Chapitre 19

Espaces vectoriels de dimension finie

19.1 Dimension d'un espace vectoriel

19.1.1 Espace à générateur fini

L'espace E est à **générateur fini** ssi il existe une famille finie qui engendre E.

Nous verrons dans ce chapitre que dans ce cas "E est de **dimension finie**".

Test 523 Que peut-on dire du degré d'un polynôme engendré par une famille finie de polynômes ? En déduire que $\mathbb{R}[X]$ n'est pas à générateur fini.

Un outil : Si E est à générateur fini, alors, de toute famille génératrice de E on peut extraire une sous-famille génératrice finie.

Th. ▷ **Théorème de la base incomplète.**

Si E est à générateur fini, alors, toute famille libre de E peut se compléter pour former une base de E.

Plus précisément : on peut compléter $\mathcal{L}$ en utilisant des vecteurs d'une famille $\mathcal{G}$ génératrice de E.

$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{L} \text{ libre} \\ \\ \mathcal{G} \text{ engendre } E\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\ \mathcal{B} \text{ base de } E, \quad \mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$$

Test 524 Appliquer le théorème de la base incomplète dans $\mathbb{R}^3$ avec

$$\mathcal{L} = \left\{(1,1,0),(0,1,0)\right\} \text{ et } \mathcal{G} = \left\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\right\}$$

Le choix du vecteur pris dans $\mathcal{G}$ est il important ou indifférent ?

Conséquences :
tout espace non nul à générateur fini admet une base.

(base de cardinal fini)

Th. ▷ **Théorème de la base extraite**

Si $E \neq \left\{0\right\}$ à générateur fini :
toute famille génératrice de E peut être réduite pour former une base de E
(base de cardinal fini)

Test 525

Dans $\mathbb{R}^3$: $e_1 = (1,1,0),\ e_2 = (1,0,1),\ e_3 = (0,1,1),\ e_4 = (1,1,1)$.
Réduire la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) pour obtenir une base $\mathbb{R}^3$.
La réponse est-elle unique ?

19.1.2 Dimension d'un espace vectoriel

Th. ▷ **Cardinal d'une famille génératrice**

Toute famille de (strictement) plus de n vecteurs
engendrés par une famille de n vecteurs est liée.

$$\boxed{v_1, v_2, \cdots, v_{n+1} \in \mathrm{Vect}\Big(u_1, u_2, \cdots, u_n\Big) \Rightarrow \Big(v_1, v_2, \cdots, v_{n+1}\Big) \text{ liée}}$$

Il s'agit d'une famille quelconque,
pas obligatoirement d'une sur-famille.

Test 526

a et b sont deux vecteurs de E. On pose $u = 2a + 3b$, $v = 3a - b$, $w = -a + 5b$.
Que peut-on dire de la famille (u, v, w) ?

Th. ▷ **Dimension d'un espace vectoriel**

Si l'espace vectoriel non nul E est à générateur fini, alors
toutes les bases de E sont finies et ont le même cardinal.

Ce cardinal noté $\boxed{\dim E}$ est la **dimension** de E.
E est alors de **dimension finie** .
Dans le cas contraire, E est de **dimension infinie** .

Cas particuliers :

- Par convention : $\dim \Big\{0\Big\} = 0$
- Une **droite vectorielle** est un espace vectoriel de dimension 1.
- Un **plan vectoriel** est un espace de dimension 2.

Attention : la dimension du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dépend du corps $\mathbb{K}$.

Test 527

Déterminer la dimension de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, puis en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

19.1.3 Ce qu'il faut impérativement savoir

E est de dimension n si et seulement si il existe une base de n vecteurs.

Alors :

- $\boxed{\text{toutes les bases comportent exactement } n \text{ vecteurs}}$
- toute famille de plus de n vecteurs est liée
- toute famille génératrice de E comporte au moins n vecteurs
- $\boxed{\text{toute famille libre de } n \text{ vecteurs est une base de } E}$
- $\boxed{\text{toute famille génératrice de } n \text{ vecteurs est une base de } E}$
- toute famille libre peut (si nécessaire) se compléter en une base de E
- toute famille génératrice peut (si nécessaire) se réduire en une base de E

Test 528

Montrer que $P = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\Big\}$ est un plan vectoriel.
Trouver une base de P dont le premier vecteur est $(1, 1, 1)$.

