

Chapitre 20

Probabilités

20.1 Ensembles et Cardinaux

20.1.1 Rappel sur les ensembles

Définition ($\mathcal{P}(E)$)

Soit E un ensemble. On note par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties (sous-ensembles) de E .

Exemple : $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Définition (Notations ensemblistes)

Soient A et B deux sous-ensembles de E .

- $A \cup B = \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ ou } x \in B\}$: "A union B".
- $A \cap B = \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ et } x \in B\}$: "A inter B".
- $A \setminus B = \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ et } x \notin B\}$: "A privé de B".
- $\bar{A} = \{x \in E \text{ tel que } x \notin A\}$: "contraire de A".
- Dire que A et B sont disjoints signifie que leur intersection est vide ($A \cap B = \emptyset$).

Exemple :

On considère l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ainsi que ses sous-ensembles donnés par $A = \{0, 1, 3, 4\}$ et $B = \{2, 3, 4\}$.

Alors $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$, $A \setminus B = \{0, 1\}$, $\bar{B} = \{0, 1, 5\}$.

Définition (Partition)

Dire qu'une famille de sous-ensembles de E forme une partition de E signifie que ces sous-ensembles sont 2 à 2 disjoints et que leur réunion est égal à E tout entier.

20.1.2 Définition d'un ensemble fini

Définition (Ensemble fini)

Un ensemble E est dit fini s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une bijection

$$\phi : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow E, \quad k \mapsto u_k$$

L'entier n est alors unique. On l'appelle nombre d'éléments de E ou cardinal de E . On le note en général par l'une des écritures suivantes :

$$\#E \quad , \quad |E| \quad , \quad \text{Card}(E)$$

Proposition (Partie d'un ensemble fini)

Soit A une partie d'un ensemble fini E . Alors

- A est un ensemble fini, et $\text{Card } A \leq \text{Card } E$.
- Si de plus, $\text{Card } A = \text{Card } E$, alors $A = E$.

20.1.3 Opérations ensemblistes usuelles sur les ensembles finis

Proposition (Réunion disjointe de deux ensembles finis)

Soient A et B deux parties finies d'un ensemble E fini et disjointes. Alors $A \cup B$ est finie et

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B$$

Corollaire (Complémentaire)

Si A est une partie d'un ensemble fini E , alors

$$\text{Card}(\complement_E A) = \text{Card } E - \text{Card } A$$

Corollaire (Partition finie)

Soit $\{A_k ; 1 \leq k \leq p\}$ une partition finie de parties finies d'un ensemble E . Alors E est finie et

$$\text{Card } E = \sum_{k=1}^p \text{Card}(A_k)$$

Corollaire (Principe des bergers)

Si un ensemble E possède une partition en p sous-ensembles de cardinal r , alors $\text{Card } E = pr$.

Exemple : Si un berger compte 400 pattes de moutons, son troupeau comporte 100 moutons.

Corollaire (Réunion quelconque de deux ensembles finis)

Soient A et B deux parties finies d'un même ensemble, alors $A \cup B$ est finie et

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cap B)$$

En particulier :

- $\text{Card}(A \cup B) \leq \text{Card } A + \text{Card } B$
- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B$ si, et seulement si A et B sont disjointes.

Corollaire

Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille finie de parties finies d'un ensemble E , alors $\bigcup_{i=1}^n A_i$ est une partie finie et

$$\text{Card} \bigcup_{i=1}^n A_i \leq \sum_{i=1}^n \text{Card } A_i$$

Test 550

Soient A , B et C trois parties d'un ensemble fini E . Exprimer $\text{Card}(A \cup B \cup C)$ en fonctions des cardinaux de $A, B, C, A \cap B, B \cap C, C \cap A$ et $A \cap B \cap C$.

20.1.4 Produits d'ensembles finis

Proposition (Produit cartésien de deux ensembles)

Soient E et F deux ensembles. Alors $E \times F$ est fini si, et seulement si E et F sont tous deux finis et, dans ce cas,

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card } E \cdot \text{Card } F$$

Corollaire

Si E est un ensemble fini, et $n \in \mathbb{N}^*$, alors E^n est fini et

$$\text{Card}(E^n) = (\text{Card } E)^n$$

20.1.5 Injection/Surjection entre ensembles finis

Proposition (Injection dans un ensemble fini)

Soient E et F deux ensembles, et $f : E \rightarrow F$ une injection. Si F est fini, alors E est fini et

$$\text{Card } E \leq \text{Card } F$$

Proposition (Injection entre ensembles de même cardinal)

Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal, et $f : E \rightarrow F$ une injection. Alors f est une bijection.

Test 551

Soient E un ensemble fini, F un ensemble quelconque et $f : E \rightarrow F$ une application. Montrer

f est injective si, et seulement si, $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$

Proposition (Surjection à partir d'un ensemble fini)

Soient E et F deux ensembles, et $f : E \rightarrow F$ une surjection. Si E est fini, alors F est fini et

$$\text{Card } F \leq \text{Card } E$$

Proposition (Surjection entre ensembles de même cardinal)

Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal, et $f : E \rightarrow F$ une surjection. Alors f est une bijection.

20.2 Espace probabilisé fini

20.2.1 Événements

Définition (Expérience aléatoire et événements)

On appelle expérience (ou épreuve) aléatoire toute expérience dont le résultat ne peut être déterminé a priori.

Les résultats potentiels d'une expérience aléatoire forment l'ensemble Ω , appelé **univers** associé à l'expérience. On supposera dès lors l'univers non vide.

Un seul des résultats possibles est observé à l'issue de l'expérience.

