Chapitre 22

Variables aléatoires discrètes

On se place dans ce chapitre sur un espace probabilisé $\left(\Omega, P\right)$ avec $\boxed{\Omega \text{ fini}}$.

22.1 Définition

Définition (Variable aléatoire sur un univers fini)
Soit un espace probabilisé $\left(\Omega, P\right)$ avec Ω fini. Une variable aléatoire réelle X (VAR) est une application de Ω dans un ensemble E.

Remarque

La définition est simpliste dû au fait que l'on considère l'espace probabilisé des événements élémentaires sur un univers fini. Le cas général est plus complexe :

Définition (Variable aléatoire réelle)
Une variable aléatoire réelle X (VAR) est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \in I\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.
*Si $X(\Omega)$ est en bijection avec $\mathbb{N}$ (un nombre dénombrable de valeurs), la variable aléatoire est **discrète**.*
*Si $X(\Omega)$ comporte un nombre fini de valeurs, la variable aléatoire est **finie**.*

Notations :
On notera l'événement $(X = x)$ pour $\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) = x\}$.
On notera l'événement $(a < X)$ pour $\{\omega \in \Omega \text{ tel que } a < X(\omega)\}$.
On notera l'événement $(X \leq b)$ pour $\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \leq b\}$.

Exemple

On lance une pièce 10 fois de suite et on note X la VAR égale au nombre de fois où pile a été obtenue.
$(X = 3)$ est l'événement "3 piles et 7 faces ont été obtenus".
$(X < 5)$ est l'événement "strictement moins de 5 piles ont été obtenus".
$((X \geq 3) \cap (X \leq 5)) = (3 \leq X \leq 5) = ((X = 3) \cup (X = 4) \cup (X = 5))$.

Proposition (Opérations de variables aléatoires)
Soient X, Y deux VAR sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et λ un nombre réel.
Alors $X + Y$, λX, XY, $\max(X, Y)$, $\min(X, Y)$ sont des VAR sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exemple

On choisit 5 cartes simultanément dans un jeu de 32 cartes.
R est la variable aléatoire égale au nombre de rois, D de dames, V de valets et A d'as dans la main obtenue. Comme un as vaut 5 points, un roi 4 points, une dame 3 points et un valet 1 point, posons P la variable aléatoire égale au nombre de points de la main.
On obtient $P = 5 \times A + 4 \times R + 3 \times D + 1 \times V$.

22.2 Loi d'une Variable aléatoire

Th. ▷ **Loi** P_X

Soit X une VAR sur (Ω, P) un espace probabilisé fini à valeurs dans un ensemble E.
La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilité

$$(P(X = x))_{x \in E}$$

P_X est appelée loi de X et $\forall A \subset E,\ P_X(A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$.

Important: Déterminer la loi de probabilité de X revient à déterminer l'ensemble des couples composés des valeurs prises par X et de ses probabilités correspondantes.

Valeurs prises par X :
Pour bien démarrer, il faut cerner les valeurs prises par X autrement dit $X(\Omega)$ en s'appuyant sur l'énoncé de l'exercice et en justifiant par des phrases.
Puis pour toute valeur x de $X(\Omega)$, on écrit

- $(X = x)$ signifie que... (phrases)
- $(X = x)$ =... (décomposition en événements)
- $P(X = x)$ =... (calcul de la probabilité)

Exemple

Dans l'exemple précédent, le jeu de 32 cartes comporte 4 rois, nous pourrons donc avoir au plus 4 rois dans la main de 5 cartes et au minimum 0.
Donc les valeurs prises par R sont 0, 1, 2, 3 et 4 autrement dit $R(\Omega) = [\![0; 4]\!]$.

Th. ▷ **Formule des probabilités totales**

Soit X une VAR sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ avec Ω fini.
Pour un S.C.E. formé des événements $(X = x_k)$**, avec** $x_k \in X(\Omega)$

$$P(B) = P(B \cap (X = x_1)) + \cdots + P(B \cap (X = x_n))$$

Et si de plus $\forall x_k \in X(\Omega)$, $P(X = x_k) \neq 0$, alors

$$P(B) = P_{X=x_1}(B)P(X = x_1) + \cdots + P_{X=x_n}(B)P(X = x_n)$$

Test 593

On considère le jeu suivant : le joueur paie 3 euros pour jouer. Ensuite, il lance trois pièces équilibrées. Pour chaque "Pile" qu'il obtient, il gagne 2 euros
On désigne par X le nombre de "Pile" obtenus et par Y le gain (algébrique) du joueur.

