Chapitre 28

Déterminants

28.1 Groupe symétrique

28.1.1 Permutations

Soit E un ensemble fini et non vide.
Une **permutation** de E est une bijection de E dans E.

$\boxed{\text{Th.}}$ ▷ **Groupe symétrique**

$n \in \mathbb{N}^*$. Muni de la loi $\circ$ de composition des applications, l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ a une structure de groupe.

C'est le **groupe symétrique d'ordre n** noté $\boxed{\mathfrak{S}_n}$

Vocabulaire et notations :

- Un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est noté $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$
- La composée $\sigma_1 \circ \sigma_2$ de deux éléments de $\mathfrak{S}_n$ se dit encore **produit**.
- Le groupe $\mathfrak{S}_n$ est fini. Il comporte $n\,!$ permutations.
- Si $n \geqslant 3$, le groupe $\mathfrak{S}_n$ n'est pas abélien.

Test 698 $\sigma \in \mathfrak{S}_{15}$ est un cycle qui vérifie $\sigma^2 = \sigma^8$ et $\sigma^{14} = \mathrm{Id}$.
Que peut-on en déduire ?

28.1.2 Cycles

Seule, la définition d'un cycle est explicitement au programme.
Les autres résultats sont admis. Ils ne figurent qu'à titre indicatif.

$a_1, a_2, \cdots, a_p$ sont p éléments distincts de $[\![1, n]\!]$ $(p \geqslant 2)$.

Le **p-cycle** $\sigma = [a_1, a_2, \cdots, a_p]$ est la permutation définie par

$$\begin{cases} \text{si } x = a_i\,,\ i \in [\![1, p-1]\!] & \sigma(a_i) = a_{i+1} \\ \text{si } x = a_p & \sigma(a_p) = a_1 \\ \text{sinon} & \sigma(x) = x \end{cases}$$

L'ensemble $\left\{a_1, a_2, \cdots, a_p\right\}$ est le **support** du cycle, p son **ordre** .

Remarques : on bouge les nombres et non les places.

Test 699 Les cycles $[1,5,6,4,2]$, $[5,6,4,2,1]$ et $[1,2,4,5,6]$ sont-ils égaux ?

Test 700 Montrer que, si σ est le cycle $[a_1, a_2, \cdots, a_p]$, alors σ^{-1} est un cycle qu'on précisera.

Test 701 Si σ est un cycle, en est-il de même pour $\sigma \circ \sigma$?

Test 702 Montrer que si ρ et σ sont deux cycles de supports disjoints,
alors $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$.

Remarques :

- Un cycle σ d'ordre p vérifie $\sigma^p = \mathrm{Id}$ (et $\forall\, k \in [\![1, p-1]\!]$, $\sigma^k \neq \mathrm{Id}$)
- Deux cycles de supports disjoints commutent.
- Toute permutation σ se décompose en produit de cycles de supports disjoints.

(Ces cycles commutent, ce qui permet de calculer les puissances de σ.)

Test 703 **Décomposition en cycles de supports disjoints :**
Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ en produit de cycles de supports disjoints. En déduire σ^{1000}.

28.1.3 transpositions

Une **transposition** est une permutation qui laisse invariant tous les éléments,
sauf deux éléments distincts qui sont échangés.

On la note $\boxed{[\,a\,,\,b\,] \text{ ou } \tau_{a,b}}$ $a, b \in [\![1, n]\!]$, $a \neq b$

Propriétés :

- Une transposition est un cycle d'ordre 2.
- Donc, une transposition est involutive.
- La composée de deux transpositions de supports disjoints commutent.

Test 704 Dans $\mathfrak{S}_8$, calculer $\tau_{1,2} \circ \tau_{1,3}$ et $\tau_{1,3} \circ \tau_{1,2}$,
puis $\tau_{1,2} \circ \tau_{1,3} \circ \tau_{1,4} \circ \cdots \circ \tau_{1,8}$.

Th. ▷ **Décomposition en transpositions**

Soit $n \geq 2$, Toute permutation se décompose en produit de transpositions.

$\forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\exists\, p \in \mathbb{N}^*$, $\exists\, \tau_1, \tau_2, \cdots \tau_p$ transpositions $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_p$

Notes :

- *La décomposition n'est pas unique*
- *Le nombre p de transpositions n'est pas unique.*

Cycle

Un cycle $[a_1 \cdots a_k]$ peut se décomposer en $[a_1 a_k] \circ [a_1 a_{k-1}] \circ [a_1 a_{k-2}] \circ \cdots \circ [a_1 a_2]$

Test 705 Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 8 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ en transpositions.