Un **événement** est une partie de Ω .

Définition (Évènement impossible et évènement certain)

Un évènement qui n'est jamais réalisé s'appelle évènement impossible et un évènement qui se réalise toujours est un évènement certain.

Exemple : **Expérience** : Le lancer d'un dé cubique (à six faces) dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et lecture du numéro de la face supérieure obtenue.

Évènements : "obtenir un numéro pair" est un évènement, "obtenir un numéro pair et impair" est un évènement impossible et "obtenir un numéro pair ou impair" est un évènement certain.

Notons $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et ω le chiffre obtenu. Donc $\omega \in \Omega$.

Par exemple, l'évènement A_1 : "obtenir un numéro pair" vaut $A_1 = \{2; 4; 6\}$.

L'évènement A_2 : "obtenir un numéro supérieur ou égal à 4" vaut $A_2 = \{4; 5; 6\}$.

L'évènement certain est Ω et l'évènement impossible $\emptyset$.

Définition (Vocabulaire des événements)

Tous les événements qui vont intervenir correspondent à une même expérience.

1. L'évènement A et B est représenté par $A \cap B$
2. L'évènement A ou B est représenté par $A \cup B$
3. Dire que deux événements A et B sont incompatibles signifie que $A \cap B = \emptyset$

Définition (Évènements élémentaires)

Si Ω est un ensemble fini alors les singletons $\{\omega\}$ ($\omega \in \Omega$) sont appelés les événements élémentaires.



Test 552

Soient A, B, C trois évènements d'un espace probabilisable. Exprimer les évènements suivants :

1. Aucun des évènements A, B ou C n'est réalisé.
2. Un seul des trois évènements A, B ou C est réalisé.
3. Au moins deux des trois évènements A, B ou C sont réalisés.
4. Pas plus de deux des trois évènements A, B ou C sont réalisés.

20.2.2 Probabilité

Définition (Probabilité)

Soit Ω un ensemble.

On appelle **probabilité** une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ qui est :

- *positive* : $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) \geq 0$
- *additive* : $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- *et telle que* $P(\Omega) = 1$

Le couple (Ω, P) est appelé **espace probabilisé**.

Définition (distribution de probabilité)

On appelle **distribution de probabilité** sur Ω toute famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de réels positifs indexée par Ω et de somme 1 : $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$. En posant P l'application définie par :

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \sum_{\omega \in A} p_\omega,$$

on définit une probabilité sur Ω .

Remarque : La notion de somme d'une infinité de nombres positifs sera vue dans le chapitre sur les séries.

Définition (Espace probabilisé fini)

Si Ω est un ensemble fini, on dit que (Ω, P) est un **espace probabilisé fini**.

Test 553

À quelle(s) condition(s) sur $x, y \in \mathbb{R}$ existe-t-il une probabilité sur $\Omega = \{a, b, c\}$ vérifiant

$$P(\{a, b\}) = x \text{ et } P(\{b, c\}) = y?$$

20.2.3 Calcul des probabilités

Dans un espace probabilisé fini,

Proposition (Calcul des probabilités)

Soient A, B deux évènements. Alors on a :

1. $P(\Omega) = 1$
2. Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3. $P(\emptyset) = 0$
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
5. Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$

Test 554

Un centre de vacances accueille 100 personnes où tennis et canoë sont proposés. On sait que 25 personnes ne font que du tennis, 20 ne font que du canoë et 10 font à la fois du tennis et du canoë.

On interroge une personne au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'elle ne pratique aucun des deux sports ?
2. Quelle est la probabilité qu'elle ne pratique qu'un seul des 2 sports ?

Th. ▷ **Crible de Poincaré****Calcul de la probabilité d'une union.**

- Pour 2 événements

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Pour 3 événements

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

- Pour plus de 4 événements, à titre informatif

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \dots - P(A_1 \cap A_n) - \dots - P(A_2 \cap A_3) - \dots - P(A_2 \cap A_n) - \dots - P(A_{n-1} \cap A_n) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \dots + P(A_1 \cap A_2 \cap A_n) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \dots + P(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n)$$

- Cas particulier des événements incompatibles ou additivité finie

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n)$$

Test 555

Dans une entreprise, on choisit un employé au hasard parmi les 800. On considère les événements H : "être un homme", S : "être syndiqué" et M : "être marié". Il y a 300 hommes, 352 employés syndiqués et 424 employés mariés. Il y a 188 hommes syndiqués, 166 hommes mariés, 208 syndiqués mariés et 144 hommes syndiqués et mariés.

1. Quelle est la probabilité que l'employé choisi au hasard soit un homme ou un syndiqué ou un employé marié.
2. En déduire la probabilité que l'employé soit une femme célibataire non syndiquée.

Th. ▷ **Inégalité de Boole**¹

Soit $n \geq 2$. Pour toute famille finie $(A_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on a

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n)$$

Exemple : Une urne contient 3 boules jaunes, 3 bleues, 3 rouges, 3 vertes et 3 noires. On tire 3 boules successivement et sans remise dans l'urne.

Soit U : "le tirage est unicolore", J : "les 3 boules tirées sont jaunes", de même pour B , R , V et N .

Exprimons $P(U)$ à l'aide des probabilités de J , B , R , V et N .