1. Quelles sont les valeurs de X ?
2. Exprimer Y en fonction de X.
3. Quelles sont les valeurs de Y ?
4. Déterminer la loi de X.
5. Déterminer la loi de Y.

Définition (**De même loi**)
On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$.

Test 594 Montrer que c'est une relation d'équivalence

Th. ▷ **Loi Conditionnelle**

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P) un espace probabilisé fini à valeurs dans un ensemble E et soit A un événement de Ω.
La **loi de** X **sachant** A est déterminée par la distribution de probabilité

$$(P_A(X = x))_{x \in E}$$

22.3 Variable aléatoire $f(X)$

Exemple : Soit X une VAR finie telle que $X(\Omega) = [\![-3; 4]\!]$ et de loi :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{4}{32}$

Soit $f : x \mapsto x^2 - 5$ et on pose $Y = f(X)$.

1. $Y(\Omega) = \{-5; -4; -1; 4; 11\}$.
2. Calculons $P(Y = -1)$.

$$\begin{aligned} P(Y = -1) &= P(f(X) = -1) \\ P(Y = -1) &= P\left(X^2 - 5 = -1\right) \\ P(Y = -1) &= P\left(X^2 = 4\right) \\ P(Y = -1) &= P((X = 2) \cup (X = -2)) \end{aligned}$$

par incompatibilité,

$$\begin{aligned} P(Y = -1) &= P(X = 2) + P(X = -2) \\ P(Y = -1) &= \frac{6}{32} + \frac{3}{32} \\ P(Y = -1) &= \frac{9}{32} \end{aligned}$$

Définition (**Variable aléatoire f(X)**)
Soit X une VAR sur un espace probabilisé (Ω, P) à valeurs dans un ensemble E et f une fonction définie sur E.
On note $f(X)$ l'application définie sur (Ω, P) par $f : \omega \mapsto f(X(\omega))$.
Alors $f(X)$ est une variable aléatoire.

Th. ▷ **Loi d'une VAR f(X)**

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P), f une application définie sur $X(\Omega)$ et $Y = f(X)$.
Y est une var sur (Ω, P) telle que

1. $Y(\Omega) = f(X(\Omega))$
2. pour tout $y \in Y(\Omega)$, $P(Y = y) = \displaystyle\sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} P(X = x)$

22.4 Lois particulières

22.4.1 Loi uniforme

Définition (**Loi Uniforme**)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

dire qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$ signifie que

$$X(\Omega) = [\![1;n]\!] \quad \forall k \in [\![1;n]\!],\ P(X=k) = \frac{1}{n}$$

On notera $X \sim U_{[\![1;n]\!]}$.

Situation caractéristique : Tous les éventualités sont équiprobables.

Point Méthode :
Considérons un dé à 6 faces équilibré. Soit X la variable aléatoire égale à la face obtenue au cours d'un lancer.
Rédaction :
On lance une fois un dé et les résultats obtenus, de 1 à 6, sont tous équiprobables.
Donc X, la variable aléatoire égale au résultat obtenu, suit une loi uniforme sur $[\![1;6]\!]$ et $\forall k \in [\![1;6]\!],\ P(X=k) = \frac{1}{6}$.

22.4.2 Schéma de Bernoulli

Définition (Schéma de Bernoulli)
Soit $p \in]0;1[$. Dire qu'une variable aléatoire X suit un schéma de Bernoulli de paramètre p signifie que

$$X(\Omega) = \{0;1\} \text{ et } P(X=1) = p \text{ et } P(X=0) = 1-p$$

On notera $X \sim B(1;p)$.

Situation caractéristique : Expérience répétée une fois avec 2 issues possibles, succès de probabilité p ou échec.

Point Méthode :
Timothé mange un morceau de galette des rois. Soit la variable aléatoire X égale à 1 s'il a la fève et 0 sinon. La probabilité d'avoir la fève est de $\frac{1}{8}$.
Rédaction :
Soit l'expérience "manger un morceau de galette des rois".
A cette expérience, 2 issues sont possibles :

- soit Tim a la fève avec la probabilité $\frac{1}{8}$,
- soit Tim ne l'a pas avec la probabilité $\frac{7}{8}$.

