Chapitre 29

Espaces affines

29.1 Définitions

29.1.1 Définition d'espace affine

$\mathcal{E}$ est un **espace affine de direction E** si et seulement

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et

il existe une application $\varphi \begin{cases} \mathcal{E} \times E & \to & \mathcal{E} \\ (M, \overrightarrow{u}) & \mapsto & \varphi(M, \overrightarrow{u}) \end{cases}$ qui vérifie

(1) $\forall\, M \in \mathcal{E}, \quad \forall\, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E, \quad \varphi\big(\varphi(M, \overrightarrow{u}), \overrightarrow{v}\big) = \varphi(M, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$
(2) $\forall\, M \in \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{u} \mapsto \varphi(M, \overrightarrow{u})$ est une bijection de E vers $\mathcal{E}$.

Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés des **points** .
Si E est normé, alors $\mathcal{E}$ est muni de la **distance associée** .

Elle est définie par $d(M, N) = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$

La **dimension** de l'espace affine est la dimension de sa direction.

Notations

qui permettent de ne plus utiliser φ

(1) permet de noter φ additivement : $\varphi(M, \overrightarrow{u}) = M + \overrightarrow{u}$
puisque $\boxed{(M + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = M + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})}$

pseudo ***associativité***

(2) montre : $\forall\, M, N \in \mathcal{E}, \quad \exists!\ \overrightarrow{u} \in E \quad M + \overrightarrow{u} = N$
On note $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MN}$

Ainsi : $\boxed{M + \overrightarrow{MN} = N}$

Premières propriétés :

- (1) devient la "***relation de Chasles***" $\boxed{\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}}$ (voir [1])
- (2) montre que $\boxed{\begin{array}{c} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow M = N \\ \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM} \end{array}}$

Test 730 L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle
$(\Delta) : y' + y = x$ est un espace affine. Déterminez-le.
(ceci est vrai pour toutes équations différentielles linéaire.)

1. Ou encore, avec la deuxième notation : $N - M + P - N = P - M$

29.1.2 Translations

Soit $\overrightarrow{a}$ un vecteur donné du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

La **translation de vecteur $\overrightarrow{a}$** est l'application $t_{\overrightarrow{u}}$: $\begin{cases} \mathcal{E} & \to & \mathcal{E} \\ M & \mapsto & \overrightarrow{M} + \overrightarrow{u} \end{cases}$

Propriétés :

- $t_{\overrightarrow{u}}$ est une bijection de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}$
- $(t_{\overrightarrow{u}})^{-1} = t_{-\overrightarrow{u}}$
- $\forall\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E, \quad t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{u}}$
- $t_{\overrightarrow{0}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$
- Ainsi, muni de la loi $\circ$: $\boxed{\mathcal{T} = \left\{ t_{\overrightarrow{u}} \mid \overrightarrow{u} \in E \right\} \text{ est un groupe abélien}}$

- De plus : $\forall\ M, N \in \mathcal{E}, \quad \exists!\ \overrightarrow{u} \in E,\ M = t_{\overrightarrow{u}}(N)$

29.1.3 Repère affine cartésien

En particulier, si $O \in \mathcal{A}$, espace affine de direction A, et si $\mathcal{B}$ est une base de A, alors tout point $M \in \mathcal{A}$ est caractérisé par les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ relativement à $\mathcal{B}$.

On dit que $\left(O\,,\ \mathcal{B}\right)$ est un **repère affine cartésien de $\mathcal{A}$** .

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E.