(on donnera deux décompositions de longueurs différentes)

28.1.4 Signature d'une permutation

Th. ▷ **Signature (admis)**

Il existe une et une seule application ε de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$ telle que :
- $\varepsilon(\tau) = -1$ pour toute transposition τ
- $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$ pour toutes permutations σ et σ'

On appelle **signature** cette application.

Conséquences :
- $\varepsilon(\mathrm{Id}) = 1$ et $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.
- Si une permutation σ se décompose en p transpositions, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$.
- La longueur de la décomposition en transpositions n'est pas déterminée, mais les longueurs de toutes les décompositions ont même parité.

Une permutation σ est **paire** quand $\varepsilon(\sigma) = 1$
impaire quand $\varepsilon(\sigma) = -1$

- Donc $\boxed{\text{une transposition est impaire}}$.

Le **groupe alterné $\mathcal{A}_n$** est constitué des permutations paires de $\mathfrak{S}_n$:
- $\mathcal{A}_n$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

Test 706 **Signature d'un k-cycle** (on peut passer en première lecture)
- Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Quelle est la signature du cycle $[1, 2, \cdots, k]$?
- En déduire la signature de tout k-cycle $[a_1, a_2, \cdots, a_k] \in \mathfrak{S}_n$

Test 707 Quelle est la signature de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$?

Test 708 Montrer que le cardinal du groupe alterné est $\dfrac{n!}{2}$.

Test 709 Soient $c_1, c_2, \cdots, c_p$ des cycles à supports disjoints de longueurs respectives $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_p$. Soit $\sigma = c_1 \cdots c_p$. Quelle est la signature de σ ?

28.2 Applications multilinéaires

28.2.1 Définitions

E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

L'application $f : E^p \to F$ est **p-linéaire** [1] si et seulement si

1. Plus généralement, f peut être définie sur $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$, produit cartésien de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

$$\forall\, i \in \left[\!\left[1,p\right]\!\right],\forall\, a_1,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_p \in E\,,$$

$$f_i \begin{cases} E & \to & F \\ u & \mapsto & f(a_1,\cdots,a_{i-1},u,a_{i+1},\cdots,a_p) \end{cases} \quad \text{est linéaire}$$

Exemples

- Le produit scalaire est une forme 2-linéaire.
- L'application $\begin{cases} \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \Big((a,b),(c,d)\Big) & \mapsto & ad-bc \end{cases}$ est bilinéaire.

Attention :

Ne pas confondre "n-linéaire sur E" avec "linéaire sur E^n"
Exemple : ◦ si f est linéaire sur E^2, alors $f(\lambda u,\lambda v)=\lambda\, f(u,v)$
◦ si g est bilinéaire sur E, alors $g(\lambda u,\lambda v)=\lambda^2\, g(u,v)$

Test 710 Que se passe-t-il si f est linéaire sur E^n et g est n-linéaire sur E ?

Test 711 Dire si l'application $f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f\Big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\Big)=z$ est linéaire ou bilinéaire dans les cas suivants : $z_1=0$

$z_2=1$	$z_3=x_1$	$z_4=x_1+x_2$	$z_5=x_1\,x_2$
$z_6=x_1+y_1$	$z_7=x_1\,y_1$	$z_8=x_1+y_2$	$z_9=x_1\,y_2$

Th. ▷ **Expression analytique d'une application multilinéaire**

Si $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et si $\forall\, k\in\left[\!\left[1,p\right]\!\right]$, $a_k=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{i,k}\,e_i$, alors

- si f est p-linéaire sur E nous avons
$$f(a_1,a_2,\cdots,a_p)=\sum_{(i_1,\cdots,i_p)\in[\![1,n]\!]^p} x_{i_1,1}x_{i_2,2}\cdots x_{i_p,p}\; f(e_{i_1},e_{i_2},\ldots,e_{i_p})$$
- Réciproquement, pour toute famille $\Big(f_\omega\Big)_{\omega\in[\![1,n]\!]^p}$, l'application $f:E^p\to F$ définie par
$$f(a_1,a_2,\cdots,a_p)=\sum_{(i_1,\cdots,i_p)\in[\![1,n]\!]^p} x_{i_1,1}x_{i_2,2}\cdots x_{i_p,p}\; f_{i_1,i_2,\cdots,i_p} \quad \text{est p-linéaire.}$$

Test 712 Relativement à la base $\mathcal{B}=(i,j)$, l'expression analytique de f est (avec les notations naturelles) $f(u_1,u_2)=x_1x_2+2x_1y_2+3y_1y_2$.
Donner l'expression analytique de f relativement à la base $\mathcal{B}'=(i+j,j)$.

