Chapitre 26

Espérance et variance

On se place dans ce chapitre sur un espace probabilisé $\Big(\Omega, P\Big)$ avec $\boxed{\Omega \text{ fini}}$.

26.1 Espérance et propriétés

Définition (Espérance)

Soit X une VAR sur Ω avec Ω fini, de loi $\{(x_k, p_k),\ k \in \{1; ..; n\}\}$.
On appelle espérance mathématique (ou moyenne) de X le nombre noté $E(X)$ défini par

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$$

Remarque

$E(X)$ est une moyenne des valeurs de X pondérée par les probabilités correspondantes.

Test 671

On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 2 boules jaunes. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'a ce qu'il ne reste plus dans l'urne que deux couleurs différentes. On note X la var "nombre de tirage effectués".
Déterminer la loi de X. Calculer son espérance.

Th. ▷ **linéarité de l'espérance**

Soient X et Y deux VAR sur Ω avec Ω fini. Soient a, b deux nombres réels alors on a

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Test 672

Une urne contient 2 blanches et 8 noires. On tire successivement 2 boules. Soit B le nombre de blanches et N le nombre de noires obtenues.

1. On suppose que les tirages sont sans remise.
   (a) Déterminer la loi de B puis calculer $E(B)$.
   (b) Trouver une relation liant B et N.
   (c) En déduire la loi de N et son espérance.
2. Refaire la question précédente lorsque les tirages sont avec remise.

Test 673

Mme B. est professeur : quand elle n'a pas corrigé de copies la veille, elle en corrige le jour même ; et si elle a corrigé la veille, il y a une chance sur trois pour qu'elle n'en corrige pas. On relève son travail pendant 400 jours sachant qu'au jour 0 elle corrige des copies. On note X le nombre de jours où elle n'a pas corrigé de copies, et X_i la variable qui vaut 1 si elle n'a pas corrigé de copies le i-ème jour et 0 sinon.

1. Exprimer X en fonction des X_i
2. Soit $p_i = P(X_i = 1)$. Montrer la relation $p_i = -\dfrac{1}{3}p_{i-1} + \dfrac{1}{3}$.
3. En déduire la loi des X_i puis calculer $E(X)$.

Définition (VAR centrée)
Soit X une VAR sur Ω avec Ω fini.

1. *Dire que X est centrée signifie que $E(X) = 0$*
2. *La variable $X - E(X)$ est appelée VAR centrée associée à X*

26.2 Moments d'une VAR finie

Définition (Moment d'ordre r)
Soit X une VAR sur Ω avec Ω fini.
Soit r un entier naturel.
On appelle moment d'ordre r de X le nombre :

$$m_r(X) = E\left(X^r\right)$$

Définition (Variance)
Soit X une VAR sur Ω avec Ω fini.
On appelle variance de X le nombre :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

(Moyenne quadratique des écarts à la moyenne)

Th. ▷ **Calcul de la variance**

Soit X une VAR sur Ω avec Ω fini.

1. Formule de Huygens[1] : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
2. Soient a et b deux nombres réels, on a $V(aX + b) = a^2V(X)$.

Test 674

On lance n fois consécutives une pièce. La probabilité d'obtenir "pile" est p et celle d'obtenir "face" est $q = 1 - p$.
Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on dit que le $k^{ième}$ lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k-1)^{ième}$ lancer.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

1. Donner la loi de X_2.
2. Donner la loi de X_3.
3. Vérifier que $E(X_3) = 4pq$ et que $V(X_3) = 2pq(3 - 8pq)$.

1. Christiaan Huygens né le 14 avril 1629 à La Haye et mort le 8 juillet 1695, est un mathématicien, astronome et physicien néerlandais. Il est considéré comme un alter ego de Galilée, notamment pour sa découverte de Titan qu'il décrit dans Le Système de Saturne (1659) où il fait une première description exhaustive du Système solaire à six planètes et à six lunes, avec une précision alors inégalée. Il construit également la première horloge à pendule, qui améliore la précision des horloges existantes de 15 minutes à 15 secondes par jour (1656). Huygens a eu un rôle fondamental dans le développement des techniques de sommation et d'intégration nécessaires à la découverte de l'isochronisme de la cycloïde. En sciences physiques, il est notoire pour la formulation de la théorie ondulatoire de la lumière et le calcul de la force centrifuge.

