réels positifs λ et μ, la famille $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i$$

Th. ▷ **Théorème de sommation par paquets pour une famille sommable**

Soit I un ensemble dénombrable d'indices.
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels positifs indexée par I.
Soient J une partie non vide de $\mathbb{N}$ puis $(I_n)_{n\in J}$ une partition de I indexée par J.
Alors,

- pour chaque $n \in J$, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable ;
- la famille $\left(\displaystyle\sum_{i\in I_n} u_i\right)_{n\in J}$ est sommable

$$\sum_{n\in J}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i$$

Test 755 Que pourrait être une partition verticale, horizontale, diagonale de $\mathbb{N}^2$. On pourra s'inspirer d'un schéma

Test 756 Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{n^2+m^2}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable

Test 757 Soit q un réel strictement positif. La famille $\left(\dfrac{1}{q^n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est-elle sommable ?

Th. ▷ **Théorème de Fubini positif pour $I = \mathbb{N}^2$**

Soit $(u_{m,n})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une suite "à double entrée" de réels positifs.
La famille $(u_{m,n})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{N}} u_{m,n}$ converge et la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)$ converge.
De plus, en cas de sommabilité, on a égalité des sommes.

Test 758 Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{2^n 3^m}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable

30.4 Familles sommables à termes réels

Proposition (Changement de l'ordre dans une série à termes positifs)
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et σ une permutation de $\mathbb{N}$.
Alors $\sum u_{\sigma(n)}$ est de même nature que $\sum u_n$ et en cas de convergence les sommes sont égales.

Observons maintenant le changement d'ordre dans une série absolument convergente.

Th. ▷ **Théorème de commutativité**

Soit Σu_n une série réelle absolument convergente, et σ une permutation de $\mathbb{N}$. Alors $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Commutativité

- Ce résultat entre en défaut dès lors que l'hypothèse de convergence absolue n'est plus vérifiée, nous l'avons vu dans le premier paragraphe.
- Ce théorème de commutativité permet de définir des sommes prises sur un ensemble dénombrable quelconque, sans s'être fixé d'ordre de sommation préalable autrement dit travailler sur un ensemble d'indices et non une liste d'indices.

Définition

Soient
— I un ensemble dénombrable ;
— $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels, indexée par I.
Dire que la **famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable** signifie que la famille $\left(\left|u_i\right|\right)_{i\in I}$ est sommable.

Le théorème de commutativité nous assure alors que :

Th. ▷ **Somme d'une famille sommable**

Soit I un ensemble dénombrable, et $\sigma : \mathbb{N} \to I$ une bijection.
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels sommable. On définit la somme de cette famille par :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$$

Cette égalité définit bien un réel, indépendant du choix de la bijection σ.

Remarque : On a la majoration $\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leq \sum_{i\in I} \left|u_i\right|$

Espérance

Lorsqu'on défini une variable aléatoire sur un espace probabilisé à valeurs dans un ensemble dénombrable (et non fini), le calcul de l'espérance nécessite de calculer une somme indicée sur un ensemble et non une liste. On imposera donc la convergence absolue dans la définition de l'espérance d'une telle variable aléatoire.

 Alain Couteèle et Mélissa Bailloeuil

Th. ▷ **Théorème de comparaison**

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles telles que $\forall i \in I$, $\left|u_i\right| \leq \left|v_i\right|$. Alors, si (v_i) est sommable, il en est de même de (u_i).

30.5 Familles sommables à termes complexes

Soient
— I un ensemble dénombrable ;
— $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes, indexée par I.

Dire que la **famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable** signifie que les familles des parties réelles et imaginaires sont des familles réelles sommables.

Th. ▷ **Sommabilité complexe**

Une famille de complexes $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la famille $\left(\left|u_i\right|\right)_{i\in I}$ est sommable.

Soient
— I un ensemble dénombrable ;
— $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes, indexée par I.

