

Chapitre 24

Espaces euclidiens

Dans toute cette partie, le corps de base est $\mathbb{R}$.

24.1 Produit scalaire, norme associée

24.1.1 Produit scalaire

Un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E est

- une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall a \in E : \begin{cases} \varphi(\cdot, a) : u \mapsto \varphi(u, a) \\ \varphi(a, \cdot) : u \mapsto \varphi(a, u) \end{cases} \text{ sont linéaires}$$

- symétrique $\forall u, v \in E, \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$

- définie positive $\forall u \in E, \varphi(u, u) \geq 0$ et $(\varphi(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0)$

$$\text{Notations classiques : } \varphi(u, v) = \left(\begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right) = \langle u, v \rangle = \boxed{\vec{u} \cdot \vec{v}} \quad (\text{en géométrie})$$

Un espace préhilbertien est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire¹.

Important:

Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.



Exemples :

- le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$:

$$\left(\begin{array}{c} (x, y) \\ (x', y') \end{array} \right) = x x' + y y'$$

- le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$:

$$\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

- le produit scalaire canonique sur $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ avec I borné :

$$\left(\begin{array}{c} f \\ g \end{array} \right) = \int_I f g$$

1. HILBERT généralise au début du 20ème siècle la notion de produit scalaire à des espaces de suites. On doit cependant en 1927 à VON NEUMANN l'axiomatisation de ces espaces dits préhilbertiens et hilbertiens (préhilbertiens complet).

Remarques :

- Un même espace peut être muni de plusieurs produits scalaires.
(Dans ce cas, il faut adapter les notations.)

- Ces propriétés permettent de "développer" et "factoriser" des expressions qui comportent des produits scalaires (*sans simplifier*)

- φ étant symétrique, il suffit de vérifier une seule linéarité :

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(\cdot, a) \text{ linéaire} \\ \varphi \text{ symétrique} \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(a, \cdot) \text{ linéaire}$$

Test 633

Soit un espace euclidien E . Soit i, j et k trois vecteurs de E et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Développer le carré scalaire $\left(x i + y j + z k \mid x i + y j + z k \right)$.

Test 634

Transformer l'égalité $\mathcal{E} : \left(u + a \mid b \right) = \left(u + b \mid a \right)$ en un produit scalaire égal à 0.

Que peut-on en déduire ?

Que peut-on dire si $\mathcal{E}$ est vérifiée pour tout vecteur u ?

Test 635

Soient a et b des réels tels que $a < b$. Montrer que sur $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$, l'application qui à f et g associe $\int_a^b f(t) g(t) dt$ est un produit scalaire.

Expression analytique : si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E

- L'expression analytique du produit scalaire²

$$\begin{aligned} \left(u \mid u' \right) &= \sum_{(i,j) \in [1,n]} x_i x'_j \left(e_i \mid e_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i x'_i \underbrace{\left(e_i \mid e_i \right)}_{=\alpha_{i,i} > 0} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i x'_j + x_j x'_i) \underbrace{\left(e_i \mid e_j \right)}_{=\alpha_{i,j}} \end{aligned}$$

- Notation matricielle : avec $\alpha_{i,j} = \left(e_i \mid e_j \right)$

$$\left(u \mid u' \right) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Conditions nécessaires : la matrice est symétrique
les termes de la diagonale sont strictement positifs

- Attention : la réciproque est fausse...

Toute expression de la forme $\sum_{i=1}^n x_i x'_i \underbrace{\alpha_{i,i}}_{>0} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i x'_j + x_j x'_i) \alpha_{i,j}$

est celle d'une forme bilinéaire symétrique,

mais pas forcément positive non dégénérée.

Méthode

Face à une telle expression, il faut étudier la quantité $\varphi(u, u)$:

$\varphi(u, u') = xx' + 8yy' + 10zz' + 2(xy' + x'y) - (xz' + x'z) - 8(yz' + y'z)$
ne définit pas un produit scalaire :

2. **Attention :** l'expression $\sum_{i=1}^n x_i x'_i$ n'est valable que relativement à une base orthonormée.

