

Chapitre 15

Espaces vectoriels

*Pour comprendre ce chapitre, il faut toujours visualiser les définitions, les propriétés et les théorèmes en s'aidant de l'ensemble des vecteurs du plan.
Ce chapitre ne fait que généraliser toutes les manipulations classiques.*

15.1 Espace vectoriel

15.1.1 Structure

$\mathbb{K}$ est un corps commutatif¹.

un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (ou espace vectoriel sur $\mathbb{K}$)

est un ensemble E muni de deux lois de compositions :

- une loi interne, généralement notée "+", telle que $(E, +)$ est un groupe abélien
- une loi externe à opérateurs dans $\mathbb{K}$, généralement notée "·" (mais aussi sans aucun symbole), qui vérifie :
 - ▷ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad \lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$
 - ▷ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in E, \quad (\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}$
 - ▷ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in E, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}) = (\lambda \mu) \cdot \vec{x}$
 - ▷ $\forall \vec{x} \in E, \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires .

Les éléments de E sont appelés des vecteurs .

Désormais, nous noterons $\lambda \vec{x}$ la loi externe.

Test 415

La structure naturel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$:

montrer que les lois

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

confèrent à $\mathbb{R}^2$ une structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Test 416

En est-il de même avec $\lambda(x, y) = (\lambda x, 0)$? On pourra juste exhiber la condition qui échoue !

Test 417

Dire pourquoi les ensembles suivants ne sont pas des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels :

$\mathbb{Z}$ (les entiers relatifs) $\mathbb{R}_+$ (les réels positifs ou nuls)

15.1.2 Exemples

Ces exemples sont très importants. Ils permettent d'alléger considérablement certaines démonstrations

1. Le programme se limite aux cas où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.



du genre "montrer que ... est un espace vectoriel".

- L'espace nul $\left\{ \vec{0} \right\}$
- L'ensemble des vecteurs du plan (ou de l'espace).
- Tout corps commutatif $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- Muni des opérations usuelles, pour $n \geq 1$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -EV avec :

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{K}^n)^2 \text{ avec } \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \alpha \cdot \vec{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \end{aligned}$$

- Muni des opérations usuelles, l'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ des fonctions définies sur l'intervalle I est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- Plus généralement, l'ensemble $\mathcal{F}(I, E)$ des fonctions définies sur l'intervalle I , à valeurs dans le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- Le sous-ensemble $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ des fonctions dérivables est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- Le sous-ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ (polynômes de degré au plus n) est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Test 418 Muni des opérations usuelles "+" et "×", l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est-il un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel ?

Test 419 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pourquoi l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, de degré égal à n n'est-il pas un espace vectoriel ?

Test 420 $\mathbb{C}$ est-il un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ?
 $\mathbb{R}$ est-il un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ?
 Pouvez-vous généraliser ?

15.1.3 Propriétés élémentaires

- Un espace vectoriel n'est pas vide
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in E, \lambda \vec{x} = \vec{0}_E \Leftrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } \vec{x} = \vec{0}_E$
- $\forall \vec{x} \in E, (-1_{\mathbb{K}}) \vec{x} = -\vec{x}$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \lambda (\vec{x} - \vec{y}) = \lambda \vec{x} - \lambda \vec{y}$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in E, (\lambda - \mu) \vec{x} = \lambda \vec{x} - \mu \vec{x}$

Test 421 Développer $(\lambda + 3\mu) (\vec{u} - 2(\vec{v} - \vec{u}))$

15.1.4 Sous-espace vectoriel

Un sous-espace vectoriel de E (en abrégé : **SEV**) est un sous-ensemble $F \subset E$ tel que les lois de E induisent sur F une structure d'espace vectoriel.

Th. ▷ Caractérisation d'un SEV (version 1)

- $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si
- ▶ $F \neq \emptyset$
 - ▶ F est stable pour la loi interne +
 - ▶ F est stable pour la loi externe ·



Rappel : La multiplication est externe.
 Multiplier deux vecteurs n'a pas de sens.