28.2.2 Applications symétriques, antisymétriques, alternées

Si f est une application p-linéaire de E dans F, alors :

f est **symétrique** ssi

$$\forall\,\sigma\in\mathfrak{S}_p\,,\ \forall\, a_1,\cdots,a_p\in E\,,\quad f(a_1,\cdots,a_p)=f(a_{\sigma(1)},\cdots,a_{\sigma(p)})$$

f est **antisymétrique** ssi

$$\forall\ \sigma \in \mathfrak{S}_p\ ,\ \forall\ a_1, \cdots, a_p \in E\ ,\quad f(a_1, \cdots, a_p) = \varepsilon(\sigma)\ f(a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(p)})$$

f est **alternée** ssi

$$\forall\ a_1, \cdots, a_p \in E\ ,\quad \exists\ i \neq j\ ,\ a_i = a_j\ \Rightarrow\ f(a_1, \cdots, a_p) = 0_F$$

Th. ▷ **Caractérisation par les transpositions**

f p-linéaire sur E est symétrique [resp. antisymétrique] ssi
pour toute transposition $\tau \in \mathfrak{S}_p$:
pour toute famille $(a_1, a_2, \cdots, a_p) \in E^p$

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_p) = f(a_{\tau(1)}, a_{\tau(2)}, \cdots, a_{\tau(p)})$$
$$[\text{resp.}\quad f(a_1, a_2, \cdots, a_p) = -f(a_{\tau(1)}, a_{\tau(2)}, \cdots, a_{\tau(p)})\,]$$

c'est-à-dire $f(\cdots, a, \cdots, b, \cdots) = f(\cdots, b, \cdots, a, \cdots)$)
[resp. $f(\cdots, a, \cdots, b, \cdots) = -f(\cdots, b, \cdots, a, \cdots)$)]

Th. ▷ **Lien Antisymétrique $\leftrightarrow$ Alternée**

f est p-linéaire sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

$$f \text{ est antisymétrique} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est alternée}$$

Note :

$\Leftarrow$ est vraie pour tout corps $\mathbb{K}$

$\Rightarrow$ est fausse avec certains corps particuliers

Test 713

f est 3-linéaire antisymétrique sur E de base (i, j, k) .
- f vérifie $f(i, j, k) = 1$. Calculer $f(i, k, j)$, $f(j, i, k)$ etc.
- En déduire l'expression analytique de f.

Conséquences importantes :

- Si f est n-linéaire alternée, on ne change pas l'image $f(a_1, \cdots, a_p)$ si, à un des vecteurs a_i, on ajoute une combinaison linéaire des autres vecteurs $(a_k)_{k\neq i}$.
- l'application p-linéaire f est alternée ssi [2] l'image de toute famille liée est nulle.

Test 714 Que peut-on dire d'une forme p-linéaire alternée si $p > \dim(E)$?

28.3 Déterminants

Dans toute la suite, E est de dimension n, et f est une forme n-linéaire alternée.

28.3.1 Formes n-linéaires alternées en dimension n

Th. ▷ **Détermination des formes $\dim(E)$-linéaires alternées** [3]

2. **Attention :** ceci caractérise les formes alternées, et non les familles liées...

> Si E est de dimension n, alors
> toutes les formes n-linéaires alternées sur E sont proportionnelles.
> Elles sont déterminées par l'image d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E :
> $$f(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i} \cdot f(\mathcal{B}) \quad (\text{où } a_k = \sum_{i=1}^{n} x_{i,k}\, e_i)$$

28.3.2 Déterminant dans une base $\mathcal{B}$

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de E.

Le **déterminant dans la base $\mathcal{B}$**, noté $\boxed{\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}}$

est l'unique forme n-linéaire alternée sur E qui vérifie $\boxed{\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1}$

Test 715 Donner l'expression analytique du déterminant en dimension 2, puis en dimension 3.