- la forme bilinéaire symétrique est bien positive

$$\begin{aligned}\varphi(u, u) &= x^2 + 8y^2 + 10z^2 + 4xy - 2xz - 16yz \\ &= (x + 2y - z)^2 + (2y - 3z)^2 \geq 0\end{aligned}$$

- mais est dégénérée puisque $u = (4, -3, -2) \neq 0$ vérifie $\varphi(u, u) = 0$.

Test 636

Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur les réels a, b, c et d pour que $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ soit la matrice d'un produit scalaire.

Test 637

Justifier que φ ci-dessous définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$

$$\varphi(u, u') = xx' + 3yy' + 7zz' - (xy' + x'y) - 2(xz' + x'z) + 4(yz' + y'z)$$

Pour "définie positive", on transformera $\phi(u, u)$ en une somme de carrés : dans une première identité remarquable on récupère tous les termes contenant x , on rééquilibre puis dans une seconde identité remarquable, les termes restants contenant y , on rééquilibre, et dans la troisième il ne reste qu'un terme en z^2 .

Th. $\triangleright$ Inégalité de Cauchy³-Schwarz⁴

Si $\left(\begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right)$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E :

$$\forall u, v \in E, \quad \left(\begin{array}{c} u \\ | \\ v \end{array} \right)^2 \leq \left(\begin{array}{c} u \\ | \\ u \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} v \\ | \\ v \end{array} \right)$$

On a l'égalité si et seulement si la famille (u, v) est liée.


Test 638

Que devient l'inégalité de Cauchy-Schwarz lorsque $E = C^0(I, \mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique ?

24.1.2 Norme euclidienne

Une norme sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E est une application $\eta : E \rightarrow \mathbb{R}$

qui vérifie • $\forall u \in E, \quad \eta(u) \geq 0$

• $\forall u \in E, \quad \eta(u) = 0 \Rightarrow u = 0$

• $\forall (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E, \quad \eta(\lambda u) = |\lambda| \eta(u)$

• $\forall u, v \in E, \quad \eta(u + v) \leq \eta(u) + \eta(v) \quad (\text{inégalité triangulaire})$

Notation classique :

$$\eta(u) = \left\| u \right\|$$

Le vecteur u est normé (ou unitaire) ssi $\left\| u \right\| = 1$

• l'inégalité triangulaire inversée : $\left| \eta(u) - \eta(v) \right| \leq \eta(u - v)$

Exemples

• $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ (norme euclidienne)

• $\left\| (x, y) \right\|_1 = |x| + |y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$

• $\left\| (x, y) \right\|_\infty = \max(|x|, |y|)$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$

3. Augustin-Louis CAUCHY (1789-1857) mathématicien Français.

4. Hermann Amandus SCHWARZ (1843-1921) mathématicien Allemand

Test 639

Montrer l'existence de deux réels strictement positifs λ et μ tels que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda \left\| (x, y) \right\|_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \mu \left\| (x, y) \right\|_1$$

(on dit que les deux normes sont équivalentes.)

De même, montrer les deux autres équivalences.

On pourra utiliser les propriétés suivantes valables pour tous réels x et y :

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } |x| \leq \max(|x|, |y|) \text{ et } |x| \leq |x| + |y|$$

Th. ▷ Norme associée à un produit scalaire



Si $\left(\left| \right| \right)$ est un produit scalaire sur E , alors

l'application $\left\| \right\| : u \mapsto \sqrt{\left(u \left| u \right. \right)}$ est une norme sur E

C'est la **norme euclidienne** associée à $\left(\left| \right| \right)$.

Remarques :

- L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit alors $\left| \left(u \left| v \right. \right) \right| \leq \left\| u \right\| \left\| v \right\|$
- L'inégalité triangulaire est aussi appelée "inégalité de **Minkowski**"⁵
- Toute norme n'est pas euclidienne, c'est-à-dire que certaines normes ne sont pas associées à un produit scalaire
(voir TEST "norme non euclidienne" page 372)

Lien entre produit scalaire et norme associée :

si $\left\| \right\|$ est la norme associée au produit scalaire $\left(\left| \right| \right)$, alors $\forall u, v \in E$