U signifie que le tirage est unicolore autrement dit les 3 boules sont soit jaunes, soit bleues, soit rouges, soit vertes, soit noires.

$$P(U) = P(J \cup B \cup R \cup V \cup N)$$

or les événements J , B , R , V et N sont incompatibles,

$$P(U) = P(J) + P(B) + P(R) + P(V) + P(N)$$

Test 556

Les élèves d'une classe ont la possibilité de pratiquer trois activités sportives a, b, c . Ils peuvent en pratiquer une, deux, ou trois, mais ils doivent en pratiquer au moins une. On sait que :

- 12 élèves pratiquent l'activité a
- 7 élèves pratiquent l'activité b
- 9 élèves pratiquent l'activité c
- 1 élève pratique les activités a et b
- 2 élèves pratiquent les activités a et c
- 6 élèves pratiquent les activités b et c
- il y a 20 élèves dans la classe.

On croise un élève de cette classe au hasard. Quelle est la probabilité de croiser un élève pratiquant les 3 activités ?

1. George Boole, 1815-1864, mathématicien et philosophe britannique ayant enseigné au Queen's College de Cork, Irlande. Il nourrit une correspondance et une amitié avec Auguste de Morgan et Arthur Cayley.

20.2.4 Probabilités conditionnelles

**Th.** > **Probabilité conditionnelle**

Soit A un évènement de probabilité non-nulle.

La probabilité conditionnelle relativement à A ou probabilité sachant A de B vaut :

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

L'application P_A définit ainsi une probabilité.

**Test 557**

Soient A et B deux évènements avec $P(A) > 0$. Comparer les probabilités conditionnelles

$$P_{A \cup B}(A \cap B) \text{ et } P_A(A \cap B)$$

**Définition (Système complet d'évènements)**

Dire qu'une famille d'évènements est un système complet d'évènements de l'univers signifie que ces évènements sont incompatibles deux à deux et que leur réunion forme l'univers tout entier.

**Proposition (Règles de calcul)**

1. Par convention, si $P(A) = 0$ alors $P_A(B) \times P(A) = 0$.
2. $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$.
3. La formule du crible de Poincaré reste vraie en remplaçant P par P_A .
4. Formule de Bayes

Soit A et B deux évènements de probabilités non nulles, alors on a

$$P_B(A) = P_A(B) \frac{P(A)}{P(B)}$$

Définition (Indépendance)

Dire que deux évènements A et B de probabilités non nulles sont indépendants signifie que

$$P_A(B) = P(B) \text{ ou } P_B(A) = P(A)$$

autrement dit que la réalisation de A n'influe pas sur B ou réciproquement.

Ce qui est équivalent à écrire que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Proposition

Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ (resp. $\overline{A}$ et B , resp. $\overline{A}$ et $\overline{B}$) le sont aussi.

Définition (Indépendance mutuelle)

Dire que des évènements sont mutuellement indépendants signifie que la réalisation de toute partie d'entre eux n'influe pas sur un quelconque autre évènement de cette famille.

autrement dit, dire que des évènements $(A_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendants signifie que pour toute sous partie non vide J de I ,

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

Remarque : Des évènements mutuellement indépendants sont indépendants 2 à 2 mais la réciproque est fausse.

Th. ▷ **Probabilités composées****Calcul de la probabilité d'une intersection.**

- Pour 2 événements

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) \text{ si } P(A) \neq 0$$

- Pour 3 événements

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P_A(B) \times P_{A \cap B}(C) \text{ si } P(A \cap B) \neq 0$$

- Pour n événements, $n \geq 2$

Soient $A_1, \dots, A_n$ une famille d'événements telle que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$.
Alors on a

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

- Cas particulier des événements mutuellement indépendants

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \cdots \times P(A_n)$$

Test 558

Soient 3 urnes U_1 (contenant 1 blanche et 1 noire), U_2 (contenant 2 blanches) et U_3 (contenant 2 noires).

On effectue le premier tirage dans U_1 . Si la boule tirée est noire, on ajoute une noire dans U_2 , sinon on ajoute une blanche dans U_3 , puis on tire une boule dans U_2 puis dans U_3 .
Calculer la probabilité que les trois tirages donnent une blanche.

20.2.5 Probabilités totalesTh. ▷ **Formule des probabilités totales****Calcul de la probabilité d'un événement B qui dépend du résultat d'une situation antérieure**

- Pour 2 événements

A et $\bar{A}$ forment un S.C.E. donc

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$$

Si de plus $P(A) \neq 0$ et $P(\bar{A}) \neq 0$, alors

$$P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\bar{A}}(B)P(\bar{A})$$

- Pour 3 événements

F, G, H forment un S.C.E. donc

$$P(B) = P(B \cap F) + P(B \cap G) + P(B \cap H)$$

Si de plus F, G, H sont de probabilités non nulles, alors

$$P(B) = P_F(B)P(F) + P_G(B)P(G) + P_H(B)P(H)$$

- Pour n événements

Soit $A_1, \dots, A_n$ un S.C.E. donc

$$P(B) = P(B \cap A_1) + \cdots + P(B \cap A_n)$$

Si de plus les A_i sont de probabilités non nulles, alors

$$P(B) = P_{A_1}(B)P(A_1) + \cdots + P_{A_n}(B)P(A_n)$$

Test 559	Un candidat à un concours connaît une fraction x de son programme et doit répondre par oui ou par non à une question. On note J : "la réponse est juste" et C : "le candidat connaît la réponse". 1. Calculer $P(J)$? 2. Calculer $P_J(C)$?
Test 560	Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé. On suppose $0 < P(B) < 1$. Etablir $P(A) = P_B(A)P(B) + P_{\overline{B}}(A)P(\overline{B})$
Test 561	Reprenons l'exemple précédent des 3 urnes. Calculer la probabilité que le second tirage donne une blanche.