Conséquences :

- Son expression analytique est

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i}\right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} x_{i,\sigma(i)}\right)$$

- Toute forme n-linéaire alternée sur E est proportionnelle à $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}$.

Important:

Soit f une forme n-linéaire alternée sur E :

$$f = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}} \cdot f(\mathcal{B}) \text{ c'est-à-dire } \forall S \in E^n,\ f(S) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(S) \cdot f(B)$$

- Si la famille $(a_1, \cdots, a_n)$ est liée, alors $f(a_1, \cdots, a_n) = 0$.

(Nous n'avons pas (encore) la réciproque.)

- le déterminant $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(a_1, \cdots, a_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ d'une famille de vecteurs
  - ***ne change pas si :***
    - ✠ à un des vecteurs, on ajoute une combinaison linéaire des autres vecteurs
    - ✠ on fait subir à la famille une permutation paire
  - ***change de signe si :***
    - ✠ on fait subir à la famille une permutation impaire

Test 716 $\mathcal{B} = (i, j, k)$ est une base de E. Que vaut $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(i, j, k)$? En déduire

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(i + j + k, j, k), \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(2i + 3j + 4k, j, k),$$

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(i + 2j + k, i + j, j + k) \text{ et } \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(i + j + k, i + 2j + 2k, 2i + 3j - 3k)$$

Test 717 **Indispensable :** montrer

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(a_1, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(a_1, \cdots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

3. Cette démonstration n'est pas exigible.

Changement de base : si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors

$$\forall\ \mathcal{S} \in E^{\,n} : \quad \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\ \mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{S})$$

Th. ▷ **Caractérisation des bases**

dans un espace de dimension n,

une famille de n vecteurs est liée ssi son déterminant est nul.

c'est-à-dire : $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ base de E

$$\boxed{(a_1, \cdots, a_n) \in E^{\,n} \text{ base de } E \iff \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(a_1, \cdots, a_n) \neq 0}$$

28.3.3 Déterminant d'un endomorphisme

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et φ un endomorphisme de E, alors

la quantité $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}\Big(\varphi(\mathcal{B})\Big)$ est indépendante de la base $\mathcal{B}$ de E

C'est le **déterminant de l'endomorphisme φ** Noté $\boxed{\mathrm{Det}(\varphi)}$

Test 718

La matrice de $f \in \mathcal{L}(E)$ relativement à la base (i, j) est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Vérifier l'indépendance en calculant $\mathrm{Det}(f)$ avec les bases (i, j) et $(i + j, i + 3\,j)$.

Propriétés :

- $\forall\ \varphi \in \mathcal{L}(E)$, $\quad \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}\Big(\varphi(\mathcal{S})\Big) = \mathrm{Det}(\varphi)\ \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$
- ***Déterminant d'une composée :*** $\boxed{\mathrm{Det}(\varphi \circ \psi) = \mathrm{Det}(\varphi) \times \mathrm{Det}(\psi)}$
- $\mathrm{Det}(\mathrm{Id}_E) = 1$
- ***Caractérisation des automorphismes :***

  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ **:** $\boxed{\varphi \textbf{ bijective} \iff \mathrm{Det}(\varphi) \neq 0}$
- Si φ est bijective, alors $\quad \mathrm{Det}(\varphi^{-1}) = \dfrac{1}{\mathrm{Det}(\varphi).}$
- L'ensemble des automorphismes de E, de déterminant 1 est un sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$.

  C'est le groupe **spécial linéaire de E** noté $\boxed{\mathrm{SL}(E)}$

28.3.4 Déterminant d'une matrice carrée

Le **déterminant** de $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$

On le note $\boxed{\mathrm{Det}(A)}$ ou encore $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$

Les trois notions coincident :

$$\boxed{\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(f) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})}$$

où $\quad A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$

On en déduit immédiatement les propriétés suivantes

Propriétés :