X est la variable aléatoire égale à 1 si Tim a la fève et 0 sinon.
Donc X suit un schéma de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{8}$, ainsi $P(X=0) = \frac{7}{8}$ et $P(X=1) = \frac{1}{8}$.

22.4.3 Loi binomiale

Définition (Loi binomiale)
Soit n un entier naturel non nul et $p \in]0;1[$. Dire qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de taille n et de paramètre p signifie que

$$X(\Omega) = [\![0;n]\!] \text{ et } \forall k \in [\![0;n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On notera $X \sim B(n;p)$.

Situation caractéristique : Expérience répétée n fois dans des conditions identiques et indépendantes avec, à chaque fois, 2 issues possibles, succès de probabilité p ou échec.

Point Méthode :
On tire successivement et avec remise 11 boules dans une urne contenant 4 boules bleues et 2 boules rouges.

Soit la variable aléatoire X égale au nombre de boules bleues obtenues lors des 11 tirages.
Rédaction :
Soit l'expérience "tirer une boule dans l'urne".
A cette expérience, 2 issues sont possibles :

- soit elle est bleue avec la probabilité $\frac{2}{3}$,
- soit elle est rouge avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

On la répète 11 fois dans des conditions identiques et indépendantes.
X comptabilise le nombre de boules bleues obtenues.
Donc $X \sim B\left(11; \frac{2}{3}\right)$.

$$\forall k \in [\![0; 11]\!],\ P(X = k) = \begin{pmatrix} 11 \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{11-k}$$

Test 595

Un test consiste à répondre à 5 questions. Pour chaque question 3 réponses sont proposées dont une seule est juste. Un candidat répond au hasard. Chaque réponse juste rapporte 4 points ; chaque réponse fausse coûte 2 points.
Soient B le nombre de réponse bonnes, S la somme des points marqués par le candidat et $X = max(0; S)$.
Quelle est la loi suivie par B ? Etablir la loi de S. Etablir celle de X.

Test 596

Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement 5 boules avec remise.
S'il tire une boule blanche, il gagne 2 points, sinon il en perd 3.
Soit X le nombre de boules blanches et Y le nombre de points obtenus.

1. Déterminer la loi de X. Exprimer Y en fonction de X. En déduire la loi de Y.
2. Déterminer la loi de X, si l'on suppose que le jeu est sans remise.

Test 597

On pose 20 questions à un candidat. Pour chaque question, k réponses sont proposées dont une seule est la bonne. Le candidat choisit au hasard une des réponses. On lui attribue un point par bonne réponse.
Soit X_1 le nombre de points obtenus. Déterminez la loi de X_1.

22.5 Lois de couples

22.5.1 Loi conjointe

Définition (Couple de Variables Aléatoires)

Soit Ω un ensemble fini.
Un couple de Variables aléatoires (X, Y) sur un espace probabilisé fini (Ω, P) est une application de Ω dans $E \times E'$ où E et E' sont des ensembles :

$$\begin{cases} \Omega \to E \times E' \\ \omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{cases}$$

telles que X et Y soient des variables aléatoires définies sur Ω
Si $E \times E' = \mathbb{R}^2$, (X, Y) est un couple de variables aléatoires réelles.

Th. ▷ **S.C.E. associé à un couple de Variables Aléatoires**

Soit un couple de Variables Aléatoires (X, Y) sur un espace probabilisé fini (Ω, P).
Alors la famille d'événements

$$((X = x) \cap (Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$$

est un système complet d'événements de Ω.

Définition (**Loi conjointe**)

Soient (X, Y) un couple de Variables Aléatoires sur un espace probabilisé fini (Ω, P).
On appelle loi du couple (X, Y) (ou loi de (X, Y) ou loi conjointe de X et Y) l'ensemble

$$\{((x, y), P[(X = x) \cap (Y = y)]),\ x \in X(\Omega) \text{ et } y \in Y(\Omega)\}$$

Remarque

Déterminer la loi conjointe revient à déterminer les probabilités de chacune des intersections.
Pour bien démarrer, il faut donc déterminer les valeurs prises par X et par Y.