20.2.6 Méthodologie du calcul de probabilité



Point Méthode : Décomposer la situation

La méthodologie de calcul d'une probabilité se résume donc en 3 étapes :

- Expliciter l'événement par une phrase.
- Décomposer l'événement en tant qu'union ou intersection d'événements auxquels on donnera des noms pour simplifier leur manipulation ultérieure.
- Passage au calcul effectif de la probabilité en invoquant une formule, un théorème ou des propriétés des événements ("par incompatibilité...", "par indépendance...").

Les contraires

Les lois de Morgan permettent de calculer la probabilité d'un événement contraire. Elles sont les suivantes :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

On pourra faire des schémas pour s'en convaincre. Deux cas concrets :

- Le contraire de "j'ai un chien et un chat" est "je n'ai pas de chien ou je n'ai pas de chat".
- Le contraire de "j'ai un chien ou un chat" est "je n'ai pas de chien et pas de chat".

Test 562	Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires. On tire successivement 2 boules de l'urne sans remise. Calculer la probabilité pour que l'on obtienne : 1. Une boule noire et une boule blanche dans cet ordre ? 2. Une boule noire au plus ? 3. Deux boules blanches au moins ?
Test 563	On lance successivement deux fois un dé équilibré. Calculer la probabilité des événements suivants : A : "Obtenir 1 au premier lancer". B : "Obtenir deux fois 1". D : "Obtenir deux faces identiques". F : "Obtenir une somme paire et deux faces identiques".
Test 564	Un élève fait une constatation sur ses notes aux contrôles. S'il a la moyenne la n-ième semaine, la probabilité pour qu'il ait la moyenne la $(n+1)$ième semaine est 0,8. S'il n'a pas la moyenne la n-ième semaine, la probabilité pour qu'il ait la moyenne la $(n+1)$ième semaine est 0,6. Il a eu la moyenne la première semaine. On note, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, A_n : "il a la moyenne la n-ième semaine" et $p_n = P(A_n)$. 1. Montrer que $P(A_{n+1}) = 0,2P(A_n) + 0,6$. 2. Donner p_n en fonction de n.

Test 565

Une urne U_1 contient 3 boules blanches et 7 boules rouges.
 Une urne U_2 contient 6 boules blanches et 4 boules rouges.
 On lance un dé ordinaire.
 Si on fait 1 ou 6 alors on tire une boule de U_1 , sinon on tire une boule de U_2 .
 On notera U_i : "le tirage est effectué dans l'urne U_i ", B : "une boule blanche est tirée"
 et R : "une boule rouge est tirée".

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?
2. Sachant qu'on a tiré une boule rouge, quelle est la probabilité d'avoir six avec le dé ?

20.3 Dénombrement

20.3.1 Equiprobabilité

Définition (Equiprobabilité)

1. Dire que deux évènements sont équiprobables signifie qu'ils ont la même probabilité.
2. Dire qu'une probabilité est uniforme signifie que tous les évènements élémentaires sont équiprobables.

Th. $\triangleright$ Utilisation de l'équiprobabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini tel que la probabilité P soit uniforme. Alors on a

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) = \frac{\text{nombre de cas où } A \text{ se réalise}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Test 566

Soit un dé équilibré à 20 faces numérotées de 1 à 20. On le lance une fois.
 Quelle est la probabilité P d'avoir un multiple de 3 ?

20.3.2 p -listes

Th. $\triangleright$ p -listes

Soit E fini de cardinal n .
 Une p -liste de E est une liste ordonnée de p éléments de E .
 Le nombre de p -listes d'un ensemble E à n éléments est n^p .

Situation caractéristique :

Nous sommes dans un cas où l'ordre dans lequel les éléments sont choisis intervient et où les répétitions sont autorisées.

Exemple : On lance 8 fois de suite un dé équilibré à 6 faces et on note après chaque lancer la face obtenue.

On choisit donc 8 fois de suite 1 face parmi 6. Le nombre de résultats possibles est de 6^8 .

Proposition (cardinal de l'ensemble des applications de E , fini, dans F , fini)

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs $p \geq 1$ et n .

Alors l'ensemble F^E des applications de E dans F est un ensemble fini et

$$\text{Card}(F^E) = n^p = (\text{Card}(F))^{\text{Card}(E)}$$

Remarque : Ce résultat permet de comprendre la notation F^E .

Proposition (parties d'un ensemble)

Si E est un ensemble fini de cardinal n , l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E a pour cardinal 2^n .

Test 567

Un sac contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. On tire successivement avec remise 4 jetons de ce sac.

1. Combien existe-t-il de tirages possibles ?
2. Parmi ceux-ci combien de tirages :
 - (a) ne comportent que des numéros pairs ?
 - (b) ne comportent que des numéros impairs ?
 - (c) ne comportent qu'un seul numéro pair ?
 - (d) comportent au moins un numéro pair ?
 - (e) comportent moins de deux numéros pairs ?

20.3.3 Arrangement

Th. ▷ **Arrangement**

Soit E à n éléments. Le nombre de p -listes d'éléments distincts de E vaut

$$A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Il est appelé arrangement de p éléments parmi n .

Situation caractéristique :

Nous sommes dans un cas où l'ordre dans lequel les éléments sont choisis intervient et où les répétitions ne sont pas autorisées.

Exemple : De combien de façon peut-on garer 6 voitures distinctes dans 10 places numérotées de 1 à 10.

La première voiture se présentant a 10 choix possibles. La seconde n'en a plus que 9...

Le nombre de possibilités est donc de $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = A_{10}^6$.

On range 6 voitures parmi 10 places : le nombre de possibilités est donc l'arrangement de 6 parmi 10.