- $\boxed{\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(\,A^T\,)}$
- Manipulations élémentaires :
  - ◦ $\mathrm{Det}(A)$ ne change pas si, à une colonne, on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes
  - ◦ $\mathrm{Det}(A)$ est multiplié par λ si on multiplie **une** colonne par λ.
  - ◦ $\mathrm{Det}(A)$ est inchangé si on fait subir aux colonnes une permutation paire.
  - ◦ $\mathrm{Det}(A)$ change de signe si on fait subir aux colonnes une permutation impaire.
  - ◦ Mêmes résultats en manipulant les lignes.
- $\mathrm{Det}(I_n) = 1$
- $\boxed{\mathrm{Det}(A\,B) = \mathrm{Det}(A) \times \mathrm{Det}(B)}$
- $\boxed{A \text{ est régulière } \underline{\text{ssi}} \ \mathrm{Det}(A) \neq 0}$ et alors $\boxed{\mathrm{Det}(A^{-1}) = \dfrac{1}{\mathrm{Det}(A)}}$
- Le **groupe spécial linéaire d'ordre n** noté $\boxed{\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})}$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}n(\mathbb{K})$ constitué des matrices de déterminant 1.

28.4 Calculs de déterminants

28.4.1 Développement par rapport à une ligne (ou colonne)

Introduction

ordre 1 : $\begin{vmatrix} a \end{vmatrix} = a$ (voir [4])

ordre 2 : $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = a\,b' - a'b$

ordre 3 :
$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - cb'a'' - ac'b'' - ba'c'' = a'' \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} - b'' \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} + c'' \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$$

Soit la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in \left[\!\left[1, n\right]\!\right]^2$

Le **mineur d'indice (i,j) dans A** est le déterminant de la matrice extraite obtenue en supprimant de A la ligne i et la colonne j.

$$M_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Le **cofacteur d'indice (i,j) dans A** est $C_{i,j} = (-1)^{i+j}\, M_{i,j}$

La **comatrice de A** est la matrice des cofacteurs :

$$\boxed{\mathrm{com}(A) = \big(C_{i,j}\big)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}}$$

Th. ▷ **Développement suivant une colonne (une ligne)**

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$\forall\, k \in \left[\!\left[1, n\right]\!\right], \quad \mathrm{Det}(A) = \sum_{i\in[\![1,n]\!]} a_{i,k}\, C_{i,k} = \sum_{i\in[\![1,n]\!]} a_{k,i}\, C_{k,i}$$

où $C_{i,j}$ est le cofacteur d'indice (i,j).

4. **Attention :** ne pas confondre $\begin{vmatrix} a \end{vmatrix} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} (a) \end{pmatrix}$ avec la valeur absolue...

Test 719 Calculer les déterminants $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

28.4.2 Techniques de calculs

Déterminants d'ordre 2 ou 3

- $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x\,y' - y\,x'$ (A savoir par cœur.)
- Règle de Sarrus [5] (Ordre 3 seulement. Cette règle est non généralisable).

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = \underbrace{(xy'z'' + yz'x'' + zx'y'')}_{\begin{array}{|ccccc|} \boldsymbol{x} & & \boldsymbol{x'} & & \boldsymbol{x''} \\ & \searrow & & & \\ \boldsymbol{y} & & \boldsymbol{y'} & & \boldsymbol{y''} \\ & \searrow & & \searrow & \\ \boldsymbol{z} & & \boldsymbol{z'} & & \boldsymbol{z''} \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} & \searrow & & \searrow & \\ \boldsymbol{x} & & \boldsymbol{x'} & & \boldsymbol{x''} \\ & & & \searrow & \\ \boldsymbol{y} & & \boldsymbol{y'} & & \boldsymbol{y''} \end{array}} - \underbrace{(zy'x'' + xz'y'' + yx'z'')}_{\begin{array}{|ccccc|} \boldsymbol{x} & & \boldsymbol{x'} & & \boldsymbol{x''} \\ & & & \nearrow & \\ \boldsymbol{y} & & \boldsymbol{y'} & & \boldsymbol{y''} \\ & \nearrow & & \nearrow & \\ \boldsymbol{z} & & \boldsymbol{z'} & & \boldsymbol{z''} \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} & \nearrow & & \nearrow & \\ \boldsymbol{x} & & \boldsymbol{x'} & & \boldsymbol{x''} \\ & \nearrow & & & \\ \boldsymbol{y} & & \boldsymbol{y'} & & \boldsymbol{y''} \end{array}}$$

Manipulations élémentaires souvent utilisées pour

- faire apparaître des "0" (afin de développer plus facilement).
- trouver des facteurs.
- pour obtenir un déterminant de forme connue.