19.1.4 Exemples classiques

- $\mathbb{K}^n$ est de dimension n avec sa base canonique de n vecteurs :

$$((1,0,\cdots,0),(0,1,0,\cdots,0),\cdots,(0,\cdots,0,1))$$

- $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$ avec sa base canonique : $(1,X,X^2,\cdots,X^n)$
- Les solutions de $y'+a(x)\,y=0$, où a est continue sont les fonctions

$$y : x \mapsto \lambda\, e^{\int -a(x)\,dx} = \lambda\, e^{-A(x)} \text{ où } \quad \lambda\in\mathbb{K} \quad \text{et} \quad A \text{ est une primitive de } a$$

  Ainsi l'ensemble des solutions est $S=\ \mathrm{Vect}\{x\mapsto e^{-A(x)}\}$ c'est donc la droite vectorielle (donc de dimension 1) engendrée par la fonction $x\mapsto e^{-A(x)}$
- Soit (E) : $a\,y''+b\,y'+c\,y=0$ une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2.

Test 529

Grand classique :
On considère $n+1$ polynômes P_k de $\mathbb{K}_n[X]$ de degré k pour k variant de 0 à n.
Montrer que la famille $(P_0,P_1,\cdots,P_n)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$

19.1.5 Isomorphisme avec $\mathbb{K}^n$

Th. ▷ **Espaces isomorphes**

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E de dimension finie n.

F est isomorphe à E <u>ssi</u> F est de dimension finie n

Cas particulier :
comme $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{K}^n$ est de dimension n, nous avons :

$$\boxed{E \text{ est de dimension } n \ \ \underline{\text{ssi}}\ E \text{ est isomorphe à } \ \mathbb{K}^n}$$

19.1.6 Dimension d'un SEV , d'un produit

Th. ▷ **Dimension d'un sous-espace vectoriel**

Si E est de dimension finie n, et F un sous-espace vectoriel de E, alors :
- F est de dimension finie p avec $p\leqslant n$
- $E=F$ <u>ssi</u> n=p

Attention : cette dernière propriété n'est pas valable en dimension infinie.

Test 530

Montrer que l'intersection de deux plans vectoriels distincts n'est pas un plan vectoriel.
Est-ce forcément une droite vectorielle ?

Test 531

Soit (e_1,e_2,e_3) libre et (e_1,e_2,e_3,u) lié.
Montrer $\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3)=\ \mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3,u)$ en utilisant la notion de dimension.

Th. ▷ **Dimension d'un espace produit**

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies,
alors $E\times F$ est de dimension finie.

De plus $\dim(E\times F)=\dim(E)+\dim(F)$.

Ce résultat se généralise à un produit de p espaces vectoriels :

Th. ▷ **Produit de p Espaces Vectoriels**

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère p $\mathbb{K}-$espaces vectoriels $E_{1,2},\cdots,E_p$ de dimensions finies. Alors le $\mathbb{K}-$espace vectoriel $E_1\times E_2\times\cdots\times E_p$ est de dimension finie : $\dim E_1\times E_2\times\cdots\times E_p=\dim E_1+\cdots+\dim E_p$.

Corollaire : Si E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, alors pour tout entier naturel p non nul, le $\mathbb{K}-$espace vectoriel E^p est de dimension finie : $\dim E^p = p \dim E$.

Exemple : on retrouve $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.

19.1.7 Dimension d'une somme

Th. ▷ **Formule de Grassmann**[1]

Si A et B sont deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies, alors, $A + B$ est de dimension finie et

$$\dim(A+B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$$

Note : *la dimension de deux sous-espaces supplémentaires en est un cas particulier.*

Test 532

P_1 et P_2 sont deux plans vectoriels distincts de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $P_1 + P_2$ n'est pas un plan.
En déduire que $P_1 + P_2 = \mathbb{R}^3$, puis la nature de $P_1 \cap P_2$.

Corollaire :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E.
Alors $\dim(E_1 + E_2) \leqslant \dim E_1 + \dim E_2$ avec égalité si et seulement si E_1 et E_2 sont en somme directe.