Définition (Ecart-Type)
Soit X une VAR sur Ω avec Ω fini.
On appelle écart-type de X le nombre :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Définition (VAR réduite)
Soit X une VAR sur Ω avec Ω fini.

1. *Dire que X est réduite signifie que $\sigma(X) = 1$*
2. *Si $\sigma(X) \neq 0$ alors la VAR $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée la VAR centrée réduite associée à X.*

Exemple : Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires.
On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à obtenir la première boule blanche. Soit B le nombre de tirages nécessaires.
Expliciter la loi de B, son espérance et sa variance.

La première boule blanche peut être obtenue au tirage n° 1,2,3,4 ou 5 mais pas au tirage 6 car cela impliquerait que les 5 boules précédentes sont noires, ce qui n'est pas possible donc $B(\Omega) = [\![1, 5]\!]$.
Pour calculer les probabilités correspondantes, on introduit les évènements B_i : " piocher une boule blanche au i-ième tirage "

$$\begin{aligned}
P(B=1) &= P(B_1) = \frac{2}{6}, \\
P(B=2) &= P(\overline{B_1} \cap B_2) = P(\overline{B_1}) P_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \\
P(B=3) &= P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3) = P(\overline{B_1}) P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) P_{\overline{B_1} \cap \overline{B_2}}(B_3) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{5} \\
P(B=4) &= P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap B_4) = P(\overline{B_1}) P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) P_{\overline{B_1} \cap \overline{B_2}}(\overline{B_3}) P_{\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}}(B_4) \\
&= \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{15} \\
P(B=5) &= P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap B_5) \\
&= P(\overline{B_1}) P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) P_{\overline{B_1} \cap \overline{B_2}}(\overline{B_3}) P_{\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}}(\overline{B_4}) P_{\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4}}(B_5) \\
&= \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(B) &= 1 \times \frac{2}{6} + 2 \times \frac{4}{15} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{2}{15} + 5 \times \frac{1}{15} = \frac{7}{3} \\
E(B^2) &= 1^2 \times \frac{2}{6} + 2^2 \times \frac{4}{15} + 3^2 \times \frac{1}{5} + 4^2 \times \frac{2}{15} + 5^2 \times \frac{1}{15} = 7 \\
V(B) &= E(B^2) - [E(B)]^2 = \frac{14}{9}
\end{aligned}$$

26.3 Inégalités avec $E(X)$ et $V(X)$.

Proposition (Positivité de l'espérance)
Soit X une VAR sur Ω avec Ω fini.
Si X est positive alors

1. $E(X) \geq 0$.
2. $E(X) = 0$ *si et seulement si* $P(X = 0) = 1$.

Proposition (Croissance de l'espérance)
Soient X et Y deux VAR sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ avec Ω fini.

$$X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$$

Th. ▷ **Inégalité de Markov**[2]

Soit X une VAR sur Ω, avec Ω fini, X à valeurs positives. Alors $\forall a > 0$,

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Th. ▷ **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** [3]

Soit X une VAR sur Ω avec Ω fini.
Alors $\forall a > 0$, on a

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

26.4 VAR $f(X)$

Th. ▷ **Théorème de Transfert**

Soit X une VAR sur Ω avec Ω fini, et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ alors,

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x)$$

Proposition (Espérance)
Soient X, Y deux var sur Ω et g une fonction de deux variables définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
Soit $Z = g(X, Y)$ une var dépendant uniquement de X et Y. Alors on a

$$E(Z) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} g(x, y) P((X = x) \cap (Y = y))$$

Test 675

Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes et de même loi, avec :
$P(X_i = 0) = \frac{1}{6}$, $P(X_i = 1) = \frac{5}{6}$.
Soit $S = X_1 + X_2$, $\quad P = X_1 X_2$.

1. Donner la loi du couple (S, P) puis celles de S et P.
2. S et P sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $E(S)$, $E(P)$, $V(S)$, $V(P)$.

