Chapitre 27

Séries

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

27.1 Définitions

Définition (**Séries**)
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle ou complexe.
On appelle série de terme général u_k la suite S définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$
et on la note traditionnellement $\sum_{k\geq 0} u_k$.
(S_n) est appelée la suite des sommes partielles.

Définition (**Convergence**)
Dire que la série $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge signifie que la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge.
Dire que la série $\sum_{k\geq 0} u_k$ diverge signifie que la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ diverge.
Déterminer la **nature** *d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente. En particulier, on dira que deux séries sont de même nature si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.*

Définition (**Somme**)
Soit $\sum_{k\geq 0} u_k$ une série convergente.
On note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ la limite finie de la suite S et on l'appelle somme de la série $\sum_{k\geq 0} u_k$.

Remarque

- $\sum_{k=0}^{n} u_k$: terme de rang n de la Sdtg u_k : S_n.
- $\sum_{k\geq 0} u_k$: Sdtg u_k : (S_n).
- $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$: somme de la Sdtg u_k : $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Test 682

On considère la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{1}{3^k}$.

1. On pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}$. Calcul S_n en fonction de n.
2. En déduire que la série de terme général $\dfrac{1}{3^k}$ converge et déterminer sa somme.

Th. ▷ **Opérations sur les séries**

Soit λ un nombre réel et soient $\displaystyle\sum_{k\geq 0}u_k$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 0}v_k$ deux séries convergentes alors

- la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}(u_k+v_k)$ est convergente et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k+v_k)=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k+\sum_{k=0}^{+\infty}v_k$.
- la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\lambda u_k$ est convergente et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda u_k=\lambda\sum_{k=0}^{+\infty}u_k$.

27.2 Séries de références et premiers calculs

27.2.1 Séries géométriques

Rappel

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout nombre complexe q différent de 1, on a

$$\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Th. ▷ **Séries géométriques**

Soit $q\in\mathbb{C}$, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}q^k$ (resp. $\displaystyle\sum_{k\geq 1}kq^{k-1}$, resp. $\displaystyle\sum_{k\geq 2}k(k-1)q^{k-2}$) est convergente si et seulement si $\mid q\mid<1$. Dans ce cas

$$\sum_{k=0}^{+\infty}q^k=\frac{1}{1-q}\qquad\sum_{k=1}^{+\infty}kq^{k-1}=\frac{1}{(1-q)^2}\qquad\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)q^{k-2}=\frac{2}{(1-q)^3}$$

Point Méthode : Soit la série de terme général $\dfrac{2k^2+3k+5}{2^k}$.

$\forall N\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N}\frac{2k^2+3k+5}{2^k} &= \sum_{k=0}^{N}\frac{2k(k-1)+2k+3k+5}{2^k}\\
\sum_{k=0}^{N}\frac{2k^2+3k+5}{2^k} &= \sum_{k=0}^{N}\frac{2k(k-1)+5k+5}{2^k}\\
\sum_{k=0}^{N}\frac{2k^2+3k+5}{2^k} &= \sum_{k=0}^{N}\frac{2k(k-1)}{2^k}+\sum_{k=0}^{N}\frac{5k}{2^k}+\sum_{k=0}^{N}\frac{5}{2^k}\\
\sum_{k=0}^{N}\frac{2k^2+3k+5}{2^k} &= \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2}\times\frac{k(k-1)}{2^{k-2}}+\sum_{k=0}^{N}\frac{5}{2}\times\frac{k}{2^{k-1}}+\sum_{k=0}^{N}5\times\frac{1}{2^k}\\
\sum_{k=0}^{N}\frac{2k^2+3k+5}{2^k} &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}+\frac{5}{2}\sum_{k=0}^{N}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+5\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}
\end{aligned}$$

Les séries de termes généraux $k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$, $k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$ sont convergentes car $|\frac{1}{2}| < 1$.