19.1.8 Somme et espaces supplémentaires

Si E est de dimension finie, alors :

- Tout sous-espace F de E admet (au moins) un supplémentaire dans E
- On obtient un des supplémentaires de F en complétant une base de F
- Si $E = F \oplus G$, alors, $\dim E = \dim F + \dim G$

Th. ▷ **Autre caractérisation d'espaces supplémentaires**

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Les sous-espaces A et B sont supplémentaires dans E ssi deux des trois conditions suivantes sont vérifiées :

- $A + B = E$
- $A \cap B = \left\{ O_E \right\}$
- $\dim(A) + \dim(B) = \dim(E)$

Test 533

Vérifier séparément les trois points du théorème précédent avec

$$A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; x + 2\,y + 3\,z = 0 \right\} \qquad \text{et}$$

$$B = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; x = y = 2\,z \right\}$$

Test 534

E est de dimension n. F est sous-espace vectoriel de dimension m ($m \leqslant n$). Peut-on dire que tout sous-espace de dimension $n - m$ est supplémentaire de F ? (Illustrer votre réponse)

1. Hermann Günther GRASSMANN (1809-1877). Il fut le premier à imaginer les notions fondamentales d'algèbre linéaire. Trop confus, ses travaux furent repris par PEANO vers 1888.

Test 535

$E = A \oplus B$. $(e_1, \cdots, e_k)$ est une base de A complétée en $(e_1, \cdots, e_k, \cdots, e_n)$ base de E. Peut-on dire que $(e_{k+1}, \cdots, e_n)$ est une base de B ?

Test 536

Construire un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ du plan $x - y - 3z = 0$.

19.1.9 Rang d'une famille de vecteurs

Le **rang de la famille $\mathcal{F}$** de vecteurs de E
est la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille.

Notation : $\boxed{\text{rg } \mathcal{F}} = \dim \text{Vect}\, \mathcal{F}$

Test 537

Déterminer le rang de : • $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ dans $\mathbb{R}^2$ avec $\overrightarrow{u} = (-1, 2)$, $\overrightarrow{v} = (3, 1)$ et $\overrightarrow{w} = (1, 5)$ • $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}\right)$dans $\mathbb{R}^3$ avec $\overrightarrow{u} = (1, -1, 2)$, $\overrightarrow{v} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{w} = w(0, 1, -1)$ et $\overrightarrow{t} = (1, -4, 5)$

19.2 Applications linéaires et dimensions

19.2.1 Rappels

$f \in \mathcal{L}(E, F)$ est caractérisée par l'image d'une base de E.

Si E et F sont de dimensions finies,
de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \cdots, f_m)$ [voir [2]]
en notant $f(e_i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_{k,i}\, f_k$
l'expression analytique de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est :

$$\left\{\begin{array}{c} x'_1 = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ x'_2 = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ x'_m = a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}}_{= \text{mat}_{/\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Réciproquement : toute expression de cette forme montre que f est linéaire.

Test 538

Former la matrice de la dérivation $D : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ en utilisant la base : **-1-** canonique $(1, X, X^2, X^3)$ **-2-** $\left(1,\ 1 + \dfrac{X}{1!},\ 1 + \dfrac{X}{1!} + \dfrac{X^2}{2!},\ 1 + \dfrac{X}{1!} + \dfrac{X^2}{2!} + \dfrac{X^3}{3!}\right)$ **-3-** $\left(1,\ 1 + X,\ 1 + X + X^2,\ 1 + X + X^2 + X^3\right)$

Une **forme linéaire** sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est noté $\boxed{E^*}$
. . . c'est l'espace **dual** de E.

La dualité est hors programme.

2. Dans le cas $E = F$, il est possible (mais pas obligatoire) d'utiliser la même base dans l'ensemble de départ et d'arrivée. La matrice de f est alors désignée par $\text{mat}_{/\mathcal{B}}(f)$

Test 539

Soit φ une forme linéaire sur E.
Montrer que si φ n'est pas nulle,alors φ est surjective.

Expression analytique d'une forme linéaire :

$\varphi : E \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur E

<u>ssi</u> son expression analytique relativement à la base $\mathcal{B}$ de E est

$$\varphi(u) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i$$

Test 540

Justifier que φ définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $\varphi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt$ est une forme linéaire.
En donner l'expression analytique dans la base canonique.