Th. ▷ **Caractérisation d'un SEV (version 2)**

$F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

► $F \neq \emptyset$

► F est stable par combinaisons linéaires, c'est-à-dire

$$\forall \lambda, \mu, \vec{x}, \vec{y}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \text{ et } \vec{x}, \vec{y} \in F, \Rightarrow \lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \in F$$

Remarque : on peut remplacer la condition $F \neq \emptyset$ par $\vec{0} \in F$.

Test 422

Montrer que ce deuxième critère peut se simplifier en

$$F \text{ SEV de } E \Leftrightarrow \left(\forall (\lambda, \vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{K} \times F \times F, \lambda \vec{x} + \vec{y} \in F \right)$$

Que faire ?

pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel :

- **limiter les calculs** en utilisant (si possible) un espace vectoriel connu.
"être un sous-espace vectoriel" se démontre beaucoup plus rapidement que "être un espace vectoriel".
- **préjuger la linéarité** en regardant les conditions d'appartenance à l'ensemble, sont-elles conservées par addition ou par multiplication par un scalaire ?



Test 423

Les ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels (pour les opérations usuelles) ?

- | | |
|--|--|
| -1- $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0 \right\}$ | -2- $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 4 \right\}$ |
| -3- $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2 \right\}$ | -4- $\left\{ P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = P(2) \right\}$ |
| -5- $\left\{ P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0 \right\}$ | -6- $\left\{ P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 1 \right\}$ |
| -7- $\left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ croissante} \right\}$ | -8- $\left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ monotone} \right\}$ |

15.1.5 Intersection, réunion, produit

- **Intersection :** toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E
- **Réunion :** la réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est pas un sous-espace vectoriel de E , sauf si l'un d'eux contient l'autre.
- **Produit cartésien :** si E et F sont deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$,

alors, les lois
$$\begin{cases} (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}', \vec{y}') = (\vec{x} + \vec{x}', \vec{y} + \vec{y}') \\ \lambda (\vec{x}, \vec{y}) = (\lambda \vec{x}, \lambda \vec{y}) \end{cases}$$
 confèrent à $E \times F$ une structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

15.1.6 Sous-espace engendré par une partie (début)

soit A est un sous-ensemble de l'espace vectoriel E

L'**espace vectoriel engendré par A** , noté $\text{Vect}(A)$

est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A .

$$\text{Ainsi : } I = \text{Vect } A \Leftrightarrow \begin{cases} I \text{ SEV de } E \\ \forall B \text{ SEV de } E, A \subset B \Rightarrow I \subset B \end{cases}$$

Propriétés : $\text{Vect}(A)$ existe et est unique : $\text{Vect } A = \bigcap_{\substack{X \text{ SEV de } E \\ X \supset A}} X$

Test 424

Que se passe-t-il si $A = \emptyset$? On cherche le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant l'ensemble vide...

Test 425

Soit A un sous-ensemble de l'espace vectoriel E .
Montrer que A est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\text{Vect } A = A$

15.2 Combinaisons linéaires

Le programme se limite aux familles indexées par un ensemble fini

15.2.1 Définition

On appelle **combinaison linéaire** des p vecteurs $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p$ de E tout vecteur de $\vec{x} \in E$ qui vérifie $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \vec{x} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{x}_k$

Si A est un sous-ensemble du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , on dit que $\vec{x} \in E$ est combinaison linéaire d'éléments de A si et seulement si il existe une famille finie $\left(\vec{a}_i\right)_{i \in I}$ telle que $\vec{x}$ est combinaison linéaire de cette famille finie. Autrement dit l'ensemble I des indices est un ensemble fini.



Une combinaison linéaire est une somme **finie**.

Test 426

Dans $\mathbb{R}^2$, montrer que $(1, -5)$ est combinaison linéaire de

$$\left\{ (0, 2), (1, 1), (1, 2) \right\}$$

La décomposition est-elle unique ?