La **somme** de la famille $(u_i)_{i\in I}$ est le complexe

$$S(u) = \sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} \mathrm{Re}\,(u_k) + i \sum_{k\in I} \mathrm{Im}\,(u_k)$$

Dans le cas particulier des suites complexes, on a immédiatement un lien entre famille sommable et série :

Th. ▷ **Lien avec les séries**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de **complexes**. Elle est sommable si et seulement si la série de terme général u_n est **absolument convergente** et dans ce cas les sommes coïncident :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Test 759 Déterminer l'ensemble des nombres complexes s tel que que la famille $\left(\dfrac{1}{n^s}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable

Proposition
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels ou complexes. Alors, pour tout $I' \subset I$ infini, la famille $(u_i)_{i\in I'}$ est aussi sommable.

Test 760 La famille $\left(\dfrac{1}{n^2+m^2}\right)_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}$ est-elle sommable ?

Th. ▷ **Calcul pratique de la somme dans $\mathbb{C}$**

Soient
- I un ensemble dénombrable ;
- $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de parties de I ;
- $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de complexes indexée par I.

alors

$$\sum_{i\in I} u_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_n} u_i$$

Proposition (Espace ℓ^1)
Soit I un ensemble dénombrable. On pose :

$$\ell^1(I,\mathbb{C}) = \left\{(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I \text{ tel que la famille } (u_i)_{i\in I} \text{ est sommable}\right\}$$

Alors $\ell^1(I,\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^I$.

Proposition (Linéarité de la somme pour une famille sommables de complexes)
Soit I un ensemble dénombrable. L'application :

$$\phi : \begin{array}{ccc} \ell^1(I,\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ (u_i)_{i\in I} & \mapsto & \displaystyle\sum_{i\in I} u_i \end{array}$$

est une forme linéaire.

Test 761

Soit I un ensemble dénombrable. On pose

$$\ell^2(I,\mathbb{R}) = \left\{(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I \text{ tel que la famille } (u_i^2)_{i\in I} \text{ est sommable}\right\}$$

1. Soient $(u_i)_{i\in I} \in \ell^2(I,\mathbb{R})$ et $(v_i)_{i\in I} \in \ell^2(I,\mathbb{R})$. Démontrer que $(u_iv_i)_{i\in I}$ appartient à $\ell^1(I,\mathbb{R})$.
2. Démontrer que $\ell^2(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$.

Test 762

Soit

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \ell^2(I,\mathbb{R}) \times \ell^2(I,\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (u_i)_{i\in I}, (v_i)_{i\in I} & \mapsto & \displaystyle\sum_{i\in I} u_iv_i \end{array}$$

Démontrer que ϕ est un produit scalaire sur $\ell^2(I,\mathbb{R})$.

Dans un contexte plus général que celui dans lequel on s'est placé, il convient de définir la sommabilité autrement : une famille sera sommable de somme S si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un sous-ensemble fini tel que la somme prise sur tout sous-ensemble plus gros est une ϵ-approximation de S.

Th. ▷ ϵ-approximation

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels ou complexes. Alors, la famille $(\left|u_i\right|)_{i\in I}$ est aussi sommable.
En particulier, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $J \subset I$ fini tel que

$$\left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{j\in J} u_j\right| \leq \epsilon$$

Th. ▷ Théorème de sommation par paquets pour une famille sommable

Soit I un ensemble dénombrable d'indices.
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de complexes indexée par I.
Soient J une partie non vide de $\mathbb{N}$ puis $(I_n)_{n\in J}$ une partition de I indexée par J. Alors,

- pour chaque $n \in J$, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable ;
- la famille $\left(\displaystyle\sum_{i\in I_n} u_i\right)_{n\in J}$ est sommable

$$\sum_{n\in J}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i$$

 CC BY NC SA

Th. ▷ **Théorème de Fubini pour $I = \mathbb{N}^2$**

Soit $(u_{m,n})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une suite "à double entrée" de complexes.
La famille $(u_{m,n})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}} \left|u_{m,n}\right|$ converge et la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} \left|u_{m,n}\right|\right)$ converge.
De plus, en cas de sommabilité, on a égalité des sommes :

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_{n,m} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)$$