- $\left\| u \right\|^2 = \left(u \left| u \right. \right)$

- Identités de **polarisation** :

$$\begin{aligned} \left(u \left| v \right. \right) &= \frac{1}{2} \left(\left\| u + v \right\|^2 - \left\| u \right\|^2 - \left\| v \right\|^2 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\left\| u - v \right\|^2 - \left\| u \right\|^2 - \left\| v \right\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\left\| u + v \right\|^2 - \left\| u - v \right\|^2 \right) \end{aligned}$$

- l'**égalité du parallélogramme** : $\left\| u + v \right\|^2 + \left\| u - v \right\|^2 = 2 \left(\left\| u \right\|^2 + \left\| v \right\|^2 \right)$

Test 640

Pourquoi la norme définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\left\| (x, y) \right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est-elle appelée "norme euclidienne" ?

Test 641

Norme non euclidienne :

Montrer que $N : (x, y) \mapsto N(x, y) = |x| + |y|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Utiliser $N(2, 1)$, $N(2, -1)$, $N(4, 0)$ et $N(0, 2)$ pour montrer que cette norme n'est pas euclidienne (on contredira l'identité du parallélogramme).

5. Hermann MINKOWSKI (1864-1909) mathématicien Allemand né en Lituanie.

24.2 Orthogonalité

24.2.1 Définitions

Soit E un espace muni d'un produit scalaire $\left(\begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right)$.

vecteurs orthogonaux : les vecteurs u et v sont orthogonaux

$$\text{ssi} \quad \left(u \mid v \right) = 0 \quad \text{On note} \quad \boxed{u \perp v}$$

parties orthogonales : les sous-ensembles A et B sont orthogonaux

$$\text{ssi} \quad \forall (u, v) \in A \times B, \quad u \perp v \quad \text{On note} \quad \boxed{A \perp B}$$

vecteur orthogonal à une partie : $u \in E$ est orthogonal à $A \subset E$

$$\text{ssi} \quad (\forall a, a \in A \Rightarrow u \perp a) \Leftrightarrow (\{u\} \perp A) \quad \text{On note} \quad \boxed{u \perp A}$$

Orthogonal d'une partie : l'orthogonal du sous-ensemble $A \subset E$

$$\text{est l'ensemble} \quad \left\{ u \in E \mid u \perp A \right\} \quad \text{noté} \quad \boxed{A^\perp} \quad \text{ou} \quad \boxed{A^\circ}$$

remarques

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } u \perp A &\Leftrightarrow u \in A^\perp \\ A \perp B &\Leftrightarrow A \subset B^\perp \Leftrightarrow B \subset A^\perp \\ \text{On peut simplifier la notation } \left\{ u \right\}^\perp &\text{ en } u^\perp \end{aligned}$$

Test 642 Quel est l'orthogonal de la partie vide? de $\{0\}$? de E ?

Test 643 Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, trouver tous les vecteurs orthogonaux à $(1, 2, 3)$.

Test 644 Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, trouver a pour que $A \perp B$:

$$A = \left\{ (1, 2, 3, a); (a + 2, 3, a - 3, 1) \right\} \quad B = \left\{ (1, -1, -1, a); (4a, 1, 0, -3) \right\}$$

Test 645 L'espace $C^0([0, 1])$ est muni du produit scalaire canonique.

- Les fonctions $x \mapsto x + 1$ et $x \mapsto 9x - 5$ sont-elles orthogonales?
- Trouver un polynôme normalisé de degré 1 orthogonal à la fonction exponentielle

24.2.2 Orthogonal d'une partie

Pour toutes parties $A, B \in \mathcal{P}(E)$ nous avons :

- $A^\perp$ est un **SEV** de E
- $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$
- $A^\perp = \left(\text{Vect } A \right)^\perp$
- $A \subset (A^\perp)^\perp$
- Si $0_E \in A$, alors $A \cap A^\perp = \left\{ \vec{0} \right\}$
- $\left\{ \vec{0} \right\}^\perp = E$ et $E^\perp = \left\{ \vec{0} \right\}$



Test 646

Montrer par un contre-exemple que la réciproque $B^\perp \subset A^\perp \Rightarrow A \subset B$ est fausse. On pourra remarquer que A et B ne sont pas forcément des SEV alors que $B^\perp$ et $A^\perp$ le sont.