Test 568

En employant les lettres du mot "NOMBRE", combien peut-on écrire de "mots" de 4 lettres ?

Test 569

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p avec $n \leq p$. Combien y a-t-il d'injections de E dans F ?

Test 570

On lance 5 fois de suite un dé cubique équilibré. On note à chaque fois le numéro de la face supérieure. On obtient donc une suite de 5 numéros.

1. Combien y a-t-il de suites possibles ?
2. Combien y a-t-il de suites :
 - (a) où tous les numéros sont strictement supérieurs à 4 ?
 - (b) où tous les numéros sont distincts ?
 - (c) où tous les numéros sont différents de 1 ?
 - (d) qui contiennent au moins une fois le numéro 1 ?

Test 571

Un convoi de véhicules publicitaires est formé de 4 camions et 2 voitures tous distincts. Ils pénètrent les uns après les autres sur une place de village.

1. De combien de façons différentes peuvent-ils se présenter ?
2. Le premier véhicule est un camion, combien y a-t-il dans ce cas de convois possibles ?
3. Soit X la VAR égale au nombre de camions en tête du convoi. Etablir la loi de X et calculer $E(X)$. Tracer sa fonction de répartition.

20.3.4 Permutation

Th. ▷ **Permutation**

Soit E à n éléments. On appelle permutation de E une n -liste d'éléments distincts de E .

Il y a $n!$ permutations de E .

Situation caractéristique :

Nous sommes dans un cas où l'ordre dans lequel les éléments sont choisis intervient et où les répétitions ne sont pas autorisées.

Exemple : 8 enfants s'assoient sur un banc. Comptons le nombre de possibilités. On choisit un enfant parmi les 8 pour s'asseoir tout à gauche puis un parmi les 7 restants pour s'asseoir à droite du premier... Le nombre de possibilités est donc de $8 \times 7 \times \cdots \times 2 \times 1 = 8!$.

On place les 8 enfants : le nombre de possibilités est égal au nombre de permutations de 8 enfants !

20.3.5 Combinaisons

Th. ▷ Combinaison de p parmi n

Soit E un ensemble à n éléments.

$\binom{n}{p}$ désigne le nombre de sous-ensembles à p éléments de E et vaut

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Les coefficients binomiaux, le retour :

Les propriétés sur les coefficients binomiaux ont déjà été vues et démontrées par le calcul. Nous allons voir ici comment retrouver ces propriétés en faisant appel à des méthodes combinatoires.

Proposition (symétrie)

Soient n et p deux entiers tels que $0 \leq p \leq n$, alors

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Proposition (Formule de Pascal)

Soient n et p deux entiers tels que $1 \leq p \leq n-1$, alors

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Proposition (Formule du binôme)

Soient a et b deux complexes et n un entier naturel, alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Application : avec $a = b = 1$, on obtient $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$, ce qui permet de retrouver le nombre

de parties de E de cardinal n .

Situation caractéristique :

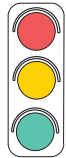
La combinaison de p parmi n dénombre les choix possibles de p éléments distincts parmi n , l'ordre n'ayant pas d'importance.

Autrement dit, nous sommes dans un cas où l'ordre dans lequel les éléments sont choisis n'a pas d'importance et où les répétitions ne sont pas autorisées.



Utilisation de l'équiprobabilité : Une urne contient 3 boules noires et 4 boules blanches. On tire 5 boules simultanément.

1. Combien de tirages sont-ils possibles ?



2. Calculer la probabilité de A : "Le tirage comporte 3 noires et 2 blanches ?
3. Calculer la probabilité de B : "Le tirage comporte au plus une noire ?

Correction :

1. Faire un tirage revient à choisir 5 boules parmi 7 soit $\binom{7}{5}$ tirages possibles.
2. Faire un tirage comportant 3 noires et 2 blanches revient à choisir 3 noires parmi 3 puis à choisir 2 blanches parmi 4 soit $\binom{3}{3} \times \binom{4}{2}$ tirages possibles. Dès lors on obtient par équiprobabilité,

$$P(A) = \frac{\binom{3}{3} \times \binom{4}{2}}{\binom{7}{5}} = 1 \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{2}{7}$$

3. Faire un tirage comportant au plus une noire revient à faire un tirage comportant une noire et 4 blanches autrement dit choisir une noire parmi 3 puis choisir 4 blanches parmi 4 donc $\binom{3}{1} \times \binom{4}{4}$ tirages possibles. Dès lors on obtient par équiprobabilité,

$$P(B) = \frac{\binom{3}{1} \times \binom{4}{4}}{\binom{7}{5}} = \frac{3}{1} \times 1 \times \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{1}{7}$$

Remarque

Le nombre de tirages possibles n'est pas le nombre de configurations possibles qui sont au nombre de 3 c'est-à-dire 1N/4B, 2N/3B, 3N/2B, mais qui ne sont pas équiprobables. Nous recherchons le nombre de tirages, les tirages étant équiprobables.

Test 572

On tire simultanément deux cartes dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :

- $A = \{\text{les deux cartes tirées sont rouges}\}$
 - $B = \{\text{les deux cartes tirées sont un valet et un dix}\}$
 - $C = \{\text{les deux cartes tirées sont des personnages}\}$
 - $D = \{\text{les deux cartes tirées ne sont pas toutes les deux rouges}\}$
 - $E = \{\text{on obtient au plus un personnage}\}$
- Calculer leurs probabilités.

Test 573

Une urne contient 10 boules, 4 rouges et 6 blanches numérotées de 1 à 10.