Test 427

Dans $\mathbb{R}[X]$,
Montrer que le polynôme X est combinaison linéaire d'éléments de $A = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 1 \right\}$.
Montrer que le polynôme X n'est pas combinaison linéaire d'éléments de $B = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0 \right\}$

Test 428

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(2x)$ ne peut pas être combinaison linéaire des deux fonctions $\sin$ et $\cos$?

15.2.2 Famille libre, liée

Pour un vecteur $\vec{x}$ combinaison linéaire de la famille $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p$, il existe une décomposition de $\vec{x}$ en $\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p$,

mais cette décomposition n'est peut-être pas unique.

Ceci interdit l'identification

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{x}_k = \sum_{k=1}^p \mu_k \vec{x}_k \not\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$$

avec le cas particulier

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{x}_k = \vec{0}_E \not\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = (0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}})$$

Définitions : soit $\mathcal{S} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p)$ famille finie non vide de vecteurs de E .



- $\mathcal{S}$ est une **famille libre** (ou **linéairement indépendante**)
si et seulement si $\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$,

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{x}_k = \vec{0}_E \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = (0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}})$$

- $\mathcal{S}$ est une **famille liée** (ou **linéairement dépendante**) dans le cas contraire.

Définitions : soit $\mathcal{S}$ une famille **infinie** de vecteurs de E .



- $\mathcal{S}$ est une **famille libre** si et seulement si toute sous-famille finie de $\mathcal{S}$ est libre.
- $\mathcal{S}$ est une **famille liée** si et seulement si il existe une sous-famille finie de $\mathcal{S}$ liée.

Test 429 Traduire mathématiquement : la famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p)$ est liée.

Test 430 $ABCD$ est un carré. Dire pourquoi les familles suivantes sont liées
 $-1 - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \quad -2 - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$
 On commencera par faire une figure.

Th. $\triangleright$ **Décomposition sur une famille libre**

Si la famille finie non vide $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p)$ est libre, alors

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{x}_k = \sum_{k=1}^p \mu_k \vec{x}_k \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$$

(pour une famille libre, si la décomposition existe, elle est **unique**.)

Test 431 Soit $\vec{u} = (1, 2, -1, 4)$, $\vec{v} = (1, 0, 1, -2)$, $\vec{w} = (3, 1, 2, -3)$ vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
 Calculer $2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}$ et $\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$. Qu'en déduisez-vous ?

Propriétés

- Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- le singleton $\{\vec{x}\}$ est libre si et seulement si $\vec{x} \neq \vec{0}_E$
- Toute famille contenant $\vec{0}_E$ est liée.
- Toute famille contenant deux vecteurs égaux est liée
- Une famille est liée si et seulement si un des vecteurs est combinaison linéaire des autres vecteurs.



Plus précisément : si, en ajoutant un vecteur à une famille libre, cette famille devient liée, alors le vecteur ajouté est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\} \text{ libre} \\ \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p, \vec{x}\} \text{ lié} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{x} \text{ est combinaison linéaire de } \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$$



Test 432 Soit $\vec{u}_1 = (1, 0, 1, 2)$, $\vec{u}_2 = (1, 2, 3, -2)$, $\vec{u}_3 = (0, 1, 3, 2)$, $\vec{u}_4 = (4, 1, 5, 6)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$. $\vec{u}_1$ est-il combinaison linéaire des trois autres vecteurs ?
 Même question pour $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ et pour $\vec{u}_4$.
 (Soyez futés : on peut éviter la moitié des calculs.)

Proportionnalité



Pour une famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ de **deux vecteurs**

$(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ liée $\Leftrightarrow \vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont proportionnels

La proportionnalité disparaît avec les familles de trois vecteurs ou plus.