19.2.2 Rang d'une application linéaire

Le **rang** de $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est la dimension de $\operatorname{Im}(f)$ (lorsqu'elle est finie).

Notation : $\boxed{\operatorname{rg}(f)} = \dim(\operatorname{Im} f)$

Propriétés :

- Si E est de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E, alors :
  - $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}\Big(f(\mathcal{B})\Big)$ (le rang de f est le rang de l'image de la base)
  - $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim(E)$
- Si F est de dimension finie $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim(F)$

Th. ▷ **Théorème (et formule) du rang**

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$:

tout supplémentaire dans E de $\operatorname{Ker}(f)$ est isomorphe à $\operatorname{Im}(f)$

$$E = \operatorname{Ker}(f) \oplus A \quad \Rightarrow \quad A \text{ isomorphe à } \operatorname{Im}(f)$$

Cas particulier :

Formule du rang :
Si E est de dimension finie[3], alors

$$\dim(E) = \operatorname{rg}(f) + \dim(\operatorname{Ker} f)$$

Test 541

E est de dimension 3.
Peut-on trouver un endomorphisme f tel que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f)$?

19.2.3 Rang et isomorphismes

Th. ▷ **Invariance du rang par isomorphisme**

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ un isomorphisme :

- **dimension d'un sous-espace vectoriel**

  $\forall\ A$ **SEV** E : $\dim(A) = \dim\Big(f(A)\Big)$
- **rang d'une famille de vecteurs**

  Pour toute famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E : $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \operatorname{rg}\Big(f(\mathcal{F})\Big)$
- **rang d'une application linéaire**

  $\forall\ \varphi \in \mathcal{L}(H,E)$: $\operatorname{rg}(\varphi) = \operatorname{rg}(f \circ \varphi)$
  $\forall\ \psi \in \mathcal{L}(F,G)$: $\operatorname{rg}(\psi) = \operatorname{rg}(\psi \circ f)$

3. Il est fortement conseillé de consulter l'exercice **"Complément à la formule du rang"** page 290

Th. ▷ **Caractérisation des isomorphismes**

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de <u>même</u> dimension <u>finie</u>, alors, il y a équivalence entre :

i) f est injective

ii) f est surjective

iii) f est bijective

iv) $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$

v) f est inversible à droite

vi) f est inversible à gauche

Test 542 La dérivation est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Est-elle injective ? surjective ? Ceci est-il en contradiction avec le théorème précédent ?

Test 543 Vérifier la formule du rang avec $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z, x + y + z)$$

Test 544 Soit f un endomorphisme de E, avec E de dimension finie. Pourquoi la formule du rang ne prouve-t-elle pas que $E = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$?

19.2.4 Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

Th. ▷ **Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$**

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies. Alors le $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et on a :

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim(E) \times \dim(F)$$

19.2.5 Recollement linéaire d'applications linéaires

Th. ▷ **Recollement linéaire d'applications linéaires**

Si $E_1, \cdots, E_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et si $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ pour tout i, alors il existe une et une seule application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u_{|E_i} = u_i$ pour tout i.

19.3 Hyperplans

19.3.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Un **hyperplan** de E est un **SEV** de E de dimension $n-1$.

Th. ▷ **Caractérisation d'un hyperplan**

H **SEV** de E est un hyperplan de E ssi
il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$.

Plus précisément :

Si H est un hyperplan de E, pour toute droite vectorielle D
$$E = H \oplus D \quad \Leftrightarrow \quad D \not\subset H$$

Généralisation de la définition d'hyperplan :

Si E est de dimension quelconque :

un **hyperplan** de E est un **SEV** supplémentaire d'une droite vectorielle.

Remarque

En sup, on peut montrer qu'un SEV admet un supplémentaire s'il est SEV d'un espace de dimension finie à l'aide du théorème de la base incomplète. Pour le démontrer en dimension infinie, cela nécessite l'axiome du choix ou le lemme de Zorn.

Test 545 Soit E de dimension finie n. H et H' sont deux hyperplans distincts de E. Montrer que $\dim(H \cap H') = n-2$.