Dès lors la série de terme général $\frac{2k^2+3k+5}{2^k}$ converge et sa somme vaut :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2k^2+3k+5}{2^k} &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k(k-1)}{2^{k-2}}+\frac{5}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{2^{k-1}}+5\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\\
\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2k^2+3k+5}{2^k} &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k(k-1)}{2^{k-2}}+\frac{5}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{2^{k-1}}+5\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\\
\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2k^2+3k+5}{2^k} &= \frac{1}{2}\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3}+\frac{5}{2}\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}+5\frac{1}{1-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Test 683

Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leurs sommes :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{5^n}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+5n}{5^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{3^n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n(n-1)}{3^n}$$

27.2.2 Série exponentielle

La formule de Taylor-Lagrange permet d'affirmer (car la fonction exponentielle est de classe C^n pour tout n) que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $M > 0$ (majorant de e^t sur $[0, x]$) tel que

$$\left|e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\right| \leq M\left|\frac{x^{n+1}}{n!}\right|$$

Il ne reste plus qu'à démontrer que ce majorant tend vers 0 quand $n \mapsto +\infty$ pour en déduire que

Th. ▷ **Série exponentielle**

Pour tout nombre complexe z, la série $\sum_{k\geq 0}\frac{z^k}{k!}$ est convergente.

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!} = e^z$$

Remarque

Tous les développements limités permettent de construire des séries, le problème réside alors sur les valeurs de x pour lesquelles la série converge. Ceci fait l'étude du chapitre sur les séries entières en spé.

Point Méthode : Soit la série de terme général $\dfrac{2k^2+3k+5}{k!}$.
$\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} \frac{2k^2+3k+5}{k!} &= \sum_{k=0}^{N} \frac{2k(k-1)+2k+3k+5}{k!} \\
\sum_{k=0}^{N} \frac{2k^2+3k+5}{k!} &= \sum_{k=0}^{N} \frac{2k(k-1)}{k!} + \frac{5k}{k!} + \frac{5}{k!} \\
\sum_{k=0}^{N} \frac{2k^2+3k+5}{k!} &= 2\sum_{k=0}^{N} \frac{k(k-1)}{k!} + 5\sum_{k=0}^{N} \frac{k}{k!} + 5\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \\
\sum_{k=0}^{N} \frac{2k^2+3k+5}{k!} &= 2\left(0+0+\sum_{k=2}^{N} \frac{1^{k-2}}{(k-2)!}\right) + 5\left(0+\sum_{k=1}^{N} \frac{1^{k-1}}{(k-1)!}\right) + 5\sum_{k=0}^{N} \frac{1^k}{k!} \\
\sum_{k=0}^{N} \frac{2k^2+3k+5}{k!} &= 2\sum_{i=0}^{N-2} \frac{1^i}{i!} + 5\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1^j}{j!} + 5\sum_{k=0}^{N} \frac{1^k}{k!}
\end{aligned}$$

La série de terme général $\dfrac{1^k}{k!}$ converge.
Dès lors la série de terme général $\dfrac{2k^2+3k+5}{k!}$ converge et sa somme vaut :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k^2+3k+5}{k!} = 2\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1^i}{i!} + 5\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1^j}{j!} + 5\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1^k}{k!} = 2e^1 + 5e^1 + 5e^1 = 12e$$

Test 684

Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leurs sommes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$$

27.3 Propriétés et opérations sur les séries

Th. ▷ **Comportement du terme général**

Si une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, alors son terme général tend vers 0. Autrement dit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite 0.

Important: Ceci n'est qu'une implication

Remarques

- La réciproque est FAUSSE !
  $\sum_{k\geq 1} \dfrac{1}{k}$ est divergente alors que son terme général converge de limite 0.

- La contraposée est très utile pour montrer qu'une série ne converge pas. Si le terme général d'une série ne converge pas de limite 0, on dit qu'elle diverge grossièrement. Par exemple $\sum \cos(k)$ diverge. En effet, la suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas de limite 0.