1. On tire simultanément 3 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage unicolore ? Un tirage bicolore ?
2. Mêmes questions si on tire 3 boules une à une sans remise.
3. Mêmes questions si on tire 3 boules une à une avec remise.

Test 574

Soit E un ensemble fini de cardinal n . Calculer :

$$\sum_{X \subset E} \text{Card} X$$

On pourra commencer par faire le calcul pour $\text{Card} E = 3$.

Test 575

Soit E un ensemble à n éléments.

a) Soit X une partie à p éléments de E .

Combien y a-t-il de parties Y de E disjointes de X ?

b) Combien y a-t-il de couples (X, Y) formés de parties disjointes de E ?

Test 576

Soient $E = \{1, \dots, n\}$ et $F = \{1, \dots, p\}$ avec $n \leq p \in \mathbb{N}$.

Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de E vers F ?

20.3.6 Méthodologie du dénombrement



Point Méthode :

- **Décomposer la situation**

Dénombrer consiste à déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble donné, autrement dit le nombre de possibilités offertes par une situation donnée. Il faut parfois décomposer la situation décrite pour pouvoir en dénombrer les possibilités :

- Si la situation à étudier peut se décrire par plusieurs cas disjoints ("ou bien" "soit") alors le dénombrement peut s'obtenir en ajoutant les dénombrements de chacun de ces cas.
- Si la situation à étudier peut être décrite par plusieurs étapes successives ("puis" "et") alors le dénombrement peut s'obtenir en multipliant les dénombrements de chacune des étapes.
- Il est parfois plus simple de dénombrer l'ensemble contraire.

- **Dénombrer chaque composante**

Une fois la situation de départ décomposée en situations classiques, encore faut-il dénombrer ces dernières. Il y a 3 cas possibles.

- Si l'ordre intervient et les répétitions autorisées,
il y a n^p façons de choisir p fois successives un élément parmi n .
- Si l'ordre intervient et si les répétitions ne sont pas autorisées,
il y a A_n^p façons de ranger p éléments parmi n .
- Si l'ordre n'intervient pas et si les répétitions ne sont pas autorisées,

il y a $\binom{n}{p}$ façons de choisir p éléments parmi n .

Exemple : Une urne contient 3 boules noires et 4 boules blanches. On tire 5 boules successivement, avec remise.

1. Combien de tirages sont-ils possibles ?
2. Combien de tirages comportent 3 noires et 2 blanches ?
3. Combien de tirages comportent au plus une noire ?
4. Combien de tirages comportent au moins 2 noires ?

Correction :

1. Faire un tirage revient à choisir 5 fois successives 1 boule parmi 7 soit 7^5 tirages possibles.
2. Faire un tirage comportant 3 noires et 2 blanches revient à :

- d'abord choisir les rangs d'apparitions des blanches (soit choisir 2 places parmi 5 i.e. $\binom{5}{2}$ possibilités)
- puis de choisir 2 fois successives une blanche parmi les 4 (soit 4^2 possibilités)

- puis de choisir 3 fois successives une noire parmi les 3 (soit 3^3 possibilités).

Finalement il y a $\binom{5}{2} \times 4^2 \times 3^3$ possibilités.

3. Faire un tirage comportant au plus une noire revient à
 - faire un tirage comportant 0 noire et 5 blanches soit 4^5 possibilités.
 - ou bien à faire un tirage comportant une noire et 4 blanches autrement dit
 - choisir le rang d'apparition de la noire soit 5 possibilités,
 - puis choisir cette noire parmi les 3, 3 possibilités,
 - puis choisir 4 fois successives une blanche parmi les 4, 4^4 possibilités,

Donc pour ce cas $5 \times 3 \times 4^4$ possibilités.

Finalement il y a $5 \times 3 \times 4^4 + 4^5$ possibilités.

4. Faire un tirage comportant au moins 2 noires revient à ne pas faire un tirage comportant au plus une noire soit $7^5 - (5 \times 3 \times 4^4 + 4^5)$ possibilités.



Le principe des bergers : Pour compter le nombre de moutons de son troupeau, un berger compte toutes les pattes et divise ensuite le nombre obtenu par 4.

Exemple : Supposons que l'on recherche le nombre d'anagrammes du mot CHABADA.

Toute la difficulté va provenir du fait que ce mot contient trois fois la lettre A.

On sait facilement dénombrer les anagrammes de $CHA_1BA_2DA_3$, soit $7!$. Or, les trois A sont identiques, le dénombrement précédent a compté $3!$ chacun des anagrammes de CHABADA.

Finalement le nombre d'anagrammes de CHABADA est $\frac{7!}{3!}$.

Test 577

1. Calculer le nombre d'anagrammes des mots MISSISSIPI et ABRACADABRA.
2. Un QCM comporte 20 questions, pour chacune 4 réponses sont possibles. Une réponse est autorisée par question. Combien y a-t-il de "fiches" réponse possibles ?
3. 10 personnes se serrent la main pour se saluer. Combien y a-t-il de poignées de mains ?

20.4 Exercices

Exercice 1

Un dé A a 4 faces rouges et 2 faces blanches ; un dé B a 2 faces rouges et 4 faces blanches. On lance une pièce : si c'est pile, on joue une fois le dé A sinon on joue une fois le dé B.

1. Quelle est la probabilité d'avoir une face rouge ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir pile sachant qu'on a eu une face rouge ?

Exercice 2

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles. Démontrer que $P_B(A) = \frac{P(A) - P_{\overline{B}}(A)P(\overline{B})}{P(B)}$.