Test 598

Une urne contient 2 boules blanches, 3 boules rouges et 4 boules vertes.
On extrait 3 boules de l'urne.
On note X le nombre de boules blanches parmi ces 3 boules et Y le nombre de boules rouges.
Déterminer la loi du couple (X, Y).

22.5.2 Lois marginales

Définition (**Lois marginales**)

Les variables X et Y sont appelées variables marginales du couple (X, Y).
La loi de la variable X (resp. Y) s'appelle la loi marginale de X (resp. Y) du couple (X, Y).

Th. ▷ **Calcul des lois marginales**

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur un espace probabilisé fini (Ω, P). On a :

$$\forall x \in X(\Omega),\ P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P[(X = x) \cap (Y = y)]$$

$$\forall y \in Y(\Omega),\ P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P[(X = x) \cap (Y = y)]$$

Remarque

On applique la formule des probabilités totales en utilisant tantôt le S.C.E. $(Y = y)_{y \in Y(\Omega)}$, tantôt le S.C.E. $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$.

Test 599

Déterminer les lois marginales des VAR du test précédent

Test 600

Un atelier fonctionne avec 2 équipes d'ouvriers : une du matin et une du soir. Chaque jour on note le nombre d'ouvriers absents.
Soit X VAR égale au nombre d'absences de l'équipe du matin.
Soit Y VAR égale au nombre d'absences de l'équipe de soir.
La loi du couple (X, Y) est donnée dans le tableau suivant :

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0.25	0.20	0.05	0
1	0.20	0.10	0.05	0.05
2	0.05	0.02	0.02	0.01

Donner les lois de X et Y.

Attention

Connaître les lois marginales ne permet pas de retrouver la loi conjointe.

22.5.3 Lois conditionnelles

Définition (**Lois conditionnelles**)
Soit (X,Y) *un couple de variables aléatoires sur un espace probabilisé fini* (Ω, P) *et soit* $y \in Y(\Omega)$ *tel que* $P(Y = y) \neq 0$.
On appelle loi conditionnelle à $[Y = y]$ *de* X *l'ensemble des couples*

$$(x_i, P_{[Y=y]}(X = x_i))_{i \in I}$$

On définit de même pour $x \in X(\omega)$ *la loi conditionnelle à* $[X = x]$ *de* Y.

Test 601 En reprenant le test précédent, déterminer la loi conditionnelle à $[Y = 2]$ de X.

Remarque

On aurait ici pu déterminer la loi conditionnelle à $[Y = 2]$ de X directement sans se servir de la loi du couple.

22.5.4 Liens entre ces lois

Jonglage

Il est important de bien savoir jongler entre loi du couple, lois marginales et lois conditionnelles. Il s'agit uniquement d'appliquer la définition des probabilités conditionnelles ou alors d'appliquer la formule des probabilités totales mais voici tout de même une propriété générale qui reprend tout cela.

Th. ▷ **Liens entre loi du couple, lois marginales et lois conditionnelles**

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires sur un espace probabilisé fini (Ω, P) .
Pour tout $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ tels que $P(X = x) \neq 0$ et $P(Y = y) \neq 0$ on a :

- Loi conditionnelle à partir de la loi du couple :

$$P_{[X=x]}(Y = y) = \frac{P([X = x] \cap [Y = y])}{P(X = x)} \qquad P_{[Y=y]}(X = x) = \frac{P([X = x] \cap [Y = y])}{P(Y = y)}$$

- Loi du couple à partir de la loi conditionnelle :

$$P((X = x) \cap (Y = y)) = P_{[X=x]}(Y = y)P(X = x)$$

$$P((X = x) \cap (Y = y)) = P_{[Y=y]}(X = x)P(Y = y)$$

- Lois marginales à partir de la loi du couple :

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y)) \qquad P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y))$$

- Lois marginales à partir des lois conditionnelles :

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P_{[Y=y]}(X = x)P(Y = y) \qquad P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P_{[X=x]}(Y = y)P(X = x)$$

Test 602

On considère une urne contenant quatre boules rouges et trois boules noires.
On pioche une à une sans remise les boules de l'urne.
Pour tout entier $i \in [\![1, 2]\!]$, on note X_i le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la $i^{ème}$ boule noire.