Un **repère[2] affine cartésien** de $\mathcal{E}$ est un couple $\mathcal{R} = \big(O, \mathcal{B}\big)$

où O est un point quelconque de $\mathcal{E}$ appelé **origine** du repère
$\mathcal{B}$ est une base de E

Les **coordonnées** d'un point $M \in \mathcal{E}$
sont les coordonnées relativement à $\mathcal{B}$ du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Test 731

$ABCD$ est un parallélogramme non aplati de $\mathcal{E}$ $\big(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est libre$\big)$.
Quelles sont les coordonnées de C :
(1) dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$?
(2) dans le repère $(B, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$ (justifier que c'est un repère)

Un changement de repère consiste à

- ∘ changer l'origine
- ∘ changer la base
- ∘ changer l'origine et la base

Test 732

Soit $A \in \mathcal{E}$ de coordonnées $(1, 2)$ relativement au repère $\mathcal{R} = \big(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\big)$.
Les coordonnées d'un point M sont (x, y) relativement à $\mathcal{R}$ et (x', y') relativement à $\mathcal{R}' = \big(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\big)$. Donner les formules qui lient (x, y) et (x', y') (dans les deux sens)

2. Ne pas confondre "**base**" et "**repère**"

29.2 Sous-espaces affines

29.2.1 Sous-espace affine

$\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E.

$\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ est un **sous-espace affine** [3] de $\mathcal{E}$ si et seulement si

$$\exists\, a_0 \in \mathcal{A},\ A = \left\{ \overrightarrow{a_0 a} \mid a \in \mathcal{A} \right\} \text{ est un } \textbf{SEV} \text{ de } E$$

Alors

- a appartient à $\mathcal{A}$ ssi a est de la forme $a = a_0 + \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u} \in A$
- On note $\boxed{\mathcal{A} = a_0 + A}$
- $\mathcal{A}$ est un espace affine de **direction** A

Test 733 Déterminer l'équation du plan affine $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ passant par $A(1,1,1)$ et dirigé par $\text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u}(1,2,0)$ et $\overrightarrow{v}(2,0,1)$.

Th. ▷ **Indépendance du choix de l'origine**

Si $\mathcal{A} = a_0 + A$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, alors

$$\forall\, a_1 \in \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} = a_1 + A$$

Pour montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace affine, on peut donc utiliser n'importe-quel point de $\mathcal{A}$.

Test 734 Réciproquement, a-t-on $a + A = b + A \Rightarrow b \in a + A$?

Test 735 A et B sont deux SEV de E, et a et b deux points de $\mathcal{E}$.

Montrer $$a + A = b + B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \overrightarrow{ab} \in A \end{cases}$$

29.2.2 Sous-espace affine d'un espace vectoriel

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$\mathcal{A} \subset E$ est un **sous-espace affine de E** si et seulement si

il existe un élément $a_0 \in \mathcal{A}$ tel que $A = \left\{ \overrightarrow{a_0 a} \mid a \in \mathcal{A} \right\}$ est un **SEV** de E.

- Les éléments d'un sous-espace affine sont appelés des **points**
- A est appelé **la direction de $\mathcal{A}$**
- a appartient à $\mathcal{A}$ ssi a est de la forme $a = a_0 + \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u} \in A$

Important: On note $\mathcal{A} = a_0 + A = \left\{ \overrightarrow{a_0 a} \mid a \in \mathcal{A} \right\}$ le sous-espace affine passant par a_0 et de direction le **SEV** A.

Test 736 Résoudre l'équation différentielle $y'' + 3y' + 5y = 2x + 3$
Est-ce un sous-espace affine d'un espace vectoriel ? Si oui, identifiez-les.

3. On dit aussi que $\mathcal{A}$ est une **variété linéaire affine** de $\mathcal{E}$.

Cas particulier important $\boxed{E \text{ est un sous-espace affine de direction } E}$

- Tout élément de $u \in E$ peut donc être considéré comme
  - un élément de E en tant qu'espace vectoriel. On dira "le vecteur u".
  - un élément de E en tant qu'espace affine. On dira "le point u".

29.2.3 Intersection et parallélisme

Th. ▷ **Intersection de sous-espaces affines**

Si elle n'est pas vide, l'intersection de deux sous-espaces affines est un sous-espace affine de direction l'intersection des directions.

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A} &= a + A \\ \mathcal{B} &= b + B \\ c &\in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = c + (A \cap B)$$

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux sous-espaces affines de directions respectives A et B.