26.5 Espérance de lois particulières

Proposition (Espérance et Variance)
Si $X \sim U_{[\![1;n]\!]}$ alors

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Proposition (Espérance et Variance)
Si $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ alors

$$E(X) = p \text{ et } V(X) = p(1 - p)$$

Proposition (Espérance et Variance)
Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ alors

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1 - p)$$

2. Andreï Markov, mathématicien russe, 1856-1922, dont le directeur de Thèse est Tchebychev ; il a travaillé sur les fractions continues, les formes quadratiques et formalisé les chaînes de Markov

3. Irénée-Jules Bienaymé, mathématicien français, 1796-1878, membre fondateur de la Société mathématique de France, il généralise la méthodes des moindres carrés de Laplace, et contribue au développement de la statistique. Pafnouti Tchebychev, mathématicien russe, 1821-1894 ; il consolida les résultats en théorie des nombres de Gauß et Legendre et en probabilités de Bernoulli, De Moivre et Poisson.

Test 676

Un test consiste à répondre à 5 questions. Pour chaque question 3 réponses sont proposées dont une seule est juste. Un candidat répond au hasard. Chaque réponse juste rapporte 4 points ; chaque réponse fausse coûte 2 points.
Soient B le nombre de réponse bonnes, S la somme des points marqués par le candidat et $X = max(0; S)$.
Quelle est la loi suivie par B ? Etablir la loi de S. Etablir celle de X et calculer $E(X)$.

Test 677

Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement 5 boules avec remise.
S'il tire une boule blanche, il gagne 2 points, sinon il en perd 3.
Soit X le nombre de boules blanches et Y le nombre de points obtenus.

1. Déterminer la loi de X, puis $E(X)$ et $V(X)$. Exprimer Y en fonction de X. En déduire la loi de Y, puis $E(Y)$ et $V(Y)$.
2. Déterminer la loi de X, puis $E(X)$ si l'on suppose que le jeu est sans remise.

Test 678

1. On pose 20 questions à un candidat. Pour chaque question, k réponses sont proposées dont une seule est la bonne. Le candidat choisit au hasard une des réponses. On lui attribue un point par bonne réponse.
   Soit X_1 le nombre de points obtenus. Déterminez la loi de X_1.
2. Déterminez k pour que le candidat obtienne en moyenne une note de 5 sur 20.

26.6 Indépendance

Th. ▷ **Calcul de l'espérance et de la variance**

Soient X et Y deux var finies sur Ω indépendantes alors,

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) \text{ et } V(X-Y) = V(X) + V(Y)$$

Remarque

Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.
La réciproque est fausse.
Par contre si $E(XY) \neq E(X)E(Y)$ alors X et Y ne sont pas indépendantes.

Test 679

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de VAR de Bernoulli de paramètre p, indépendantes.
Soit $Y_i = X_i X_{i+1}$

1. Quelle est la loi de Y_i ?
2. Soit, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Calculer $E(S_n)$.

26.7 Covariance

Définition (Covariance)
Soient X et Y deux VAR discrètes finies. On appelle covariance de X et de Y le nombre réel :

$$cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Th. ▷ **Covariance**

Soient X et Y deux VAR discrètes finies.

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

C'est ce théorème qu'on utilisera le plus souvent pour calculer la covariance.

Test 680

La covariance définit-elle un produit scalaire sur l'ensemble des variables aléatoires d'un espace probabilisé ?

► $cov(Y, X) = cov(X, Y)$ et on a aussi $cov(X, X) = V(X)$.

Corollaire
Si X et Y sont indépendantes alors $cov(X, Y) = 0$.

Attention

ce n'est pas parce que $cov(X, Y) = 0$ que X et Y sont nécessairement indépendantes. Par contre si $cov(X, Y) \neq 0$, on peut affirmer que X et Y ne sont pas indépendantes.

Test 681

Soit X une VAR discrète dont la loi est donnée par :

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

On considère la variable $Y = X^2$.

1. Déterminer la loi de Y ainsi que celle du couple (X, Y).
2. X et Y sont-elle indépendantes ?
3. Calculer $\text{cov}(X, Y)$ et faire une remarque sur ce résultat.