Test 433

Dans $\mathbb{R}^3$: à quelle condition sur x, y et z la famille $\left((1, 2, 3), (x, y, z)\right)$ est-elle liée ?

Test 434

Dans $\mathbb{R}^4$: $\vec{u} = (3, -9, -6, 1)$, $\vec{v} = (2, -1, 1, -1)$, $\vec{w} = (0, 3, 3, -1)$.

Deux des trois vecteurs sont-ils proportionnels ?

La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle libre ou liée ?

Th. ▷ Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts

Soit I un ensemble et soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille de polynômes non nuls vérifiant

$$\forall (i, j) \in I^2 \text{ tel que } i \neq j, \deg(P_i) \neq \deg(P_j)$$

alors $(P_i)_{i \in I}$ libre.

15.2.3 Sous-espace engendré par une partie (suite)

Th. ▷ Espace engendré par une partie

L'espace vectoriel engendré par une partie A non vide de E , est constitué par l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de A .

$$\vec{u} \in \text{Vect}(A) \Leftrightarrow \vec{u} \text{ est combinaison linéaire de vecteurs de } A$$



Exemples :

1. Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$:

- le **SEV** engendré par $\{1\}$ est $\mathbb{R}$
- le **SEV** engendré par $\{i\}$ est l'ensemble des imaginaires purs
- le **SEV** engendré par $\{1, i\}$ est $\mathbb{C}$

2. **Droite vectorielle :**

- si $\vec{a} \neq \vec{0}$ est un élément d'un espace vectoriel E , alors le **SEV** engendré par $\vec{a}$ est $\text{Vect } \vec{a} = \{\lambda \vec{a} \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K} \vec{a}$.
On l'appelle droite vectorielle engendrée par $\vec{a}$.
- si $\vec{b}$ est un élément non nul de cette droite, alors $\text{Vect } \vec{a} = \text{Vect } \vec{b}$.
Autrement dit, une droite vectorielle est engendrée par n'importe lequel de ses vecteurs non nuls.



Une astuce

Ceci permet parfois de montrer qu'un ensemble F donné est un espace vectoriel :

- on justifie que F est inclus dans un espace vectoriel connu.
- On montre que F est constitué de toutes les combinaisons linéaires d'une famille donnée.

Test 435

Montrer que l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{2x}$ où α et β sont des réels quelconques est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Test 436

1. On pose $\forall a \in \mathbb{R}, f_a : x \mapsto \sin(a + x)$. Vérifier que $f_a(\mathbb{R}) = [-1; 1]$.

En déduire que l'ensemble des fonctions f_a n'est pas un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2. Qu'en est-il de l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto a \sin(b + x)$, $a, b \in \mathbb{R}$?

Famille génératrice : la famille $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est génératrice de E si et seulement si $E = \text{Vect}((\vec{x}_i)_{i \in I})$

Remarque

On peut aussi écrire $\forall \vec{x} \in E, \exists p \in \mathbb{N}, \exists (k_1, k_2, \dots, k_p) \in I^p, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \vec{x} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{x}_{k_i}$

Test 437

Montrer que $\{(1, 2), (2, 1)\}$ engendre $\mathbb{R}^2$.
Qu'en est-il pour $\{(1, 2), (2, 1), (1, 1)\}$

Test 438

Montrer que, dans $\mathbb{R}^3$, $\{(1, 1, 2), (1, -1, 0)\}$ et $\{(1, 2, 3), (-1, 2, 1)\}$ engendrent le même sous-espace vectoriel.

Propriétés

- Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est génératrice de E

Si $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p)$ engendre E et si $\vec{x}_p$ est combinaison linéaire de $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{p-1})$, alors $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{p-1})$ engendre E

**15.2.4 Bases**

Une base de l'espace vectoriel E est une famille libre et génératrice de E .

Rappel

Une base est une *famille* de vecteurs, et non un *ensemble* de vecteurs.