Un objet peut avoir un défaut a avec une probabilité 0,2 ; un défaut b avec une proba 0,3, s'il n'a pas le défaut b la probabilité qu'il ait le défaut a est 0,1. On note A : "avoir le défaut a" et B : avoir le défaut b".

1. Calculer $P_B(A)$
2. A et B sont-ils indépendants ?
3. Calculer la probabilité d'avoir l'un des deux défauts au moins.

Exercice 3

Trois urnes contiennent respectivement deux boules rouges et une boule verte, deux boules vertes et une boule noire, deux boules noires et une boule rouge. On tire au hasard une boule dans la première urne et on la met dans la deuxième, puis on tire une boule dans la deuxième urne et on la met dans la troisième, enfin on tire une boule dans cette troisième urne.

1. Calculer la probabilité que la seconde boule soit verte. Même question avec rouge et noir.
2. Calculer la probabilité que la dernière boule soit verte. Même question avec rouge et noir.
3. Calculer la probabilité de piocher trois boules de même couleur.

Exercice 4

Une compagnie aérienne étudie la réservation sur l'un de ses vols. Une place donnée est libre le jour d'ouverture de la réservation et son état évolue chaque jour jusqu'à la fermeture de la réservation.

Si la place est réservée le jour k , elle le sera encore le jour $k + 1$ avec la probabilité $\frac{9}{10}$.

Si la place est libre le jour k , elle sera réservée le jour $k + 1$ avec la probabilité $\frac{4}{10}$.

Pour k entier positif, on note r_k la probabilité que la place soit réservée le jour k .

1. Exprimer r_{k+1} en fonction de r_k .
2. En déduire l'expression explicite de r_k en fonction de k .

Exercice 5

Soit a un réel appartenant à $]0, \frac{1}{2}[$.

Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable ou baisser.

Le premier jour le titre est stable.

Si un jour n le titre monte, le jour $n + 1$, il montera avec la probabilité $1 - 2a$, restera stable avec la probabilité a et baissera avec la probabilité a .

Si un jour n le titre est stable, le jour $n + 1$ il montera avec la probabilité a , restera stable avec la probabilité $1 - 2a$ et baissera avec la probabilité a .

Si un jour n le titre baisse, le jour $n + 1$ il montera avec la probabilité a , restera stable avec la probabilité a et baissera avec la probabilité $1 - 2a$.

On note M_n (resp. S_n , resp. B_n) l'événement " le titre donné monte (resp. reste stable, resp. baisse) le jour n ".

On pose $p_n = P(M_n)$, $q_n = P(S_n)$ et $r_n = P(B_n)$.

1. Expliciter p_{n+1} (resp. q_{n+1}) en fonction de p_n, q_n, r_n .
2. Que vaut $p_n + q_n + r_n$? En déduire l'expression de r_n en fonction de p_n et q_n .
3. Montrer que les suites p et q sont arithmético-géométrique.
4. En déduire p_n, q_n puis r_n en fonction de n .

Exercice 6

1. Combien peut-on écrire d'entiers naturels de 5 chiffres (un tel entier ne commence pas par 0) ?
2. Quelle est alors la probabilité d'obtenir une seule fois le chiffre 2 ? Au moins une fois le chiffre 2 ?

Exercice 7

Un questionnaire comporte 8 questions auxquelles on répond par "oui" ou "non".

1. Quel est le nombre de bulletins réponses différents ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un bulletin réponse comportant exactement 1 "oui" ? Au moins 1 "oui" ? 6 "oui" ou plus ?

Exercice 8

On effectue 5 tirages successifs avec remise dans une urne contenant 9 boules numérotées de 1 à 9

1. Quelle est la probabilité d'obtenir aux deux premiers tirages la boule 2 ?
2. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des boules multiples de 3 ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir des nombres supérieurs à 5 sachant qu'on a obtenu que des boules paires ?

Exercice 9

Une urne contient cinq boules blanches et huit boules noires. On tire successivement et avec remise quatre boules dans l'urne. Quel est le nombre de tirages vérifiant les conditions suivantes :

1. au moins une boule blanche a été tirée
2. une boule noire au plus a été tirée
3. trois boules noires et une boule blanche ont été tirées dans cet ordre
4. deux boules noires et deux boules blanches ont été tirées

Exercice 10

Dans une urne contenant 5 boules vertes numérotées de 1 à 5 et 3 boules rouges numérotées de 1 à 3, on prend simultanément 3 boules.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages contenant :
 - (a) que des boules rouges ?
 - (b) que des boules vertes ?
 - (c) des boules des deux couleurs ?
 - (d) au plus une boule verte ?

Exercice 11

Une urne contient 3 boules rouges, 4 boules vertes et 5 bleues. On prend successivement 3 boules sans remise.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

2. Combien y a-t-il de tirages tricolores ?
3. Combien y a-t-il de tirages unicolores ?
4. Combien y a-t-il de tirages contenant au plus une rouge ?
5. Combien y a-t-il de tirages au moins une bleue ?

Exercice 12

On lance 5 fois de suite une pièce de monnaie en notant dans l'ordre les résultats apparus (pile ou face).

1. Combien existe-t-il de résultats possibles ?
2. Dans combien de résultats y a-t-il deux "pile" ?
3. Dans combien de résultats y a-t-il plus de "pile" que de "face" ?

Exercice 13

Dans un jeu ordinaire de 32 cartes, on choisit au hasard et simultanément 5 cartes, formant ainsi une main.

1. Quel est le nombre de mains possibles ?
2. Quel est le nombre de mains contenant un carré (4 cartes identiques) ?
3. Quel est le nombre de mains contenant un full (3 as et 2 rois) ?
4. Quel est le nombre de mains contenant une paire exactement ?
5. Quel est le nombre de mains contenant un brelan exactement ?