Test 720 Faire apparaître une ligne ou une colonne comportant un maximum de zéros puis développer le déterminant par rapport à cette ligne ou colonne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

5. Pierre Frédéric SARRUS (1798-1861) mathématicien Français.

Test 721

Montrer que les deux déterminants suivants sont factorisables par $(x-1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x & x & -1 & -1 \\ x & -1 & -1 & x \\ -1 & -1 & x & x \\ -1 & x & x & -1 \end{vmatrix}$$

28.4.3 Déterminants particuliers

- Le déterminant d'une **matrice triangulaire** (supérieure ou inférieure) est égal au produit des termes de la diagonale : $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$

- Déterminant de **Vandermonde**[6]

$$V(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

28.5 Applications

28.5.1 Familles libres, bijections

pour mémoire (propriétés déjà connues)

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

- $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in E^n$ est une base de E <u>ssi</u> $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \neq 0$
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible <u>ssi</u> $\mathrm{Det}(A) \neq 0$
- $f \in \mathcal{L}(E)$ est bijective <u>ssi</u> $\mathrm{Det}(f) \neq 0$

Test 722

(i, j, k) est une base de E. Pour quelles valeurs de λ la famille $\Big(i + (\lambda+6)\, j + (\lambda+3)\, k\,,\ (\lambda+2)\, i + \lambda\, j + 2\, k\Big)$ est-elle liée ? (piège !)

Rappel : *les déterminants permettent un calcul simple d'équations d'hyperplans vectoriels ou affines.*

Test 723

$\mathcal{B} = (i, j, k)$ est une base de E.
Former une équation cartésienne du plan vectoriel engendré par $(i + j, j + 2\, k)$

6. Alexandre Théophile VANDERMONDE (1735-1796) mathématicien français.
Cette notion très classique n'est pas explicitement au programme.

28.5.2 Inverse d'une matrice

Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nous avons $\boxed{A \;\operatorname{Com}(A)^T = \operatorname{Det}(A)\, I_n}$

Ainsi,

pour toute matrice A inversible (Det$(A) \neq 0$) $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{\operatorname{Det}(A)} \;\operatorname{Com}(A)^T}$

Test 724 Quel est l'inverse de la matrice de rotation d'angle θ : $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$?

Test 725 Utiliser cette méthode pour inverser (si possible)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

28.5.3 Application aux systèmes de Cramer

Pour un système de Cramer [7] d'ordre n,
d'écriture matricielle $A\,X = B$,

l'unique solution est $(x_1, \cdots, x_n)$ où $\boxed{\forall\, i \in [\![1, n]\!] \;,\; x_i = \dfrac{\operatorname{Det}(A_i)}{\operatorname{Det}(A)}}$

A_i étant la matrice obtenue en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par B.

Note : on peut également inverser la matrice A.

Test 726 Utiliser cette méthode pour résoudre

$$\begin{cases} x + 2\,y = 3 \\ 2\,x + 3\,y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2\,y = 3 \\ 2\,x + 3\,z = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

Test 727 Montrer que le système suivant est compatible, et le résoudre

$$\begin{cases} x + 2\,y - 4\,z - t & = -1 \\ -x - y + z + 2\,t & = 3 \\ 2\,x + y + z + 2\,t & = 6 \\ 3\,x + y + 3\,z & = 3 \end{cases}$$

28.5.4 Orientation d'un espace vectoriel

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

Deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E sont **de même sens** ssi $\operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$
de sens contraires ssi $\operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0$

7. Le programme se limite aux systèmes de Cramer. La technique des matrices bordantes est hors programme.

Sur l'ensemble des bases de E :

- "être de même sens" est une relation d'équivalence.
- Pour tout espace E non nul, il y a exactement deux classes d'équivalences.
- **Orienter** E, c'est choisir une de ces deux classes.
  - Les bases de cette classe sont alors dites **bases directes**
  - Les autres bases sont dites **indirectes**
  - Pour orienter l'espace, il suffit de choisir une base $\mathcal{B}_0$ quelconque.
    - Cette base sert de référence.
    - Par ce choix, elle est directe.
    - Toute base de même sens est directe.

Remarque

Pour comparer deux bases quelconques $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, il est souvent plus commode de les comparer à la base $\mathcal{B}_0$ de référence.

Test 728 E est orienté par la base (i, j, k) . Dire si les bases suivantes sont directes ou indirectes : (j, k, i) (k, j, i) $(-i, k, j)$ $(i + j, j + k; k + i)$

Test 729 Les bases $(i + j + k, i - k, j + k)$ et $(i - j - 2\,k, i - 2\,j + k, 2\,i + j - k)$ sont-elles de même sens ?