Définition (**Variables non corrélées**)
Si X et Y sont deux variables aléatoires telles que $cov(X, Y) = 0$, on dit que les variables sont non corrélées.

► Deux VAR indépendantes sont non corrélées mais la réciproque est en générale fausse.

Th. ▷ **Variance d'une somme**

- $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X, Y)$
- Si X et Y sont indépendantes $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

26.8 Généralisation à n variables

Th. ▷ **Espérance d'une somme**

Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des VAR discrètes finies sur un même espace probabilisé.

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

Th. ▷ **Variance d'une somme**

Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des VAR discrètes finies sur un même espace probabilisé.

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} cov(X_i, X_j)$$

Si de plus $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, on a

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

26.9 Exercices

Exercice 1

On dispose de deux urnes U_1 et U_2, de six boules numérotées de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré. Initialement, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1 et 2, l'urne U_2 contient les boules numérotées $3, 4, 5$ et 6.
On appelle échange l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 après n échanges successifs.

1. Les cinq premiers lancers du dé donnent : $1, 3, 2, 3, 5$.
   Quel est le contenu de U_1 à l'issue du cinquième échange ?
2. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer son espérance $E(X_1)$.
3. Déterminer la loi de X_2.
4. Quelles sont les valeurs possibles de X_n ?
5. Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on a

$$P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{6}P(X_n = 1) \text{ et } P(X_{n+1} = 6) = \frac{1}{6}P(X_n = 5)$$
$$\forall k \in \{1, .., 5\},\ P(X_{n+1} = k) = \frac{7-k}{6}P(X_n = k-1) + \frac{k+1}{6}P(X_n = k+1)$$

Exercice 2

Un service après-vente dispose d'équipes de dépannage qui interviennent auprès de la clientèle sur appel téléphonique.
Les appels se produisent de façon indépendante, et la probabilité qu'un retard se produise dans le dépannage à la suite d'un appel est $p = \frac{1}{4}$.

1. Un même client a appelé le service à 8 dates différentes. Soit X le nombre de retards que ce client a subi. Définir la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$. Calculer $V(X)$.
2. On considère un ensemble de 8 clients différents. 2 d'entre eux sont mécontents parce qu'ils ont subi un retard. On contacte 4 clients parmi les 8. Soit M le nombre de clients mécontents parmi les 4 contactés. Déterminer la loi de M. Calculer $E(M)$.

Exercice 3

Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.
On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée ($c \geqslant 1$).
On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).
On considère les variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ définies par $X_i = 1$ si on obtient une boule blanche au $i^{ème}$ tirage et $X_i = 0$ sinon.
On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p par : $Z_p = X_1 + \cdots + X_p$.

1. Donner la loi de X_1 ainsi que $E(X_1)$.
2. Déterminer la loi de X_2 puis $E(X_2)$.
3. Que représente la variable Z_p ? Déterminer $Z_p(\Omega)$ ainsi que la loi de Z_2.
4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, déterminer très soigneusement $P_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
5. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $P(X_{p+1} = 1) = \dfrac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}$
6. En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ (par récurrence en posant $(\mathcal{P}_p)$: $X_1, .., X_p$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$)

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire binomiale de taille n et de paramètre $p \in]0,1[$.
Calculer l'espérance de la variable $Y = \dfrac{1}{X+1}$.

Exercice 5

Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire simultanément n boules dans celle-ci et on note X le nombre de boules rouges obtenues lors de ce tirage.

1. Quelle est la loi de X ?
2. On considère dans cette question une urne contenant n blanches, $n-1$ rouges et dans laquelle on effectue $n-1$ tirages simultanés. On note Y le nombre de boules rouges obtenues. Quelle est la loi de Y ?
3. En remarquant que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} P(Y=j) = 1$, calculer l'espérance de X.

Exercice 6

Soit X une VAR à valeur dans $[\![0,n]\!]$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant $P(X=k) = a\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.
Calculer l'espérance de X.