Cas des sous-espaces vectoriels : si A et B sont deux **SEV** de E

- bien sûr, les propriétés précédentes restent valables.

Attention

Même si A est un sous-espace vectoriel de E :

- $A \cap A^\perp = \left\{ \vec{0} \right\} \not\Rightarrow A \oplus A^\perp = E$ (sauf si E est euclidien)
- $A \subset A^{\perp\perp}$ reste une simple inclusion (sauf si E euclidien)

détermination de l'orthogonalité par les bases

- Si A est engendré par $\mathcal{G}$, alors
- Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ engendrent A et B , alors

$$u \in A^\perp \Leftrightarrow u \in \mathcal{G}^\perp$$

$$A^\perp \Leftrightarrow \mathcal{G}^\perp \mathcal{H}$$

- $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$
- $A^\perp + B^\perp \subset (A \cap B)^\perp$ (inclusion seulement, sauf dans le cas euclidien)

Test 647

$\mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire $\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i X^i \mid \sum_{i \in \mathbb{N}} b_i X^i \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i b_i$.

Soit l'hyperplan $A = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0 \right\}$.

- Montrer que $\left(1 - X^k \right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une base de A .
- En déduire que $A^\perp = \left\{ 0 \right\}$. A-t-on $\mathbb{R}[X] = A \oplus A^\perp$? $A = A^{\perp\perp}$?

24.2.3 Familles orthogonales

$\left(\mid \right)$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel E , $\left\| \right\|$ est la norme associée.

La famille non vide $(e_i)_{i \in I}$ est

une **famille orthogonale** ssi $\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow e_i \perp e_j$

une **famille normée** ssi $\forall i \in I, \|e_i\| = 1$

une **famille orthonormée** ssi elle est orthogonale et normée.

Th. $\triangleright$ **Liberté des famille orthogonales**

Toute famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.

En particulier : • Toutes famille orthonormée est libre

- Si $\dim(E) = n$, toute famille orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

Relation de Pythagore⁶

- $u \perp v \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$
- Pour toute famille orthogonale finie $(e_1, \dots, e_p)$: $\left\| \sum_{k=1}^p e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^p \|e_k\|^2$ mais, pour $p > 2$, la réciproque est fausse.

6. PYTHAGORE de SAMOS (environ -569,-500) mathématicien et philosophe Grec.

Test 648

$\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire canonique.

On considère les vecteurs $u_1 = (2, 2)$, $u_2 = (0, 2)$ et $u_3 = (1, -1)$.

- Comparer $\|u_1 + u_2 + u_3\|^2$ et $\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \|u_3\|^2$.
- La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle orthogonale ?



24.3 Espaces Euclidiens

RAPPEL : un espace euclidien est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire.

Tous les résultats précédents s'appliquent.

*Ce paragraphe indique les propriétés supplémentaires
(dues à la dimension finie).*

24.3.1 Bases orthogonales

Th. $\triangleright$ Orthogonalisation de Gram⁷-Schmidt⁸

Pour toute famille $(e_1, \dots, e_p)$ libre de E ,

il existe une famille orthogonale $(f_1, \dots, f_p)$

telle que $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$

En remplaçant f_i par $\frac{1}{\|f_i\|} f_i$, on obtient une famille orthonormée.



Test 649

$\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire dont la matrice relativement à la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt à la base canonique pour obtenir une base orthonormale.

Conséquences :

- **Existence de bases orthonormales :**

dans tout espace euclidien, il existe au moins une base orthonormale.

plus précisément :

- **Complétion d'une famille orthonormale :**

dans un espace E euclidien de dimension n ,

toute famille orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ peut (si nécessaire)

se compléter en une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de E .

(théorème de la base orthonormale incomplète.)

Intérêt des bases orthonormales :

7. Jorgen Pedersen GRAM (1850-1916) mathématicien Danois.

8. Erhard SCHMIDT (1876-1959) né en Estonie, mort à Berlin.

• **Coordonnées :**

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E ,

tout vecteur $u \in E$ vérifie

$$u = \sum_{i=1}^n \left(u \mid e_i \right) e_i$$

• **Expression analytique :**

◦ relativement à une base orthonormale, $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $u' = \sum_{i=1}^n x'_i e_i$

$$\left(u \mid u' \right) = \sum_{i=1}^n x_i x'_i \quad \left\| u \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

et la notation matricielle $\left(u \mid u' \right) = U^T U'$

◦ Réciproquement, relativement à une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$,

l'expression $\sum_{i=1}^n x_i x'_i$ définit un produit scalaire.