Si on change l'ordre des vecteurs de la famille :

- on obtient une famille **différente**
- mais qui reste de même nature (libre, liée, génératrice ou non)

Donc, pour une base $\mathcal{B}$, l'ordre des vecteurs compte.

Ainsi : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ sont deux bases différentes.

Test 439

L'ensemble $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$ est un **SEV** de $\mathbb{R}^3$.
Donnez-en deux bases très différentes.

**Quelques bases canoniques indispensables**

- $((1, 0), (0, 1))$ est la base canonique de $\mathbb{K}^2$

Remarque

Un vecteur de $\mathbb{R}^2$ est un couple de réels.

Dans cette base canonique, le vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ a pour coordonnées x et y .

Ainsi, **dans la base canonique**, il y a "confusion" entre le vecteur (x, y) et ses coordonnées (x, y) .



- Plus généralement : $((1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1))$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$
- $(1, X, X^2, \dots, X^n, \dots)$ est la base canonique de $\mathbb{K}[X]$
- $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$

Test 440

$\vec{u} = (2, 1, 1)$, $\vec{v} = (-1, 1, 1)$, $\vec{w} = (1, 2, 2)$ sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle libre ? génératrice de $\mathbb{R}^3$? est-ce une base de $\mathbb{R}^3$?

Test 441

Dans $\mathbb{R}^2$, pour quelles valeurs du réel m la famille constituée de $\vec{u} = (m, 1)$ et $\vec{v} = (1, m)$ est-elle libre ? Montrer qu'elle est alors génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Th. ▷ **Bases de polynômes à degrés échelonnés**

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et une famille $(P_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ de $\mathbb{K}_n[X]$ telle que $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\deg(P_k) = k$ alors cette famille est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Soient une famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\deg(P_k) = k$ alors cette famille est une base de $\mathbb{K}[X]$.

**15.2.5 Coordonnées**

Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une base du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , tout vecteur $\vec{u} \in E$ se décompose de manière unique sous la forme $\vec{u} = \sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.
 $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les **coordonnées** (ou encore les **composantes**) de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Important:

$$\text{On peut noter } \vec{u} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ avec } \vec{u} = \sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k.$$



On peut préciser en disant que x_k est la coordonnée de $\vec{u}$ relative au vecteur $\vec{e}_k$ de la base $\mathcal{B}$.

Th. ▷ **Coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$, de $\lambda \vec{u}$**

Relativement à une base $\mathcal{B}$ de E :

- Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont obtenues en ajoutant (terme à terme) les coordonnées de chaque vecteur.
- Les coordonnées de $\lambda \vec{u}$ sont obtenues en multipliant par λ les coordonnées de $\vec{u}$.

Test 442

Relativement à la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ de E , quelles sont les coordonnées des vecteurs suivants
 $\vec{i}$? $\vec{j}$? $2\vec{j}$? $\vec{j} - \vec{i}$? $\vec{0}$? $2(\vec{i} + \vec{j}) - 3(\vec{i} - \vec{j})$?

Test 443

Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de E et $\vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j}$, montrer que $(\vec{i}, \vec{k})$ est une base de E . Quelles sont les coordonnées de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ dans cette dernière base ?

Test 444

Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E . On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(1, 2)$ et $(3, -1)$ relativement à $\mathcal{B}$.
 • Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E
 • Donner les coordonnées de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Test 445

Montrer que $E = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = P(1) \right\}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et en donner une base.



Attention

dans $\mathbb{R}^2$ rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$, il ne faut pas confondre entre

- le couple $\vec{u} = (x, y)$ $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ est donc un vecteur
- le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (x, y) en général $\vec{v} \neq (x, y)$

Pourtant : si $(\vec{i}, \vec{j})$ est la **base canonique** de $\mathbb{R}^2$, alors $\vec{u} = \vec{v}$:
le vecteur de coordonnées (x, y) est le couple (x, y)
(Cette remarque s'adapte facilement à $\mathbb{R}^n$.)