1. Donner la loi de X_1.
2. Expliciter la loi conjointe de (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2.
3. On note T la variable aléatoire définie par $T = X_2 - X_1$. Que représente T ?

22.6 Indépendance

Définition (**Indépendance**)
Soient X, Y 2 variables aléatoires sur sur un espace probabilisé fini (Ω, P) à valeurs respectives dans E et F.
Dire que X et Y sont indépendantes signifie que $\forall x \in X(\Omega)$ et $\forall y \in Y(\Omega)$

$$P\left((X = x) \cap (Y = y)\right) = P(X = x) \times P(Y = y)$$

On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Test 603

La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par

$X\backslash Y$	0	1	2
0	1/20	1/4	0
1	17/60	1/4	1/6

1. Déterminer les lois marginales.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Proposition
Soient X et Y deux variables aléatoires sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes à valeurs respectives dans E et F et soient $A \subset E$ et $B \subset F$. Alors on a

$$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Test 604

Compléter le tableau suivant de la loi conjointe de X et Y connaissant les probabilités indiquées et sachant que X et Y sont indépendantes.

$X\backslash Y$	0	1	2	3	$loideX$
0	0.04				
1	0.02				
2	0.06	0.09	0.06		
3					
$loideY$	0.2				

Test 605

La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par

$X\backslash Y$	-1	0	1
0	1/4	a	1/8
1	1/5	b	1/10

1. Donner les lois de X et Y.
2. Déterminer a et b de manière que X et Y soient indépendantes.

Proposition
Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ finies indépendantes et soient f, g deux fonctions définies respectivement sur $X(\Omega)$ et sur $Y(\Omega)$.
Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont deux var définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes.

22.7 Généralisation à n variables

22.7.1 n-uplet de VAR

Définition (**n-uplet de variables aléatoires**)

Un n-uplet de VAR $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ sur un espace probabilisé fini (Ω, P) est une application de Ω dans $\mathbb{E}^n$:

$$\begin{cases} \Omega \to \mathbb{E}^n \\ \omega \mapsto (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega)) \end{cases}$$

telles que X_1,... X_n soient des variables aléatoires définies sur Ω.

Définition (**Loi conjointe**)

Soient $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ Un n-uplet de variables aléatoires sur (Ω, P).
On appelle loi du n-uplet $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ (ou loi conjointe) l'ensemble

$$\{((x_1, x_2, \cdots, x_n), P[\bigcap_{1 \leq i \leq n} (X_i = x_i)]),\ x_1 \in X_1(\Omega), \ldots\ x_n \in X_n(\Omega)\}$$

22.7.2 Indépendance

Définition (**Variables aléatoires mutuellement indépendantes**)

*Soient $X_1, ..., X_n$ n des variables aléatoires. On dit que les variables $X_1, ..., X_n$ sont **mutuellement indépendantes** (ou tout simplement **indépendantes**) lorsque*
pour tout $(x_1, ..., x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$:

$$P([X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_n = x_n]) = P(X_1 = x_1) \times \cdots \times P(X_n = x_n)$$

Proposition (Lemme des coalitions)

Soient $X_1, \cdots, X_n$ n mutuellement indépendantes et soit $p \in \{2, ..., n-1\}$. Alors toute variable aléatoire fonction des variables $X_1, \cdots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des variables $X_{p+1}, \cdots, X_n$.

Exemple

Si X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont 5 VAR discrètes mutuellement indépendantes alors les variables $X_1 + 2X_3^2$ et $X_2 - e^{X_5}$ sont indépendantes.

Th. ▷ **Somme de variables binomiales**

Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes suivant des lois binomiales de paramètres respectifs $(m_1, p), (m_2, p), \cdots, (m_n, p)$ alors la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi binomiale de paramètre p et de taille $\sum_{i=1}^{n} m_i$.

Corollaire

Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ n mutuellement indépendantes qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

22.8 Exercices

Exercice 1

On dispose de deux dés : un dé cubique D_1 comporte 1 face marquée 0, 3 faces marquées 2, 2 faces marquées 1 et un dé D_2 comportant 3 faces marquées 0, 2 faces marquées 1, 1 face marquée 2.