Définition (**Reste d'ordre n**)
Soit $\sum_{k\geq 0} u_k$ *une série* *convergente. On note* $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ *sa somme et* S_n *sa* n^{ieme} *somme partielle.*
On appelle reste d'ordre n *de la série :*

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Comme la série est convergente, $\lim_{n\mapsto+\infty} R_n = 0$.

Test 685

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente en utilisant un télescopage.
2. Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| = \frac{1}{n}$ où R_n est le reste d'ordre n de la série.

Définition (**Espace vectoriel des séries**)
On peut définir l'espace vectoriel des séries en définissant les opérations :

$$\sum_{n\geq N} u_n + \lambda \sum_{n\geq N} v_n =_{definition} \sum_{n\geq N}(u_n + \lambda v_n).$$

Muni de ces lois, l'ensemble des séries (réelles ou complexes) forme un espace vectoriel.
Par linéarité de la limite, l'ensemble des séries convergentes en constitue un sous-espace vectoriel.

Remarque

On peut écrire $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ que si au moins deux des sommes existent. On est alors assuré de l'existence de la troisième.

Outils

On pourra retenir le lien entre suites et séries : étudier la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ revient en fait à étudier la suite des sommes partielles (S_n),
mais étudier la suite (u_n) revient à étudier la série $\sum_{n\geq 0}(u_n - u_{n-1})$ de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1}) + u_0$$

Test 686

Soit $u_p = \frac{1}{(2p-1)(2p+1)}$, p entier naturel non nul.

1. Déterminer a et b tels que $u_p = \frac{a}{2p-1} + \frac{b}{(2p+1)}$.
2. Calculer $S_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$.
3. En déduire la somme de la série de terme général $u_p, p \geq 1$.

Test 687

Déterminer la nature des séries numériques suivantes et, quand elles convergent, calculer leurs sommes.

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1}(\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2))$$

Pour la seconde somme, on pourra remarquer que $\sum_{n=1}^{N} \ln(n) = ln(N!)$.

27.4 Séries de nombres réels positifs

27.4.1 Sommes partielles majorées

Proposition (Croissance des sommes partielles positives)
*Si $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est une série de nombres **réels positifs** (c'est-à-dire la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels positifs), alors la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est croissante.*

Th. ▷ **Convergence des séries positives**

Si $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est une série de nombres réels positifs et si $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de ses sommes partielles, alors :
$\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Remarque

Avec les hypothèses de la proposition et dans le cas de la convergence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

27.4.2 Comparaison des séries à termes positifs

Th. ▷ **Comparaison des séries**

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de nombres réels positifs telles que

1. S'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ pour lequel

$$\forall n \geq N, \quad u_n \leq v_n,$$

   alors :
   — Si $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.
   — Si $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ diverge.
2. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge.

Conséquences

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de nombres réels positifs telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de nombres réels positifs telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$
  ▷ Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
  ▷ Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Test 688 Justifier que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{1+2^n}$ est convergente.

Test 689 En étudiant par un télescopage la série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)}$, montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente.

Test 690

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite de réels strictement positifs telle que $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.

Étudier la nature des séries à termes positifs suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} {a_n}^2, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{1+a_n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 0} a_n a_{2n}.$$

27.4.3 Critère de D'Alembert

Th. ▷ **Critère de D'Alembert** [1]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs.

1. S'il existe $\alpha \in]0;1[$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que :
$$\forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \alpha,$$
alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.
2. S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,$$
alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.
3. S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et si la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite ℓ, alors :

— Si $\ell < 1$, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

— Si $\ell > 1$, $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

— Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Test 691

Etudier la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^n}$.

• Le théorème de D'Alembert s'utilise seulement dans le cas où u_n est de "nature multiplicative".