Pour ce produit scalaire, $\mathcal{B}$ est orthonormale.

24.3.2 Supplémentaire orthogonal

Th. ▷ **Orthogonalité dans un espace euclidien**

Si F est un sous-espace vectoriel de E euclidien, alors

F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E

$$E = F \oplus F^\perp$$

$F^\perp$ est le **supplémentaire orthogonal de F** (parfois noté $E = F \oplus F^\perp$)

(Rappel : ceci est généralement faux en dimension infinie.)

Construction :

Pour déterminer le supplémentaire orthogonal de F ,
il suffit de • déterminer une **BON** de $F : (e_1, \dots, e_p)$

• la compléter en une **BON** de $E : (e_1, \dots, e_n)$

• alors $F^\perp = \text{Vect} \left(e_{p+1}, \dots, e_n \right)$

Conséquences : en dimension finie

$$A = B^\perp \Leftrightarrow B = A^\perp$$

$$\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$$

$$F = F^{\perp\perp}$$

$$F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$$

l'inclusion $F \subset F^{\perp\perp}$ devient égalité

même chose pour $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$

(Rappel : en toutes dimensions $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$)

Test 650

Soit H un hyperplan de E euclidien et $D = H^\perp$ son supplémentaire orthogonal. Montrer que, pour tout vecteur $u \neq 0$ de H on a $D \subset u^\perp$.

Test 651

Soit A et B deux SEV d'un espace euclidien E . On suppose que $\forall a \in A, a \in B^\perp$. A-t-on $A = B^\perp$? Démontrez-le ou exhibez un contre-exemple.

24.3.3 Hyperplans et formes linéaires

Rappels : H est un hyperplan de E ssi $\dim(H) = \dim(E) - 1$ (en dimension finie)
ssi H est supplémentaire d'une droite vectorielle
ssi H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Dans le cas d'un espace E euclidien, ceci peut se traduire par :

- H est un hyperplan de E euclidien ssi $\exists u \neq 0, H = u^\perp$
 - u est un vecteur **normal** à l'hyperplan
 - on retrouve la forme d'une équation cartésienne de H
- L'espace dual E^* :
 - $\forall a \in E, \varphi : u \mapsto \left(u \mid a \right)$ est une forme linéaire ($\varphi \in E^*$)
 - réciproquement : $\forall \varphi \in E^*, \exists ! a \in E$ tel que $\forall u \in E, \varphi(u) = \left(a \mid u \right)$
 - ceci permet d'établir une bijection entre E et son dual E^*
 - on retrouve la forme de l'expression analytique d'une forme linéaire



Test 652

La bijection précédente entre E et son dual E^* est-elle un isomorphisme, autrement dit est-elle linéaire ?

24.3.4 Projections orthogonales

Soit F un sous-espace vectoriel de E euclidien.

La projection orthogonale sur F est la projection sur F de direction $F^\perp$

Noter que, pour une telle projection, il suffit d'en indiquer la base.

Th. Caractérisation des projecteurs orthogonaux

Soit E un espace euclidien et $p : E \rightarrow E$

$$p \text{ projecteur orthogonal} \Leftrightarrow \begin{cases} p \text{ est idempotente} \\ \forall u, v \in E, \left(p(u) \mid v \right) = \left(u \mid p(v) \right) \end{cases}$$

Remarque : il est inutile de supposer p linéaire.



Test 653

Soit p est un projecteur de E euclidien.

1. On suppose p orthogonal. Montrer en utilisant Pythagore que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$
2. On suppose que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$. Montrer que p est orthogonal.
 On pourra considérer A base et B direction du projecteur p . Pour tout $(u, v) \in A \times B$, on désire montrer que $(u|v) = 0$ et pour cela on posera $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x = u + \lambda v$.