1. On lance le dé D_1 et on note X_1 le nombre obtenu. Déterminer la loi de X_1.
2. Mêmes questions pour X_2 le nombre obtenu en lançant le dé D_2.
3. On lance D_1 et D_2 simultanément, déterminer la loi de $Z = X_1 + X_2$ et de $R = X_1X_2$.

Exercice 2

On dispose de deux urnes U_1 et U_2, de six boules numérotées de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré. Initialement, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1 et 2, l'urne U_2 contient les boules numérotées $3, 4, 5$ et 6.
On appelle échange l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 après n échanges successifs.

1. Les cinq premiers lancers du dé donnent : $1, 3, 2, 3, 5$.
   Quel est le contenu de U_1 à l'issue du cinquième échange ?
2. Quelle est la loi de X_1 ?
3. Déterminer la loi de X_2.
4. Quelles sont les valeurs possibles de X_n ?
5. Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on a

$$P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{6}P(X_n = 1) \text{ et } P(X_{n+1} = 6) = \frac{1}{6}P(X_n = 5)$$

$$\forall k \in \{1, .., 5\},\ P(X_{n+1} = k) = \frac{7-k}{6}P(X_n = k-1) + \frac{k+1}{6}P(X_n = k+1)$$

Exercice 3

Un service après-vente dispose d'équipes de dépannage qui interviennent auprès de la clientèle sur appel téléphonique.
Les appels se produisent de façon indépendante, et la probabilité qu'un retard se produise dans le dépannage à la suite d'un appel est $p = \frac{1}{4}$.

1. Un même client a appelé le service à 8 dates différentes. Soit X le nombre de retards que ce client a subi. Définir la loi de probabilité de X.
2. On considère un ensemble de 8 clients différents. 2 d'entre eux sont mécontents parce qu'ils ont subi un retard. On contacte 4 clients parmi les 8. Soit M le nombre de clients mécontents parmi les 4 contactés. Déterminer la loi de M.

Exercice 4

Une urne contient 4 boules blanches et 4 noires. On effectue des tirages successifs sans remise.
Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la 1-ère boule blanche.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la 2-ième boule blanche. Déterminer sa loi.

Exercice 5

Une urne contient 3 boules bleues, 2 vertes, 5 rouges.

1. On tire une à une, avec remise 3 boules de cette urne. Soit N la VAR égale au nombre de boules bleues tirées. Quelle est la loi de N ?
2. On tire simultanément 3 boules de cette urne. Soit X le nombre de boules bleues tirées.
   (a) Etablir la loi de X.
   (b) Quelle est la probabilité de tirer 3 boules de la même couleur ?
   (c) Quelle est la probabilité de tirer 1 boule de chaque couleur ?
   (d) Quelle est la probabilité de tirer 2 boules au moins de la même couleur ?

Exercice 6

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent respectivement 2 boules blanches et 1 noire, et 1 blanche et 3 noires. On effectue un premier tirage dans une urne choisie au hasard et on remet la boule obtenue dans son urne d'origine.
Au $i^{ème}$ tirage, si la boule obtenue est blanche (resp. noire), le $(i+1)^{ème}$ tirage se fait dans U_1 (resp. U_2).
On considère la variable aléatoire X_i définie par $X_i = 1$ si l'on obtient une boule blanche au $i^{ème}$ tirage et $X_i = 0$ sinon.

1. Donner la loi de X_1 puis de X_2.
2. Calculer $P(X_{i+1} = 0)$ en fonction de $P(X_i = 0)$ et $P(X_i = 1)$. Faire de même avec $P(X_{i+1} = 1)$.
3. Montrer que la suite $(P(X_i = 0))_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique. En déduire l'expression de $P(X_i = 0)$ en fonction de i puis celle de $P(X_i = 1)$.
4. Calculer $\lim\limits_{i\to+\infty} P(X_i = 0)$.

Exercice 7

On réalise une suite de lancers d'une piéce équilibrée.
On note P_k (resp. F_k) l'événement : "on obtient pile (resp. face) au $k^{éme}$ lancer".
On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois pile puis face dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

1. Calculer $P(X = 2)$.
2. En remarquant que $(X = 3) = P_1P_2F_3 \cup F_1P_2F_3$, calculer $P(X = 3)$.
3. Sur le modèle de la question précédente, écrire, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, l'événement $(X = k)$ comme réunion de $(k-1)$ événements incompatibles.
4. Déterminer P$(X = k)$ pour tout entier k supérieur ou égal à 2.