Cas litigieux

Voyons maintenant que le cas litigieux l'est vraiment :

1. Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$, avec pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite de nombres réels strictement positifs. On a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
et la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.
2. Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$, avec pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^2}$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite de nombres réels strictement positifs. On a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
et la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

1. Jean le Rond D'Alembert (1717-1783) mathématicien, physicien, et philosophe français est célèbre pour avoir dirigé l'Encyclopédie avec Denis Diderot.

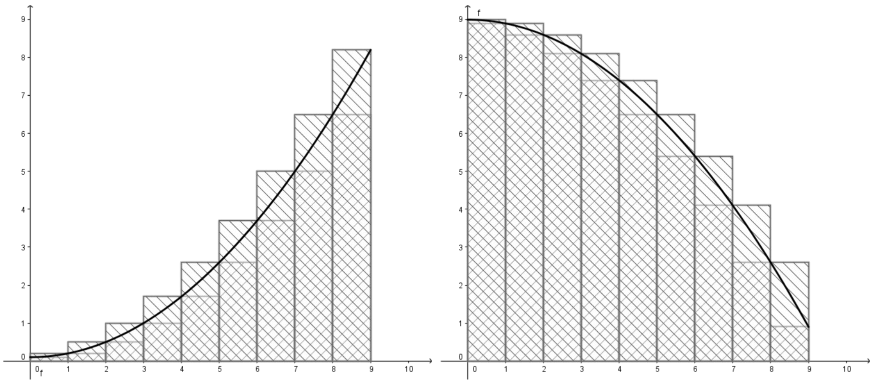
27.4.4 Comparaison série-intégrale

On considère une fonction continue par morceaux et monotone sur $\mathbb{R}^+$. On considère alors la série $\sum_{n\geq 0} f(n)$. L'idée est d'utiliser une intégrale pour encadrer les sommes partielles afin de pouvoir déterminer la nature de la série.

Lemme
Soit $f : \left[0, +\infty\right[\to \mathbb{R}^+$ *continue par morceaux et décroissante. On a :*

$$\forall n \geqslant 1 \quad \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)dt$$

C'est donc par la méthode des rectangles que l'on peut facilement encadrer la suite des sommes partielles :



Th. ▷ **Comparaison avec une intégrale**

Soit $f : [N; +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, décroissante et positive. La suite $\left(\int_N^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum_{n\geq N} f(n)$ sont de même nature (convergentes ou divergentes).

Test 692 Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^2(n)}$.

Th. ▷ **Application à l'étude des sommes partielles et des restes**

Soit $f : \left[0, +\infty\right[\to \mathbb{R}^+$, continue par morceaux et décroissante. Notons $I_n = \int_0^n f(t)\mathrm{d}t$.

- Si $\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge, alors $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et en notant I sa limite, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I - I_{n+1} \leqslant R_n \leqslant I - I_n$$

- Si $\sum_{n\geq 0} f(n)$ diverge, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n + f(n) \leqslant S_n \leqslant f(0) + I_n$$

Remarque Ce dernier encadrement est vrai dans les deux cas. Mais chacun des encadrements permet éventuellement de trouver des équivalents simples des restes ou des sommes partielles.

Th. ▷ **Les séries de Riemann**

$\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Test 693

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \int_n^{n+\frac{1}{n}} \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^2+1}}$$

En faisant une majoration simple, déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Th. ▷ **Critère de Riemann**

Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs.

Si $u_n \sim \dfrac{A}{n^\alpha}$ avec A réel strictement positif et $\alpha \in \mathbb{R}$

alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Test 694

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature des séries numériques de terme général u_n.