15.3 Sous-espaces supplémentaires

15.3.1 Somme de deux SEV

A et B sont deux **SEV** de E .

La somme des deux sous-espaces est l'ensemble noté $A + B$ défini par

$$A + B = \left\{ \vec{u} \in E \mid \exists (\vec{a}, \vec{b}) \in A \times B, \vec{u} = \vec{a} + \vec{b} \right\}$$

$$\text{On peut tolérer l'écriture } A + B = \left\{ a + b \mid a \in A, b \in B \right\}$$

Important

Ainsi, tout vecteur $\vec{u} \in A + B$ peut se décomposer en $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$.

Mais cette décomposition n'est peut-être pas unique

Généralisation

Cette définition se généralise à n SEV.

Th. ▷ Somme de deux SEV

Si A et B sont deux **SEV** de E , alors $A + B = \text{Vect}(A \cup B)$:

- $A + B$ est un **SEV** de E
- $A + B$ contient $A \cup B$
- $A + B$ est le plus petit **SEV** contenant $A \cup B$.

Test 446

A est un **SEV** de E . Justifier : (1) $A + \left\{ \vec{0} \right\} = A$ (2) $A + A = A$

Test 447

A, B et C sont trois **SEV** de E .

Montrer que $A + (B \cap C) \subset (A + B) \cap (A + C)$.

(On pourra aussi montrer par un contre-exemple que l'égalité est fausse.)

A et B sont deux **SEV** de E .

On dit que A et B sont en somme directe si et seulement si s'il y a unicité (si existence) de la décomposition de tout élément $\vec{u}$ de $A + B$ sous la forme $\vec{a} + \vec{b}$ avec $(\vec{a}, \vec{b}) \in A \times B$.
Lorsque c'est le cas, la somme $A + B$ est notée $A \oplus B$.

Corollaire (Caractérisation de la somme directe)

A et B sont en somme directe si, et seulement si :

$$\forall \vec{a} \in A, \forall \vec{b} \in B, \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \implies \vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$$

Corollaire (Caractérisation de la somme directe de deux sous-espaces)

A et B sont en somme directe si, et seulement si :

$$A \cap B = \left\{ \vec{0}_E \right\}$$

15.3.2 Espaces supplémentaires

A et B sont deux **SEV** de E .

A et B sont **supplémentaires** dans E si et seulement si

$$\begin{cases} A + B = E \\ A \cap B = \left\{ \vec{0} \right\} \end{cases}$$

On note alors $E = A \oplus B$ ²

Exemples

- Les ensemble $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ des fonctions paires et impaires sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Dans le plan vectoriel, deux droites vectorielles distinctes sont supplémentaires.

Th. $\triangleright$ **Unicité de la décomposition dans $E = A \oplus B$**

$$E = A \oplus B \Leftrightarrow \forall \vec{u} \in E, \exists! (\vec{a}, \vec{b}) \in A \times B, \vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$$

Utilité : Ceci est un moyen de démontrer que $E = A \oplus B$

Inversement, $E = A \oplus B$ donne **l'existence** d'une décomposition $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ et son unicité, ce qui permet d'**identifier**.

Test 448

Montrer que les **SEV** $A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 2z \right\}$ et

$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2z = 0 \right\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Décomposer $(1, 2, 3)$ sur ces deux espaces.

Th. $\triangleright$ **Caractérisation de $E = A \oplus B$ par les bases**

Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k)$ et $(\vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \dots, \vec{e}_n)$ sont des bases respectivement de A et de B , alors :

$$E = A \oplus B \Leftrightarrow (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n) \text{ est une base de } E$$

formulation rapide

Deux espaces sont supplémentaires dans E si et seulement si la "juxtaposition" des bases donne une base de E