$\mathcal{A}$ est parallèle à $\mathcal{B}$ si et seulement si $A \subset B$

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont parallèles si et seulement si $A = B$

Th. ▷ **Intersection et parallélisme**

- Si $\mathcal{A}$ est parallèle à $\mathcal{B}$ alors $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$ ou $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$
- Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont parallèles, alors $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{B}$

Attention aux réciproques :

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \not\Rightarrow \mathcal{A}$ est parallèle à $\mathcal{B}$
- $\mathcal{A} = \mathcal{B} \not\Rightarrow \mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont parallèles
- **mais** $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$ n'entraîne pas forcément un parallélisme

Test 737 Montrer que $\mathcal{A} = a + A$ et $\mathcal{B} = b + B$ ont une intersection non vide si et seulement si $\overrightarrow{ab} \in A + B$

29.2.4 Définition d'hyperplan affine

Rappel : la dimension d'un espace affine est la dimension de sa direction.

$\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E.
Le sous-espace affine $\mathcal{H} = a + H$ est un **hyperplan affine de $\mathcal{E}$** ssi sa direction H est un hyperplan vectoriel de E.

▷ Comme un espace affine est de dimension finie, un hyperplan affine est un sous-espace de dimension dim E - 1.

29.2.5 Equation normale d'un hyperplan affine

Th. ▷ **Equation normale**

Soient $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de $\mathcal{E}$ affine euclidien, $a \in \mathcal{E}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de la droite vectorielle $H^{\perp}$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\mathcal{H} = \{m \in \mathcal{E} | \overrightarrow{am}.\overrightarrow{u} = \lambda\}$$

Ainsi $m \in \mathcal{H}$ ssi $\overrightarrow{am}.\overrightarrow{u} = \lambda$: on parle d'équation normale de $\mathcal{H}$.

Équation cartésienne : dans un repère $\mathcal{R} = \Big(O, e_1, \cdots, e_n\Big)$ de E :

- $\mathcal{H}$ est un hyperplan ssi son équation cartésienne est de la forme
$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = \alpha\,, \quad (a_1, \cdots, a_n) \neq (0, \cdots, 0)$$
$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ est l'équation de sa direction.
- Les hyperplans d'équations $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = \alpha$ et $b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = \beta$ sont :
  - parallèles ssi $(a_1, \cdots, a_n)$ et $(b_1, \cdots, b_n)$ sont proportionnels
  - égaux ssi $(a_1, \cdots, a_n, \alpha)$ et $(b_1, \cdots, b_n, \beta)$ sont proportionnels

Test 738

Le plan affine est rapporté au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Les points A, B et C ont pour coordonnées $(1,0), (2,-1)$ et $(3,2)$.
Équation de la droite AB ? de la parallèle à AB contenant C ?

Test 739

L'espace affine est rapporté au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Les points A, B et C ont pour coordonnées $(1,1,0), (0,2,-1)$ et $(1,3,2)$.
Équation du plan ABC ? du plan parallèle, contenant $D(1,1,1)$?

29.3 Applications aux Équations linéaires

Équation linéaire (cas général) :

- c'est une équation de la forme $f(x) = b$ où $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$
- si $\mathcal{S} = \Big\{u \in E \mid f(u) = b\Big\}$ désigne l'ensemble des solutions :
  - soit $\mathcal{S} = \varnothing$ (si $b \notin \mathrm{Im}(f)$)
  - soit $\mathcal{S} \neq \varnothing$. Alors $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de E de direction $\mathrm{Ker}\,(f)$
$$\mathcal{S} = x_0 + \mathrm{Ker}\,(f) \quad \text{où} \quad x_0 \in \mathcal{S} \text{ est une solution particulière.}$$

Test 740

Trouver la solutions u_0 de la forme $(x, 0)$ du système $\begin{cases} 4\,x + 6\,y = 2 \\ 6\,x + 9\,y = 3 \end{cases}$
Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $\varphi(x,y) = (4\,x + 6\,y, 6\,x + 9\,y)$
En déduire toutes les solutions su système.