Test 546 Justifier que $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \ | \ P(1) = 0 \right\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$.

19.3.2 Hyperplans et formes linéaires

Th. ▷ **Noyau d'une forme linéaire**

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Si φ est une forme linéaire non nulle, alors
$\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ est un hyperplan de E

Test 547 Montrer que les **SEV** suivants sont des hyperplans :

- $H = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ | \ f(1) = 0 \right\}$
- $K = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \ | \ P'(2) = 0 \right\}$ (avec $n \geqslant 1$)

Th. ▷ **Formes linéaires de même noyau**

Pour tout hyperplan H de E :

- il existe des formes linéaires $\varphi \in E^*$ telles que $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = H$
- de plus, toutes ces formes linéaires sont proportionnelles

19.3.3 Équations d'hyperplans (en dimension finie)

Le théorème précédent montre que :

- Un sous-espace vectoriel de E est un hyperplan si et seulement si son équation cartésienne est de la forme

$$a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \cdots + a_n\,x_n = 0\,, \quad (a_1, a_2, \cdots, a_n) \neq (0, 0, \cdots, 0)$$

- Deux équations cartésiennes représentent le même hyperplan ssi elles sont proportionnelles.

Test 548 Soit f une forme linéaire de $\mathbb{R}^2$ telle que $f(1,1) = 0$ et $f(1,2) = 1$.
Donner une équation de son noyau.

Test 549 $\Big\{(1,0,1,0), (0,1,0,1), (1,0,0,1)\Big\}$ est une base de l'hyperplan H de $\mathbb{R}^4$. En trouver une équation en procédant
(1) par identification **(2)** par combinaisons linéaires.

19.3.4 Intersection de m hyperplans

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie.

- Soient $H_1, \cdots, H_m$ des hyperplans de E, alors :

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) \geqslant \dim E - m$$

- Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - m$, alors il existe m hyperplans $H_1, \cdots, H_m$ de E tels que $F = \bigcap\limits_{i=1}^{m} H_i$.

19.4 Exercices

Espaces de dimension finie

Exercice 1

Bases et familles maximales :

Dans un espace vectoriel E :

• Montrer qu'une famille libre **maximale** (c'est-à-dire que toute sur-famille stricte n'est plus libre) est une base de E.

• Montrer qu'une famille génératrice **minimale** (c'est-à-dire que toute sous-famille stricte n'est plus génératrice) est une base de E

Exercice 2

Construction de bases pour traiter les dimensions : [4]

$f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ où E, F, G sont trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
Montrer : $\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Ker}(g)$.

Exercice 3

Utilisation d'une restriction pour traiter les dimensions :

Reprendre l'exercice précédent en utilisant $\overline{g}$, restriction de g à $\operatorname{Im}(f)$.

Exercice 4

E est de dimension finie. F et G sont deux sous-espaces vectoriels de même dimension. Montrer l'existence d'un supplémentaire commun à F et à G .

Exercice 5

Complément à la formule du rang : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$:

Montrer que si $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont de dimensions finies, alors E est de dimension finie.

Exercice 6

Hyperplans en dimension infinie :

Montrer que $H = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1) = 0 \right\}$ est un hyperplan de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (on remarquera que, pour toute fonction f on peut trouver une fonction constante k telle que $f - k \in H$)

Exercice 7

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{u} = (1,0,1,0),\ \overrightarrow{v} = (0,1,-1,0),\ \overrightarrow{w} = (1,1,1,1),\ \overrightarrow{x} = (0,0,1,0),\ \overrightarrow{y} = (1,1,0,-1)$$

Puis on pose $F = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ et $G = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$.
Déterminer les dimensions de F, G, $F + G$ et $F \cap G$.

Applications linéaires en dimension finie

Exercice 8

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de E. On considère l'endomorphisme de E défini par

$$s(\overrightarrow{e_1}) = 2\overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_3}, \qquad s(\overrightarrow{e_2}) = 2\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_3}, \qquad s(\overrightarrow{e_3}) = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$$

4. On considère une base du plus petit SEV qu'on complète en base des espaces le contenant.

1. Soit $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$. Exprimer $s(\overrightarrow{u})$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}\,(s + 3Id_E)$, puis une base de $\text{Ker}\,(s - 2Id_E)$.
3. Montrer que $E = \text{Ker}\,(s + 3Id_E) \oplus \text{Ker}\,(s - 2Id_E)$.
4. Montrer que $s^2 + s - 6Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
5. En déduire que s est bijective et déterminer s^{-1}.