Image par une projection orthogonale :

Si p est la projection orthogonale sur F ,

et $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F

$$\text{alors} \quad \forall u \in E, \quad p(u) = \sum_{i=1}^p \left(u \mid e_i \right) e_i$$



Ceci permet d'obtenir facilement l'expression analytique.

Test 654

Soit A un hyperplan de E et a un vecteur non nul normal à A . Montrer que la projection orthogonale sur A est définie par $p : u \mapsto u - \frac{\left(u \mid a \right)}{\|a\|^2} a$. Pour cela, on pourra prendre une BON de A et la compléter avec $\frac{a}{\|a\|}$.

Test 655

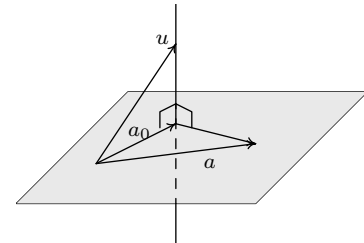
(i, j, k) est une base orthonormée de E .
Utiliser ce qui précède pour obtenir l'expression analytique de la projection orthogonale

- sur la droite D engendrée par $i + 2j + 3k$
- sur le plan P d'équation $x + 2y + 3z = 0$
- Comment vérifier la compatibilité de ces deux résultats ?

Distance à un sous-espace vectoriel :

- la distance de $u \in E$ au **SEV** A est $d(u, A) = \inf_{a \in A} d(u, a)$
- si a_0 est le projeté orthogonal de u sur A ,
alors $d(u, A) = d(u, a_0) = \|u - a_0\|$
- Si A est un hyperplan de E :

$$d(u, A) = \frac{\left| \left(u \mid \delta \right) \right|}{\|\delta\|} \quad \text{où } A = \delta^\perp$$

**24.3.5 Symétries orthogonales**

La symétrie orthogonale par rapport à F est

la symétrie par rapport à F de direction $F^\perp$

Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Les propriétés des projecteurs orthogonaux s'adaptent facilement aux symétries orthogonales. En particulier :

Th. ▷ Caractérisation des symétries orthogonales

Soit E un espace euclidien et $s : E \rightarrow E$

$$s \text{ symétrie orthogonale} \Leftrightarrow \begin{cases} s \text{ est involutive} \\ \forall u, v \in E, \left(s(u) \mid v \right) = \left(u \mid s(v) \right) \end{cases}$$

Remarque : il est inutile de supposer s linéaire.

Rappel :

si la symétrie s et la projection p ont même base et direction,
il est facile d'obtenir s à partir de p (et inversement)

puisque

$$s + \text{Id} = 2p$$



24.4 Exercices

Exercice 1

Les applications suivantes Φ définissent-elles des produits scalaires sur les espaces vectoriels E indiqués ? Justifiez votre réponse.

1. $E = \mathbb{R}^2$, $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1x_2 + y_1y_2$
2. $E = \mathbb{Q}^2$, $\Phi : \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2$
3. $E = \mathbb{R}^2$, $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1x_2$
4. $E = \mathbb{R}^2$, $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$
5. $E = \mathbb{R}^2$, $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1y_2 + y_1x_2$
6. $E = \mathbb{R}^3$, $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2$
7. $E = \mathbb{R}[X]$, $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ sont $n+1$ réels deux à deux distincts,

$$\Phi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}, (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(x_k)Q(x_k)$$

8. Idem que 7 avec $\mathbb{R}_n[X]$ au lieu de $\mathbb{R}[X]$.
9. ω est une fonction continue strictement positive sur un segment $[a; b]$, $E = \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$,

$$\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \int_a^b f g \omega$$

10. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$$

Exercice 2

Diverses applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Soient $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$.
2. Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[0; 1]$, telle que pour tout $t \in [0; 1]$, $f(t)g(t) \geq 1$. Montrer que

$$\left(\int_{[0;1]} f \right) \left(\int_{[0;1]} g \right) \geq 1$$

Le résultat subsiste-t-il si l'on ne suppose plus f et g positives (mais à valeurs réelles) ?

3. Déterminer $\sup_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{(\sum_{k=1}^n x_k)^2}{\sum_{k=1}^n x_k^2}$

Exercice 3

Projection orthogonale et minimisation d'une distance Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E , et $a \in E$.