30.6 Produit de Cauchy de deux séries

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries de complexes. La série $\sum w_n$ de terme général défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

est appelé **produit de Cauchy** des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Th. ▷ **Produit de séries absolument convergentes**

Le produit des sommes de deux séries absolument convergentes est la somme de leur produit de Cauchy.
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries de complexes absolument convergentes. Alors :

1. leur produit de Cauchy $\sum w_n$ est une série absolument convergente,
2. $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n$

Test 763

Relation fonctionnelle de l'exponentielle.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente. La somme de cette série est, par définition, e^z.
2. Démontrer que pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: $e^{z_1} \times e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

Test 764

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente de complexes. Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{2^n}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k u_k\right)$ converge et a pour somme $2\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$.

Test 765

De l'hypothèse d'absolue convergence dans le théorème sur le produit de Cauchy.
Justifier que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge et étudier la convergence son produit de Cauchy avec elle-même.

30.7 Méthodologie

Démontrer qu'un ensemble est dénombrable :

- réunion finie d'ensembles dénombrables
- réunion dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables
- construire une application bijective vers un ensemble dénombrable
- construire une application bijective d'un ensemble dénombrable vers cet ensemble.

Démontrer qu'un ensemble n'est pas dénombrable :

- construire une application injective d'un ensemble non dénombrable ($\mathbb{R}$) vers cet ensemble
- raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe une application bijective de $\mathbb{N}$ vers cet ensemble.

Démontrer qu'une famille est sommable :

- démontrer que la série associée est absolument convergente si $I = \mathbb{N}$.
- utiliser une famille exhaustive, par exemple $(\llbracket -n; n \rrbracket)_{nin\mathbb{N}}$ pour une sommation sur $\mathbb{Z}$
- par le théorème de Fubini pour une série à doubles indices
- par linéarité, par comparaison

Démontrer qu'une famille n'est pas sommable :

- Démontrer qu'il existe une infinité de termes dans la famille dont la valeur absolue est supérieure à une constante strictement positive
- Démontrer que la série associée n'est pas absolument convergente si $I = \mathbb{N}$.
- Trouver une sommation par paquets qui diverge.
- Extraire une sous-famille non sommable
- Extraire une série divergente.

Permuter des sommes

- si la famille est sommable

 Alain Couteèle et Mélissa Bailloeuil

30.8 Exercices

Exercice 1

Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

1. $\{2n;\ n \geq 0\}$
2. $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$
3. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Q}\right\}$
4. l'ensemble des nombres premiers ;
5. l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Démontrer que pour $|q| < 1$, la famille $(q^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, et déterminer sa somme.

Exercice 3

Soit $(a_p)_{p\geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_p a_p$ soit absolument convergente. On pose $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et pour $(n, p) \in I$, on pose

$$u_{n,p} = \frac{p}{n(n+1)} a_p \text{ si } p \leq n,\ u_{n,p} = 0 \text{ sinon}$$

Démontrer que la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in I}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 4

Démontrer l'existence et calculer

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$$

Exercice 5

Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

Exercice 6

Démontrer que les familles suivantes ne sont pas sommables :

1. $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap[1;+\infty[}$
2. $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$, $a_{n,p} = \frac{1}{n^2 - p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,n} = 0$

Exercice 7

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\left|a\right| < 1$ et $\left|b\right| < 1$. Prouver que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(1-a)(1-b)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} & \text{si } a \neq b \\ \dfrac{1}{(1-a)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n & \text{si } a = b \end{cases}$$

Exercice 8

Pour $n \geq 0$, on pose $w_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!}$

1. Montrer que la série de terme général w_n converge.
2. Calculer sa somme en utilisant le produit d'une série géométrique et d'une série exponentielle.

Exercice 9

Soit (X, Y) un couple de VAR discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi conjointe :

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{2^{i+1} j!}$$

1. Déterminer toutes les valeurs possibles de a.
2. Déterminer les lois marginales.
3. X et Y sont-elle indépendantes ?

 Alain Couteèle et Mélissa Bailloeuil