Exercice 7

Dans une urne contenant n boules blanches et n boules rouges, on prélève successivement et sans remise les boules. On note X le nombre de tirages juste nécessaire à l'obtention de toutes les boules rouges.
a) Déterminer la loi de X.
b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$
c) Calculer l'espérance de X.

Exercice 8

Un joueur lance une pièce équilibrée autant de fois que nécessaire. On note X_N la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents. Par exemple , si les 9 premiers lancers ont donné successivement Pile, Pile, Face, Pile, Face, Face, Face, Pile, Pile alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (quatre changements, aux $3^{ième}$, $4^{ième}$, $5^{ième}$ et $8^{ième}$ lancers).

1. Justifier que $X_N(\Omega) = \{0, ..., N-1\}$.
2. Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance.
3. Déterminer la loi de X_3.
4. Montrer que $P(X_N = 0) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{N-1}$
   et $P(X_N = 1) = 2(N-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{N}$.
5. Justifier que pour tout entier k de $\{0, ..., N-1\}$, $P_{(X_N=k)}(X_{N+1} = k) = \dfrac{1}{2}$.
6. En déduire que pour tout entier k de $\{0, ..., N-1\}$, $P(X_{N+1} - X_N = 0 \cap X_N = k) = \dfrac{1}{2}P(X_N = k)$.
7. En sommant cette relation de $k = 0$ à $N-1$, montrer que $P(X_{N+1} - X_N = 0) = \dfrac{1}{2}$.

8. Montrer que la variable $X_{N+1} - X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
   En déduire la relation $E(X_{N+1}) = \frac{1}{2} + E(X_N)$, puis donner $E(X_N)$ en fonction de N.
9. Montrer que les variables $X_{N+1} - X_N$ et X_N sont indépendantes.
10. En déduire par récurrence sur N que X_N suit une loi binomiale $B(N-1, \frac{1}{2})$.
    En déduire la variance $V(X_N)$.

26.10 Exercices Complémentaires

Exercice 1

Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire successivement 2 boules. Le tirage se fait avec remise. On considère les variables aléatoires suivantes :

- P la VAR égale au numéro de la première boule tirée.
- D la VAR égale au numéro de la seconde boule tirée.

1. Donner les lois respectives de P et D.
2. Soit X_1 la VAR égale au plus petit numéro tiré. Autrement dit
$$X_1 = min(P, D)$$
Calculer $P(X_1 = 4)$. Etablir la loi de X_1. Calculer $E(X_1)$.
3. Soit X_2 la VAR égale au plus grand numéro tiré. Autrement dit
$$X_2 = max(P, D)$$
Calculer $P(X_2 = 1)$. Etablir la loi de X_2. Calculer $E(X_2)$.

Exercice 2

On dispose d'un paquet de 6 cartes. Ces cartes sont numérotées de 1 à 6.
Un joueur A propose à un joueur B le jeu suivant, moyennant une mise de 1 euro que lui verse B à chaque partie : B tire une carte au hasard, montre le nombre β qu'elle porte et remet la carte dans le paquet. Puis A tire une carte au hasard ; quand celle-ci porte le nombre α :

- Si $\alpha < \beta$, alors A donne à B la somme $(\beta - \alpha)$ euros : B a donc gagné $(\beta - \alpha - 1)$ euros.
- Si $\alpha > \beta$, alors B donne à A la somme de 1 euro : B a donc perdu 2 euros.
- Si $\alpha = \beta$, alors B a simplement perdu 1 euro, le montant de la mise.

1. Dresser le tableau à double entrée donnant les gains (positifs ou négatifs) de B suivant les différentes valeurs du couple (α, β).
2. Soit X la V.A. représentant les gains de B. Donner la loi de X.
3. Calculer $E(X)$. Le jeu avantage-t-il l'un des joueurs ?
4. Calculer la variance de X.

Exercice 3

Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement n boules avec remise. S'il tire une boule blanche, il gagne 2 points, sinon il en perd 3.
Soit X_n le nombre de boules blanches et Y_n le nombre de points obtenus.
Déterminer la loi de X_n. Calculer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.
Exprimer Y_n en fonction de X_n. En déduire $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.