Exercice 9

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $\text{Im}\ f = \text{Ker}\ f$ si, et seulement si, $f \circ f = 0$ et il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $h \circ f + f \circ h = Id_E$.

Exercice 10

On note $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Pour chaque endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ défini ci-dessous par l'image des coordonnées d'une base, donner une expression explicite de $u(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $u(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$, $u(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_1}$.
2. $u(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1}$, $u(\overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_1}) = 3\overrightarrow{e_1}$.
3. $u(5\overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1} - 4\overrightarrow{e_2}$, $u(4\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1}$.

Exercice 11

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nulle, tel que $f^3 + f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que $E = \text{Ker}\ f \oplus \text{Ker}\,(f^2 + Id)$, et en déduire que $\dim\big(\text{Ker}\ f^2 + Id) \geq 1$.
2. Soit $\overrightarrow{x} \in \text{Ker}\,(f^2 + Id) \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Montrer que $(\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x}))$ est libre.

Exercice 12

Soient E et F deux K-espace vectoriels de dimension finie, et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Vérifier que $\text{Im}\,(f + g) \subset \text{Im}\ f + \text{Im}\ g$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
2. Montrer que $|\,\text{rg}\, f - \text{rg}\, g| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg}\, f + \text{rg}\, g$.
3. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

$$(i) \quad \text{rg}(f + g) = \text{rg}\, f + \text{rg}\, g$$

$$(ii) \quad \text{Im}\ f + \text{Im}\ g = \text{Im}\,(f + g) \quad et \quad \text{Im}\ f \cap \text{Im}\ g = \{0_F\}$$

$$(iii) \quad \text{Ker}\ f + \text{Ker}\ g = E \quad et \quad \text{Ker}\ f \cap \text{Ker}\ g = \text{Ker}\,(f + g)$$

Exercice 13

Endomorphismes nilpotents Soit E un K-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p, c'est-à-dire que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)} \neq u^{p-1}$.

1. u est-il bijectif ?
2. Montrer que $\text{Id}_E - u$ est bijectif, et en préciser l'inverse.
3. Montrer que $\{0_E\} \subsetneq \text{Ker}\ u \subsetneq \text{Ker}\,(u^2) \subsetneq \cdots \subsetneq \text{Ker}\,(u^p) = E$.
4. Soit $\overrightarrow{x} \in E$ tel que $u^{p-1}(\overrightarrow{x}) \neq 0_E$. Montrer que la famille $\big(\overrightarrow{x}, u(\overrightarrow{x}), u^2(\overrightarrow{x}), \ldots, u^{p-1}(\overrightarrow{x})\big)$ est libre. En déduire que si E est de dimension finie n, alors $p \leq n$.
5. On suppose que $n = \dim E = p$. Déterminer le rang de u.

19.5 Exercices Complémentaires

Exercice 1

On se place ici dans le $\mathbb{R}$-ev $E = \mathbb{R}^4$.
Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z + t = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z + t = 0$ et $2x - t = 0\}$.

1. Préciser des bases des sev de $\mathbb{R}^4$ F et G.
2. Déterminer les ensembles $F + G$ et $F \cap G$.

Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f(x, y, z) = (x, y + z, y + z)$.
Prouver que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$, puis que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_n)$ sa base canonique. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par : pour $1 \leq i \leq n - 1$, $f(\overrightarrow{e}_i) = \overrightarrow{e}_n$ et $f(\overrightarrow{e}_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{e}_k$. Calculer $\mathrm{rg}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ puis $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 4

Soit E, un ev de dimension 4, et f un endomorphisme de E tel que $f^3 \neq 0$ et $f^4 = 0$. On dit que f est un endomorphisme *nilpotent* d'ordre 4. Soit $\overrightarrow{x}_0$ tel que $f^3(\overrightarrow{x}_0) \neq \overrightarrow{0}$.