1. $u_n = \dfrac{n^2+n-1}{n+1}$.
2. $u_n = \dfrac{1+n+n^2}{2+n^4}$.
3. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2}$.
4. $u_n = \dfrac{1}{\ln^3(n)}$.
5. $u_n = \dfrac{n\ln(n)+1}{n^3+2n^2\ln(n)}$.
6. $u_n = \dfrac{n}{e^{an}}$.
7. $u_n = \ln\left(\dfrac{2^n+1}{2^n}\right)$.
8. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

27.5 Séries absolument convergentes

Définition (Convergence absolue)

Une série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ *de nombres réels ou complexes est dite absolument convergente si et seulement si la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |u_n|$ *est convergente.*

Proposition (Convergence absolue ⇒ convergence)

Une série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ *de nombres réels ou complexes qui est absolument convergente est convergente.*

Test 695

Montrer que les séries suivantes sont convergentes :

$$\sum \frac{\text{Arctan}((-2)^n)}{n^2} \qquad \sum (-1)^n sin\left(\frac{\pi n}{n^3+1}\right)$$

Remarque

- Ceci permet souvent de ramener l'étude de la convergence d'une série quelconque à celle d'une série à termes positifs.
- La réciproque est FAUSSE !

Exemple : La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, pourtant la série $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ est divergente.

Exemple : Soit $z \in \mathbb{C}$. Etudions la convergence de la série $\sum \frac{z^n}{n!}$. On va commencer par regarder la convergence absolue, c'est-à-dire étudier la convergence de la suite $\sum \frac{|z|^n}{n!}$. On utilise ensuite le critère de D'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0.$$

Il en résulte que la série est absolument convergente donc convergente, et ceci quelque soit $z \in \mathbb{C}$.

Th. ▷ **Traitement de $\mathcal{O}(v_n)$ et $o(v_n)$**

Soit (u_n) une suite numérique et (v_n) une suite de réels **positifs**

— Si la série $\sum v_n$ converge et $u_n =_{+\infty} \mathcal{O}(v_n)$ alors la série $\sum u_n$ converge absolument (donc converge).

— Si la série $\sum v_n$ converge et $u_n =_{+\infty} o(v_n)$ alors la série $\sum u_n$ converge absolument (donc converge).

Test 696 Montrer que la série de terme général $\left(\frac{\cos(n)}{n^2 - \sin(n)}\right)$ est convergente.

Test 697 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}} - \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)^n$. Déterminer la nature de $\sum_{n\geq 1} u_n$.

27.6 Théorème des séries alternées

Th. ▷ **Séries alternées**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs décroissante et tendant vers 0. La série $\sum(-1)^n u_n$ est dite alternée.

1. $\sum(-1)^n u_n$ est convergente. Notons L sa limite.
2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$s_{2p+1} \leq L \leq s_{2p}.$$
3. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $|R_N| \leq u_N$.
4. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, R_N est du signe de $(-1)^{N+1}$.

27.7 Exercices

Exercice 1

Justifer la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

1. Pour $k \geq 0$, $u_k = (2k+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^k$
2. Pour $k \geq 0$, $u_k = (k^2+k+1)\left(\frac{1}{3}\right)^k$
3. Pour $k \geq 0$, $u_k = (4k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$
4. Pour $k \geq 1$, $u_k = (2k^2-2k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$
5. Pour $k \geq 0$, $u_k = (3k+2)\left(\frac{1}{4}\right)^{k+2}$

Exercice 2

Justifer la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

1. Pour $k \geq 0$, $u_k = \dfrac{2k-1}{k!}$
2. Pour $k \geq 0$, $u_k = \dfrac{2k^2-3k+1}{k!}$
3. Pour $k \geq 0$, $u_k = \dfrac{k^2}{(k+1)!}$
4. Pour $k \geq 0$, $u_k = \dfrac{3k^2-2k+1}{k!}$
5. Pour $k \geq 0$, $u_k = \dfrac{k+2^k}{k!}$
6. Pour $k \geq 0$, $u_k = \dfrac{k^2-2k+3}{k!}(-3)^k$

Exercice 3

Pour n, k entiers naturels non nuls, on pose $u_k = 1/k$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $x \geq \ln(1+x)$.
2. En déduire $U_n \geq \ln(n+1)$ et $\lim_{n\to+\infty}(U_n)$.
3. On pose $v_k = u_k - u_{k+1}$ et $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.
   (a) Exprimer V_n en fonction de u_{n+1} et déterminer $\lim_{n\to+\infty}(V_n)$.
   (b) En déduire la somme de la série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
4. On pose $w_k = v_k - v_{k+1}$ et $W_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$.
   (a) Déterminer $\lim_{n\to+\infty}(W_n)$.
   (b) En déduire la somme de la série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4

On admet, pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0;1[$, que la série $\sum_{n\geq k}\binom{n}{k}x^n$ est convergente et on note $s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n$.