Exercice 8

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X, Y et Z suivent la loi $\mathcal{U}_{[|1,n|]}$.

1. Montrer que : $\forall k \in [|2, n+1|]$, $P(X+Y=k) = \dfrac{k-1}{n^2}$.
2. Montrer que : $\forall k \in [|n+2, 2n|]$, $P(X+Y=k) = \dfrac{2n-k+1}{n^2}$.
3. Utiliser la formule des probabilités totales pour déduire de la première question que :
$$P(X+Y=Z) = \frac{n-1}{2n^2}$$
4. Montrer que la variable aléatoire $T = n+1-Z$ suit la loi $\mathcal{U}_{[|1,n|]}$.
5. Pourquoi T est-elle indépendante de X et de Y ?
6. En faisant intervenir la variable T et en utilisant la troisième question, déterminer la probabilité $P(X+Y+Z = n+1)$.

Exercice 9

Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire successivement 2 boules. Le tirage se fait avec remise. On considère les variables aléatoires suivantes :

- P la VAR égale au numéro de la première boule tirée.
- D la VAR égale au numéro de la seconde boule tirée.

1. Donner les lois respectives de P et D.
2. Soit X_1 la VAR égale au plus petit numéro tiré. Autrement dit
$$X_1 = min(P, D)$$
Calculer $P(X_1 = 4)$. Etablir la loi de X_1.
3. Soit X_2 la VAR égale au plus grand numéro tiré. Autrement dit
$$X_2 = max(P, D)$$
Calculer $P(X_2 = 1)$. Etablir la loi de X_2.

22.9 Exercices Complémentaires

Exercice 1

Lors d'un concours d'équitation, un cavalier effectue un parcours de 2000 mètres à la vitesse de 10 kilomètres par heure. Il doit franchir 10 obstacles, indépendants les uns des autres. La probabilité de franchir un obstacle sans faute est de $\frac{3}{5}$.

1. On note X la variable aléatoire qui désigne le nombre d'obstacles franchis sans fautes par le cavalier. Déterminer la loi de X, ainsi que son espérance.
2. On suppose que si un obstacle est franchi sans faute, le cavalier ne perd pas de temps, dans le cas contraire, le cavalier perd une minute. Soit T la variable aléatoire égale à la durée en minutes du parcours. Exprimer T en fonction de X, en déduire la durée moyenne d'un parcours.

Exercice 2

Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire successivement 2 boules. Le tirage se fait avec remise. On considère les variables aléatoires suivantes :

- P la VAR égale au numéro de la première boule tirée.
- D la VAR égale au numéro de la seconde boule tirée.

1. Donner les lois respectives de P et D.
2. Soit X_1 la VAR égale au plus petit numéro tiré. Autrement dit
$$X_1 = min(P, D)$$
Calculer $P(X_1 = 4)$. Etablir la loi de X_1.
3. Soit X_2 la VAR égale au plus grand numéro tiré. Autrement dit
$$X_2 = max(P, D)$$
Calculer $P(X_2 = 1)$. Etablir la loi de X_2.

Exercice 3

On dispose d'un paquet de 6 cartes. Ces cartes sont numérotées de 1 à 6.
Un joueur A propose à un joueur B le jeu suivant, moyennant une mise de 1 euro que lui verse B à chaque partie : B tire une carte au hasard, montre le nombre β qu'elle porte et remet la carte dans le paquet. Puis A tire une carte au hasard ; quand celle-ci porte le nombre α :

- Si $\alpha < \beta$, alors A donne à B la somme $(\beta - \alpha)$ euros : B a donc gagné $(\beta - \alpha - 1)$ euros.
- Si $\alpha > \beta$, alors B donne à A la somme de 1 euro : B a donc perdu 2 euros.
- Si $\alpha = \beta$, alors B a simplement perdu 1 euro, le montant de la mise.

1. Dresser le tableau à double entrée donnant les gains (positifs ou négatifs) de B suivant les différentes valeurs du couple (α, β).
2. Soit X la V.A. représentant les gains de B. Donner la loi de X.
3. Calculer $E(X)$. Le jeu avantage-t-il l'un des joueurs ?
4. Calculer la variance de X.