1. Montrer que $(\overrightarrow{x}_0, f(\overrightarrow{x}_0), f^2(\overrightarrow{x}_0), f^3(\overrightarrow{x}_0))$ est une base de E.
2. Montrer que $\mathrm{rg}(f) = 3$.

Exercice 5

Soit E, F, G et H quatre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
On considère des applications linéaires $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $h \in \mathcal{L}(G, H)$.

1. On suppose ici que f est surjective : que peut-on en déduire concernant les dimensions des espaces E et F ? Montrer ensuite l'égalité des rangs : $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(g \circ f)$.
2. On suppose ici que h est injective : que peut-on en déduire concernant les dimensions des espaces F et G ? Montrer ensuite l'égalité des rangs : $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(h \circ g)$.
3. On suppose ici que f et h sont des isomorphismes : que peut-on en déduire concernant les dimensions des espaces E, F et G ? Montrer ensuite l'égalité des rangs : $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(h \circ g) = \mathrm{rg}(g \circ f)$.

Exercice 6

Soit $N_0 = 1$, $N_1 = \dfrac{X}{2}$, $N_2 = \dfrac{(X-1)(X+1)}{4}$ et $N_3 = \dfrac{X(X-1)(X+1)}{6}$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (N_0, N_1, N_2, N_3)$ est une base de $E = \mathbb{R}_3[X]$.
2. On pose : $f(P) = P(X + 1) - P(X - 1) = P \circ (X + 1) - P \circ (X - 1)$.
   Calculer $f(N_i)$ pour $i = 0 \ldots 3$ et résoudre $f(P) = aX^2 + bX + c$.

Exercice 7

Faisceau d'hyperplans.
E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts d'équations cartésiennes respectives $\varphi_1(x, y, z) = 0$ et $\varphi_2(x, y, z) = 0$.
On note $\Delta = H_1 \cap H_2$.

1. Justifier que $\dim \Delta = n - 2$.

2. Justifier que, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, $\quad \varphi_1(x,y,z) + \lambda\, \varphi_2(x,y,z) = 0$ est l'équation d'un hyperplan H_λ, et que $\Delta \subset H_\lambda$.

   $\Big(H_\lambda\Big)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est un **faisceau d'hyperplans**.

3. Réciproquement, tout hyperplan contenant Δ est-il un hyperplan du faisceau ?
4. *Application :* dans $\mathbb{R}^3$, trouver une équation cartésienne de plan contenant le vecteur $\overrightarrow{j}$ et la droite $D : \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$.

Exercice 8

Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{]-1,1[}$ engendré par les quatre fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad f_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad f_3 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f_4 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 9

Soient E, F et G trois K-espace vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

1. Vérifier que $\mathrm{Ker}\, \big(g|_{\mathrm{Im}\, f}\big) = \mathrm{Ker}\ g \cap \mathrm{Im}\ f$ et $\mathrm{Im}\, \big(g|_{\mathrm{Im}\, f}\big) = \mathrm{Im}\,(g \circ f)$.
2. En déduire $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\, f - \dim \big(\mathrm{Ker}\ g \cap \mathrm{Im}\ f\big)$.
3. Montrer que $\mathrm{rg}\, g + \mathrm{rg}\, f - \dim F \leq \mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}\, g, \mathrm{rg}\, f)$.

Exercice 10

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et D la dérivation usuelle de E de E.
Existe-t-il $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $T \circ T = D$ (on travaillera avec les noyaux éventuels, pour obtenir une contradiction) ?

Exercice 11

Applications linéaires de rang 1 et formes linéaires

1. Soit E un K-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ et une forme linéaire $\phi \in E^* := \mathcal{L}(E, K)$ tels que $f(\overrightarrow{x}) = \phi(\overrightarrow{x})\, \overrightarrow{u}$ pour tout $\overrightarrow{x} \in E$. Le couple $(\overrightarrow{u}, \phi)$ est-il unique ?
2. On suppose que E est de dimension 3, et soit $f \in \mathcal{L}(E) \setminus \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$ telle que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que f est de rang 1.

Exercice 12

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que

$$\forall \overrightarrow{x} \in E, \quad \exists p_x \in \mathbb{N}^*, \quad u^{p_x}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$$

Montrer que $\exists p \in \mathbb{N}^*, \quad u^p = Id_E$.