1. Vérifier, pour tout réel x de $[0;1[$, $s_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et $s_1(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

2. Pour tout couple d'entiers naturels (n, k) tel que $k < n$, montrer :

$$\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix}$$

3. Pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0;1[$, déduire de la question précédente que $s_{k+1}(x) = xs_k(x) + xs_{k+1}(x)$.
4. Montrer, par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0;1[, \quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

5. Montrer que $\forall x \in [0;1[\,,\ \forall k \in \mathbb{N},\ s_k(x)$ existe.

Exercice 5

Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
2. $u_n = \cos(n\pi)$
3. $u_n = \dfrac{n^2 - \cos n}{e^n + 3}$
4. $u_n = 2n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$
5. $u_n = \dfrac{\sin n}{n^2}$
6. $u_n = \dfrac{e^{in}}{n^3}$
7. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+2}{n^2}\right)$
8. $u_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}}$
9. $u_n = \dfrac{n\cos n}{2^n}$
10. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\cos(n)$
11. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

Exercice 6

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^4 + (-1)^n}}$.

Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+k)^2}$.

Montrer que u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ et déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n \geq 0} u_n$.

Indication : comparaison à une intégrale.

Exercice 8

Soit $\alpha > 0$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ et si $\alpha > 1$, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. On suppose que $0 < \alpha < 1$. Déterminer un équivalent de S_n.
2. On suppose que $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent de R_n.

Exercice 9

1. Déterminer en fonction de $\beta \in \mathbb{R}$, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^{\beta}(n)}$
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}(n)}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 10

1. En comparant la série à une intégrale, déterminer un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2n+1}}{n^2+1}$ est une série convergente. (extrait E3A PSI 2014)

Exercice 11

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n>0} e^{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} - e^{\cos\left(\frac{2}{n}\right)}$ est convergente.

Exercice 12

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{3n+(-1)^n}}$.
Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 13

Soit f une fonction continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la série de terme général $\displaystyle\frac{1}{n}\int_0^1 t^n f(t)dt$ est convergente.

Exercice 14

Le but de cet exercice est de démontrer l'égalité suivante.

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

1. Etablir la convergence de la série numérique $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ sa somme partielle d'ordre n. Démontrer l'égalité suivante.
$$S_{2n} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$
3. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{p}{n}}\right)$.
4. En déduire la relation $(*)$.
5. A l'aide du théorème des séries alternées, déterminer un rang à partir duquel S_n est une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-10} près.

27.8 Exercices Complémentaires

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature des séries numériques de terme général u_n.

1. $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$.
2. $u_n = \dfrac{1}{n^a + \cos(n)}$.
3. $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}$.
4. $u_n = n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}}$.

Exercice 2

Dans cet exercice, on admet le résultat suivant.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Soit $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n!} \int_1^a \Big(\ln(t)\Big)^n dt.$$

1. Démontrer que la série de terme général u_n est convergente.
2. Pour $n \geq 1$, déterminer en fonction de n et a, une relation liant $u_n$et u_{n-1}.
3. Calculer alors la somme de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} u_n$.

Exercice 3

1. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{n}{n^4 + n^2 + 1}$.
2. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \dfrac{a}{n^2 - n + 1} + \dfrac{b}{n^2 + n + 1}$.
3. En déduire la valeur de la somme : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$.

Exercice 4

Après avoir justifié son existence, calculer la somme : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$.

Exercice 5

Calculer la valeur $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ en utilisant celle de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.