Exercice 4

Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement n boules avec remise. S'il tire une boule blanche, il gagne 2 points, sinon il en perd 3.
Soit X_n le nombre de boules blanches et Y_n le nombre de points obtenus.
Déterminer la loi de X_n. Calculer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.
Exprimer Y_n en fonction de X_n. En déduire $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

Exercice 5

On considère deux urnes notées respectivement U et V. On suppose que :
– l'urne U contient deux boules noires et deux boules blanches ;
– l'urne V contient deux boules noires, deux boules blanches et deux boules vertes.

1. On considère l'expérience suivante $(\mathcal{E})$: "on tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne U, on note leur couleur, puis on les remet dans l'urne U".
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On répète n fois l'expérience $(\mathcal{E})$ et on note N la variable aléatoire égale au nombre de fois où on a obtenu deux boules de même couleur lors de ces n tirages dans l'urne U.
   (b) Donner la loi de N en explicitant $P(N = k)$ pour k appartenant aux valeurs prises par N.
   (c) Préciser la valeur de l'espérance $E(N)$ de N ainsi que de sa variance $V(N)$.
   (d) Quelle est la probabilité que, sur ces n tirages, on ait obtenu au moins une fois deux boules de même couleur ?
2. On considère une autre expérience $(\mathcal{F})$: "on tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne U. Si les deux boules sont de même couleur, on enlève ces deux boules de l'urne U. Si elles ont des couleurs différentes, on repose les deux boules dans l'urne U puis on recommence l'expérience jusqu'à ce que l'urne U soit vide".
   On note X le nombre de tirages nécessaires pour que l'urne U soit vide. On désigne par A l'événement : "au premier tirage dans l'urne U, les deux boules sont de même couleur" et on note a sa probabilité, c'est-à-dire $a = P(A)$.
   (a) Calculer $P(X = 1), P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$: $P(X = n) = a(1 - a)^{n-2}$.
3. On considère deux réels r, s distincts et non nuls ainsi qu'un réel λ. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par :
   $$u_2 = 0, \quad \forall n \geq 2, \quad u_{n+1} = \lambda r^{n-2} + s u_n.$$
   Montrer par récurrence que :
   $$\forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{\lambda}{r - s}\left(r^{n-2} - s^{n-2}\right)$$
4. On considère une nouvelle expérience $(\mathcal{G})$: "on tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne V. Si les deux boules sont de même couleur, on enlève ces deux boules de l'urne V. Si elles sont de couleurs différentes, on repose les deux boules dans l'urne V puis on recommence l'expérience jusqu'à ce que l'urne V soit vide".
   On note Y le nombre de tirages nécessaires pour que l'urne V soit vide. On désigne par B l'événement : "au premier tirage dans l'urne V, les deux boules sont de même couleur" et on note b sa probabilité, c'est-à -dire $b = P(B)$.
   (a) Calculer la probabilité b.
   (b) Calculer $P(Y = 2)$ et $P(Y = 3)$.
   (c) A l'aide du système complet d'événements $(B, \overline{B})$, démontrer que, pour tout $n \geq 2$:
   $$P(Y = n + 1) = bP(X = n) + (1 - b)P(Y = n)$$
   (d) A l'aide de la question 3, montrer que :
   $$\forall n \geq 2, \quad P(Y = n) = \frac{ab}{b - a}\left((1 - a)^{n-2} - (1 - b)^{n-2}\right)$$

Exercice 6

On admet que l'égalité $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1 - x)^{k+1}}$ est valable pour $x \in]-1, 1[$ et $k \in \mathbb{N}$.
Soit p un nombre réel tel que $0 < p < 2/3$. Dans un pays, la probabilité q_n qu'une famille ait exactement n enfants est de $p^n/2$ quand $n \geqslant 1$; par ailleurs, la probabilité, à chaque naissance, d'avoir un garçon est de $1/2$.

1. Calculer la probabilité q qu'une famille ait au moins un enfant.
   Calculer la probabilité q_0 qu'une famille n'ait aucun enfant.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$. On considère une famille de n enfants ; calculer la probabilité pour que cette famille ait exactement k garçons.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité pour qu'une famille ait exactement k garçons.
4. Calculer la probabilité pour qu'une famille n'ait aucun garçon.