1. Pour x et $y \in E$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, établir :

$$\|a - x + \lambda y\|^2 = \|a - x\|^2 + 2\lambda(a - x | y) + \lambda^2 \|y\|^2$$

2. En déduire que, pour $x \in F$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) $\|a - x\| = \inf_{z \in F} \|a - z\|$
- (b) $a - x \in F^\perp$

3. Prouver qu'il existe une unique point $x \in F$ vérifiant les conditions précédentes, et que c'est la projection orthogonale de a sur F .
4. Application : déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 + at + b)^2 dt$.

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}^4$, muni de sa structure euclidienne canonique. Déterminer une base orthonormée de F avec :

1. $F = \text{Vect}(u, v)$, où $u = (1, 0, 3, 2)$ et $v = (-1, 1, 1, 1)$.
2. $F = \text{Vect}(u, v, w)$, où $u = (1, 1, 0, 1)$, $v = (1, 0, 1, 1)$ et $w = (0, 1, 1, 1)$.

Exercice 5

Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique, déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel F dans chacun des cas suivants :

1. $n = 3$, $F = \{x + y + z = 0\}$.
2. $n = 3$, $F = \{x - y = y + z = 0\}$.
3. $n = 4$, $F = \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (1, -1, 1, -1))$.

Exercice 6

Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ canonique, déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace vectoriel F dans chacun des cas suivants :

1. $n = 3$, $F = \{x + 2y + z = 0\}$.
2. $n = 3$, $F = \{x - 2y = 2y + z = 0\}$.
3. $n = 4$, $F = \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (1, -1, 1, -1))$.

Exercice 7**Polynômes orthogonaux**

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, n un entier naturel. Soit ω une fonction continue sur $[a; b]$, non nulle, à valeurs positives.

1. Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$, $(P, Q) \mapsto \int_a^b P(t)Q(t)\omega(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On munit désormais $\mathbb{R}_n[X]$ de ce produit scalaire, ce qui en fait un espace euclidien.
2. Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ tels qu'on ait les 3 conditions suivantes satisfaites :
 - (a) Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, P_k est de degré k .
 - (b) P_k est de coefficient dominant 1 (pour tout k).
 - (c) La famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 8

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, et p un projecteur de E . Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si pour tout $x \in E$, $\langle p(x) | x \rangle \geq 0$.

Exercice 9

Soit $(E, (\cdot, \cdot))$ un espace euclidien. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E , et u un endomorphisme de E , et $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Montrer que u vérifie $\forall (x, y) \in E^2$, $\left(\begin{array}{c} u(x) \\ y \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} x \\ u(y) \end{array} \right)$ si, et seulement si, M est une matrice symétrique.

Exercice 10

Soit E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\|u(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$.

1. Soit $a \in E$ tel que $u(a) = a$. Montrer que pour tout $x \in E$, on a $(a|x) = (a|u(x))$ (on pourra utiliser le fait que $\|u(a + tx)\| \leq \|a + tx\|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$).
2. Montrer que $E = \text{Ker}(u - \text{Id}_E) \oplus^\perp \text{Im}(u - \text{Id}_E)$.

24.5 Exercices Complémentaires

Exercice 1

- Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$ -ev des fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $(f, g) \in E^2$, on pose
 - $(f|g) := \int_0^1 (f'g + fg')$. Montrer que cela ne définit PAS un produit scalaire sur E .
 - $(f|g) := \int_0^1 (fg + f'g')$. Montrer que cela définit un produit scalaire sur E .
- Soit $E = \mathbb{R}^2$. Pour $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, avec $\vec{x} = (x_1, x_2)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2)$, on pose :
 - $(\vec{x}|\vec{y}) := x_1y_2 + x_2y_1$. Montrer que cela ne définit PAS un produit scalaire sur E .
 - $(\vec{x}|\vec{y}) := x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$. Montrer que cela ne définit PAS un produit scalaire sur E .
 - $(\vec{x}|\vec{y}) := x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + x_2y_2$. Montrer que cela définit un produit scalaire sur E .
- Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, le $\mathbb{R}$ -ev des polynômes de degré inférieur ou égal à deux, à coefficients réels. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose
 - $(P|Q) := P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$. Montrer que cela ne définit PAS un produit scalaire sur E .
 - $(P|Q) := P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$. Montrer que cela définit un produit scalaire sur E .