Équation différentielle linéaire

- C'est une équation différentielle de la forme $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0y = b(x)$ où $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ et b sont des fonctions continues sur l'intervalle I.
- Cette équation entre dans le cadre général des équations linéaires ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :

$$\varphi(y) = b \quad \text{où} \quad \varphi : \begin{cases} \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K}) & \to & \mathcal{F}(I, \mathbb{K}) \\ y & \mapsto & y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0y \end{cases}$$

- Voir le cours d'analyse pour les équations linéaires, soit d'ordre 1, soit d'ordre 2 à coefficients constants

Test 741 Résoudre $xy' + 2(x-1)y = 2(x+1)x^4$. Sur quels intervalles peut-on la résoudre ?

Suites récurrentes (u_n) **telles que** $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$

$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.
- Les suites u recherchées sont les solutions de l'équation linéaire :

$$\varphi(u) = 0 \quad \text{où} \quad \varphi \begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) & \mapsto & (v_n) \end{cases}$$

avec $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n$

Test 742 On pose les deux suites (u) et (v) telles que $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n + 2v_n$ et $v_{n+1} = v_n - u_n$. Déterminer les termes généraux des deux suites.

Interpolation polynomiale

Soient $x_0, \cdots, x_n$ dans $\mathbb{K}$ distincts et $(y_0, \cdots, y_n)$ dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble des polynômes P tels que $P(x_i) = y_i$ pour tout i de $[\![0;n]\!]$ est un sous-espace affine de $\mathbb{K}[X]$. Plus précisément si P est un polynôme vérifiant la condition précédente (son existence est garantie), alors $\mathcal{P} = P + A\mathbb{K}[X]$ où $A = \Pi_{i=0}^{n}(X - x_i)$.

Test 743 Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que P(1)=P(2)=P(3)=2

29.4 Exercices

Repères affines

Exercice 1

Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine. Déterminer l'ensemble des points ayant mêmes coordonnées dans les repères $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

Exercice 2

Soit $R_1 = (O, e_1, e_2, e_3)$ un repère cartésien d'un espace affine. Soient $O^{'}$ de coordonnées $(1, 0, 0)$, $e_1^{'} = e_1 + e_2$, $e_2^{'} = e_1 - e_2$, $e_3^{'} = e_3$ et $R_2 = (O^{'}, e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'})$. Déterminer les coordonnées d'un point dans R_2 en fonction de ses coordonnées dans R_1.

Sous-espace affines

Exercice 3

Soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, deux sous-espaces affines de dimension finie d'un espace affine $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{H}$ le sous-espace affine engendré par $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ c'est-à-dire le plus petit sous-espace affine contenant $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$. Déterminer $\dim(\mathcal{H})$.

Exercice 4

Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+2-b & 2a+3b-5 \\ 4+a & 1-a+b \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-espace affine de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Préciser sa direction.

Exercice 5

Soit $\mathcal{F}$ une partie non vide de l'espace affine $\mathcal{A}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous espace affine de $\mathcal{A}$ si et seulement si

$$(\forall x, y \in \mathcal{F})\ (x \neq y \Rightarrow D_{x,y} \subset \mathcal{F})$$

où $D_{x,y}$ est la droite qui joint x et y.

Calculs de distances

Exercice 6

Soient les droites $\mathcal{D} \begin{cases} y - z + 2 = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 3 \end{cases}$ et $\mathcal{D}' \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ x - 2y + 2z = 11 \end{cases}$. Déterminer la perpendiculaire commune à ces droites. En déduire la distance entre ces deux droites.

Exercice 7

Calculer la distance du point $O = (0, 0, 0)$ au plan $(\mathcal{P})$ d'équation $x + y + z = 1$. Déterminer λ pour que le plan $(x + y + z - 1) + \lambda(x - y + z - 2) = 0$ soit orthogonal au plan $(\mathcal{P})$. Calculer la distance du point O au plan $(\mathcal{P}_\lambda)$. En déduire la distance de O à la droite $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$.