Exercice 14

Un tiroir contient 5 paires de chaussures noires, 3 vertes et 2 rouges. On choisit au hasard et simultanément 2 chaussures.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 chaussures de la même couleur ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 1 pied gauche et 1 pied droit ?
3. Quelle est la probabilité de reconstituer 1 vraie paire de chaussures ?

20.5 Exercices Complémentaires

Exercice 1

Dans une entreprise de conception de logiciels pour l'informatique, 20 % des employés ont un diplôme en gestion des affaires. 70 % des diplômés en gestion des affaires ont des postes de cadre, alors que seulement 15 % de ceux qui n'ont pas ce diplôme occupent ces postes. Le comité d'entreprise organise en fin d'année une loterie pour tout le personnel. Chaque employé reçoit un billet de loterie et un seul.

Tous les billets sont placés dans une urne et on en tire un totalement au hasard. L'employé gagnant se voit alors offrir un voyage.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :
G : " L'employé gagnant a un diplôme de gestion des affaires ".
C : " L'employé gagnant est un cadre de l'entreprise ".
2. Sachant que l'employé gagnant est un diplômé en gestion des affaires, quelle est la probabilité que ce soit un cadre ?
3. Quelle est la probabilité que l'employé gagnant soit un cadre si l'on sait qu'il n'est pas diplômé en gestion des affaires ?
4. Calculer la probabilité des événements suivants :
" L'employé gagnant est cadre et diplômé en gestion des affaires ".
" L'employé gagnant est cadre et non diplômé en gestion des affaires ".

Exercice 2

Une enquête est faite auprès des inscrits à un stage multi-activités (randonnée, natation, parapente, ...). On note :

- F l'ensemble des femmes participant à ce stage ;
- A l'ensemble des stagiaires, hommes et femmes, pratiquant la randonnée.

L'enquête relève que :

- F représente 30 % de l'ensemble des stagiaires ;
- A représente 48 % de l'ensemble des stagiaires ;
- chez les stagiaires du groupe A, il y a deux fois plus d'hommes que de femmes.

On interroge un stagiaire au hasard.

1. Quelle est la probabilité que ce stagiaire pratique la randonnée ?
2. Quelle est la probabilité que ce stagiaire soit une femme pratiquant la randonnée ?
3. On interroge au hasard une stagiaire femme. Quelle est la probabilité qu'elle pratique la randonnée ?
4. On interroge trois stagiaires au hasard, de manière indépendante. Quelle est la probabilité que, parmi ces trois stagiaires, aucun ne pratique la randonnée ?

Exercice 3

Une boîte A contient deux jetons portant le numéro 0 et une boîte B contient deux jetons portant le numéro 1. On tire au hasard un jeton dans chaque boîte et on les échange. On recommence cette opération n fois. On s'intéresse à la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$. Pour cela, on introduit les événements :

P_n : " la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 0 "

Q_n : " la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 1 "

R_n : " la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 2 "

On pose également $p_n = P(P_n)$, $q_n = P(Q_n)$ et $r_n = P(R_n)$.

1. Calculer p_0 , q_0 , r_0 , p_1 , q_1 , r_1 .
2. Exprimer p_{n+1} (resp. q_{n+1} , resp. r_{n+1}) en fonction de p_n, q_n, r_n
3. Montrer que $\forall n \geq 0$, $q_{n+2} = \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n$.

4. En déduire l'expression de q_n en fonction de n puis celle de p_n et de r_n .

Exercice 4

1. De combien de façon différentes peut-on garer 6 voitures dans 10 places numérotées de 1 à 10 ?
2. En utilisant les lettres du mot **NATURE**, on écrit un mot (ayant un sens ou non) de 4 lettres. Combien de mots différents peut-on écrire ?
3. 8 enfants s'assoient côte à côte sur un banc. Combien y a-t-il de possibilités ?

Exercice 5

On lance n fois de suite un dé à 4 faces.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Dénombrer les tirages pour lesquels chacun des quatre chiffres apparaît au moins une fois.

Exercice 6

Combien existe-t-il de nombres de 5 chiffres (ne commençant pas par 0) et contenant au moins 4 fois le chiffre 1 ?

Exercice 7

1. Combien y a-t-il de nombres à 7 chiffres ne comportant aucun 1 ?
2. Combien y a-t-il de nombres ayant 7 chiffres différents ?
3. Combien y a-t-il de nombres pairs de 7 chiffres ?

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Une urne contient 2 boules rouges et $n - 2$ blanches, numérotées de 1 à n . On tire toutes les boules une à une sans remise.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages où les boules rouges sont côte à côte ?
3. Combien y a-t-il de tirages où les 2 boules rouges sont dans les trois premières places ?
4. Combien y a-t-il de tirages où la première boule rouge est à la k^{ieme} place avec $1 \leq k \leq n - 1$?

Exercice 9

Trois personnes A, B, C se répartissent cinq gâteaux différents, l'une en prend 1, les deux autres en prennent chacune 2.

Combien y a-t-il de distributions possibles ?

Exercice 10

1. 10 personnes se retrouvent à une soirée, combien y a-t-il de poignées de mains différentes quand ils se saluent ?
2. Un touriste visite 5 villes A, B, C, D, E, combien y-at-il d'itinéraires possibles ?
3. De combien de façons peut-on ranger 6 livres différents sur 3 étagères (chaque étagère peut recevoir de 0 à 6 livres et le rangement sur une étagère n'a pas d'importance) ?