Exercice 2

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x, y) = \sqrt{x^2 + 2xy + 3y^2}$.

En remarquant que $x^2 + 2xy + 3y^2 = (x + y)^2 + 2y^2$, montrer que N définit une norme sur $\mathbb{R}^2$, puis que c'est une norme euclidienne (penser aux identités de polarisation).

Exercice 3

Soit φ , une fonction continue et strictement positive sur $]a, b[$ ($\varphi > 0$ sur $]a, b[$). On définit, sur l'espace $E = C([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions définies et continues sur $[a, b]$:

$$(f|g) = \int_a^b \varphi(t)f(t)g(t)dt.$$

- Justifier que cela définit un produit scalaire sur E .
- Vérifier que cette propriété subsiste en supposant juste $\varphi > 0$ sur $]a, b[$.

Exercice 4

On note $E = \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R})$, l'ev des fonctions continues et 2π -périodiques sur $\mathbb{R}$.

Pour f, g dans E , on pose $(f|g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$.

- Vérifier que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur E .
- Quelques rappels : compléter les formules suivantes

$$\cos(a)\cos(b) = \dots \quad \sin(a)\sin(b) = \dots \quad \cos(a)\sin(b) = \dots$$
- Justifier que, pour $f, g \in E$, on a $(f|g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$.
- Pour $k \in \mathbb{Z}$, on définit les fonctions f_k et g_k par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = \cos(kx)$ et $g_k(x) = \sin(kx)$. Vérifier que la famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est orthonormale ($n \in \mathbb{N}^*$).
- Calculer la norme $\|f_0\|$. Que peut-on dire de la famille $(f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$?

Exercice 5

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On définit sur $E : (P|Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(+1)Q(+1)$.

1. Vérifier que E est un espace euclidien.
2. Vérifier (pour le plaisir) que $X \perp (X^2 - 1)$, $(5X - 2) \perp (X^2 + X + 1)$.
3. On pose $F = \text{vect}(X^2 + 1)$: déterminer $F^\perp$.
4. Par le procédé de Schmidt, déterminer une base orthonormée de E associée à la base canonique.
5. Déterminer $G^\perp$ si $G = \mathbb{R}_1[X]$ puis la distance de X^2 à G .

Exercice 6

Orthonormaliser pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$ la famille (a_1, a_2, a_3)

1. avec $a_1 = (0, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0)$.
2. avec $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1)$.
3. avec $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 0, 0)$.
4. avec $a_1 = (1, -2, 2)$, $a_2 = (-1, 0, -1)$, $a_3 = (5, -3, 7)$.

Exercice 7

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{B}$ une base de E . Existe-t-il un produit scalaire sur E rendant la base $\mathcal{B}$ orthonormée? S'il existe, un tel produit scalaire est-il unique?

Exercice 8

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser, à l'aide du procédé de Gram-Schmidt, la base suivant : $(\vec{a} = (1, 1, 1, 1), \vec{b} = (0, 1, 1, 1), \vec{c} = (0, 0, 1, 1), \vec{d} = (0, 0, 0, 1))$.

On considère l'hyperplan H d'équation $y - z = 0$: déterminer le projeté orthogonal sur H du vecteur $\vec{v} = (1, 2, 3, 4)$, et en déduire la distance de $\vec{v}$ à cet hyperplan.

Exercice 9

Soit, dans $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, le sev

$$F = \{(x, y, z) \in E \mid x + 2y - z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\}$$

1. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F (dans la base canonique).
2. Calculer la distance de $(1, 1, 1)$ à F .

Exercice 10

On munit l'ev $E = \mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \sum_{i=0}^3 p_i q_i$ lorsque $P = \sum_{i=0}^3 p_i X^i$ et $Q =$

$$\sum_{i=0}^3 q_i X^i.$$

1. Soit $H = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$: justifier que c'est un hyperplan de E , et en trouver une base.
2. Déterminer $H^\perp$.
3. Trouver le projeté orthogonal de X^3 sur H , en déduire la distance de X^3 à H .