$\varphi \in \mathrm{GL}(E)$ est un **automorphisme direct** (ou **conserve l'orientation**)

ssi pour toute base $\mathcal{B}$ de E , $\mathcal{B}$ et $\varphi(\mathcal{B})$ ont le même sens

Ceci se produit ssi $\mathrm{Det}(\varphi) > 0$.

Dans le cas contraire, on dit que

φ est un **automorphisme indirect** (ou **change l'orientation**).

28.6 Exercices

Permutations d'un ensemble fini

Exercice 1

Montrer que S_n est engendré par les transpositions de la forme $(1, j)$, où $j \in [\![2; n]\!]$.

Exercice 2

Montrer que S_n est engendré par les transpositions de la forme $(i, i+1)$, où $i \in [\![1; n-1]\!]$.

Exercice 3

Soient τ et τ' deux transpositions. Montrer que $\tau\tau' = Id$ ou $(\tau\tau')^2 = Id$ ou $\tau\tau'^3 = Id$.

Déterminants

Exercice 4

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$; calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & a & a+b \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 5

Un exercice assez classique :

$\mathcal{B}$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3. Soit $u, u_1, u_2, u_3 \in E$.

1. Transformer $\varphi(\lambda) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(u_1 + \lambda\, u, u_2 + \lambda\, u, u_3 + \lambda\, u)$
2. Comment peut-on en déduire $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3)$ si on connaît $\varphi(\lambda_1)$ et $\varphi(\lambda_2)$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$?
3. **Application :** sachant que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ déterminer un vecteur u et deux valeurs particulières de λ pour lesquelles $\varphi(\lambda)$ est connu. En déduire $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3)$.
(Vérifiez)

Exercice 6

Un résultat classique (et utile...)

Soit $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$ un déterminant d'ordre n.

1. Montrer que $D(x) \in \mathbb{K}_{n-1}[x]$.
2. Donner $D'(x)$ (sous forme d'un déterminant d'ordre n).
Quelles sont les dérivées d'ordre supérieur ?

3. *Application :* soit $P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

   Montrer, sans calculer P, que $P(1) = P'(1) = 0$. Qu'en déduit-on ?
   Confirmer ceci par un calcul direct de $P(x)$.

Exercice 7

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Soit la matrice carrée $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \mathbf{0} & C \end{array}\right)$, où A et C sont des matrices carrées.

1. Mettre M sous la forme du produit $M = \left(\begin{array}{c|c} I & ? \\ \hline \mathbf{0} & ? \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} ? & ? \\ \hline \mathbf{0} & I \end{array}\right)$
2. En déduire que $\mathrm{Det}(M) = \mathrm{Det}(A) \times \mathrm{Det}(C)$

Exercice 8

Déterminer les réels x et y tels qu'il existe deux matrices A et B vérifiant

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} x & 14 \\ 14 & y \end{pmatrix}$$

Indication : ça peut laisser des traces.

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé et $\mathcal{C}$ la base canonique.

1. Montrer que le polynôme $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$ possède deux racines réelles distinctes λ_i $(i = 1, 2)$.
2. Pour tout $i = 1, 2$: déterminer le sous-espace $E_i = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$, montrer qu'il s'agit d'une droite vectorielle, dont on notera $\overrightarrow{b}_i$ un vecteur directeur.
3. Vérifier que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Que vaut D, la matrice de f relativement à cette base $\mathcal{B}$?
4. Quel lien y-a-t-il entre les matrices A et D ? En déduire la valeur de A^n pour $n \geq 1$.
5. Déterminer les expressions des termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$u_0 = v_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 3v_n \end{cases}$$

6. Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = 2y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

Exercice 10

Soit $P_1 = 1 + X - X^2$, $P_2 = 3 - X + 5X^2$, $P_3 = -1 + 2X + 3X^2$.
La famille (P_1, P_2, P_3) est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 11

Soit $P_1 = 2 + 3X - X^2$, $P_2 = 1 + X + X^2$, $P_3 = a - X + aX^2$.
A quelle condition sur a la famille (P_1, P_2, P_3) est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 12

Calculer les déterminants suivants (forme factorisée souhaitée) :

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$

2. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{vmatrix}$

3. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

4. $\Delta = \begin{vmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{vmatrix}$

5. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \sin(a) & \cos(a) \\ 1 & \sin(b) & \cos(b) \\ 1 & \sin(c) & \cos(c) \end{vmatrix}$

Exercice 13

Calculer le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & 0 \\ 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & 0 & 1 & x & x^2 \\ x^2 & x^3 & 0 & 1 & x \\ x & x^2 & x^3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Indication</u> : $L_j \leftarrow L_j - xL_{j+1}$.
Pour quelles valeurs de x la matrice M est-elle inversible ?

28.7 Exercices Complémentaires

Exercice 1

Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique réelle de taille n impair est nul.

Exercice 2

1. Montrer que le polynôme $P = X^3 - X + 1$ a trois racines complexes distinctes, qu'on note a, b et c.
2. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

Exercice 3

Pour chacune des questions suivantes, montrer que les applications considérées sont des endomorphismes de l'espace vectoriel E, et calculer leur déterminant.

1. $u : (x, y, z) \mapsto (x - y, y + z, x + y + z)$, $E = \mathbb{C}^3$.
2. $v : P \mapsto Q$ où $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} P(t)dt$, $E = \mathbb{R}_n[X]$.
3. $w : P \mapsto (X^2 - 1)P' - 3(X + 3)P$, $E = \mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 4

Calculer les déterminants suivants (pour a, b, c réels ou complexes quelconques) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ c & b & bc \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

Exercice 5

<u>Déterminant circulant</u>

Soient $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in K^n$, et M la matrice de coefficient $m_{i,j} = a_{j-i}$ si $i \leq j$, et $m_{i,j} = a_{n+j-i}$ sinon. Soit $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$, et U la matrice de coefficient général $u_{i,j} = \omega^{(i-1)(j-1)}$.

1. Ecrire les matrices M et U pour $n = 4$.
2. Calculer MU pour $n = 4$ puis pour n quelconque.
3. En déduire $\operatorname{Det} M$ sous forme factorisée.
4. En déduire une factorisation de $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

Exercice 6

Soit $n \in \{2; 3\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - A + I_n = 0$. Calculer A^3 et en déduire $\operatorname{Det} A$.

Exercice 7

Alain Couteèle et Mélissa Bailloeuil

Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$GL_n^+(\mathbb{R}) = \left\{M \in GL_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, \operatorname{Det} M > 0\right\}$$

$$GL_n^-(\mathbb{R}) = \left\{M \in GL_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, \operatorname{Det} M < 0\right\}$$

$$SL_n(\mathbb{R}) = \left\{M \in GL_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, \operatorname{Det} M = 1\right\}$$

1. Montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\big(GL_n(\mathbb{R}), \cdot\big)$.
2. Montrer que $GL_n^+(\mathbb{R})$ également.
3. En est-il de même de $GL_n^-(\mathbb{R})$?

Exercice 8

Polynôme caractéristique et diagonalisation Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note χ_A le polynôme associée à la fonction polynomiale $\lambda \mapsto \operatorname{Det}(A - \lambda I_n)$ (il est appelé le polynôme caractéristique de A).

1. Montrer que, si $n = 2$, $\chi_A(X) = X^2 - (trA)X + \operatorname{Det} A$.
2. Montrer que $\chi_A(A) = 0$ pour $n = 2$ (théorème de Cayley-Hamilton, vrai en fait pour toute valeur de n).
3. On dit que λ est valeur propre pour A s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$ (X est appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ). Montrer que les valeurs propres de A sont exactement les racines du polynôme caractéristiques de A.
4. Soit X_1, X_2, X_3, ..., X_k k vecteurs propres de A associés à k valeurs propres distinctes λ_1, λ_2, λ_3, ..., λ_k. Montrer que la famille $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ est libre. *On pourra utiliser le déterminant de Van der Monde.*
5. On suppose que χ_A est scindé à racines simples. Montrer qu'il existe D diagonale et P inversible tel que $A = PDP^{-1}$ (on dit que A est diagonalisable).

Exercice 9

Calculer les déterminants suivants avec $a \in \mathbb{R}$ et $s_i \in \mathbb{R}$:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a \end{vmatrix} \qquad D_n = \begin{vmatrix} s_1 & \cdots & \cdots & \cdots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \cdots & \cdots & s_2 \\ \vdots & \vdots & s_3 & \cdots & s_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \end{vmatrix}$$