2. La notion générale de somme directe est hors programme.

15.4 Exercices

Exercice 1

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ 2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 4\}$ 3. $\{(t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ 4. $\{(t, 3t + 4) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ 5. $\{(2t, 3t) \mid t \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$ 6. $\{(2t, 4t) \mid t \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathbb{R}^2$ 7. $\{(t, 0) \mid t \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$ 8. $\{(x, y) \mid xy = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ | <ol style="list-style-type: none"> 9. $\{(x, y) \mid xy = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ 10. $\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim u_n = 0\}$ 11. L'ensemble des applications positives sur $\mathbb{R}$. 12. L'ensemble des applications croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. 13. L'ensemble des applications monotones de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. |
|--|--|

Exercice 2

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissantes tels que $f = g - h$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel pour les lois usuelles.

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans l'espace vectoriel E .

1. A et B étant deux parties complémentaires d'un ensemble C , avec A , B et C non vides.

$$E = \mathcal{F}(C, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^C, \quad F = \{f \in E \mid f|_B = 0\}, \quad G = \{f \in E \mid f|_A = 0\}$$

2. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, x_1 et x_2 sont deux réels distincts fixés, F est l'ensemble des fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $G = \{f \in E \mid f(x_1) = f(x_2) = 0\}$

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces vectoriels de E telle que $\forall n \in \mathbb{N}, F_n \subset F_{n+1}$. On pose :

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 5

Etudier la liberté et le caractère générateur des familles suivantes de E .

1. $((1, 1), (2, 3), (4, 5)), E = \mathbb{R}^2$.
2. $((1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3)), E = \mathbb{R}^3$.
3. $(f_k : x \mapsto \exp(x + k))_{1 \leq k \leq 50}, E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. (Pour génératrice, on pourra poser une combinaison linéaire donnant la fonction constante 1 et regarder en 2 valeurs particulières de x .)
4. $(g_k : x \mapsto \exp(kx))_{1 \leq k \leq 100}, E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. (Pour la liberté, on pourra opérer par récurrence. Pour génératrice, on pourra poser une combinaison linéaire donnant la fonction constante 1 et regarder la limite en $+\infty$.)
5. $(h_k : x \mapsto \cos(kx))_{1 \leq k \leq 394}, E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. (Pour la liberté, on pourra opérer par récurrence.)
6. $(j_k : x \mapsto |x - k|)_{1 \leq k \leq 8}, E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. (Pour la liberté et pour génératrice, on pourra opérer par l'absurde. Des arguments de dérivabilité et de comportement en $+\infty$ peuvent permettre de conclure.)

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel, et (x, y, z) une famille libre de E . On pose $u = x + y$, $v = y + z$ et $w = z + x$. Montrer que (u, v, w) est une famille libre.

Exercice 7

Déterminer des bases des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

- | | |
|---|--|
| 1. $E_1 = \{(x, y, z, t) \mid x = y = z = t\}.$ | 3. $E_3 = \{(x, y, z, t) \mid x + 2y = 0, \quad 3z + t = 0\}.$ |
| 2. $E_2 = \{(x, y, z, t) \mid x + y + z + t = 0\}.$ | 4. $E_4 = \{(x, y, z, t) \mid x + y = z - t = x + t\}.$ |

Exercice 8

Décrire les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants par des (systèmes d') équations.

- | | |
|---|--|
| 1. $F_1 = \text{Vect}((0, 0, 1, 1)).$ | 4. $F_4 = \text{Vect}((1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)).$ |
| 2. $F_2 = \text{Vect}((1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0)).$ | 5. $F_5 = \text{Vect}(S^3),$ avec $S^3 = \{x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}.$ |
| 3. $F_3 = \text{Vect}((1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), (3, 4, 5, 6)).$ | |

Exercice 9

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ usuel, on pose $u_1 = (-1, 0, 1, 1)$, $u_2 = (1, -2, 3, 0)$ et

$$E_1 = \{(x, y, z, t) \mid x + y = z - t \text{ et } x + 2y = z\} \quad E_2 = \text{Vect}(u_1, u_2)$$

Montrer que E_1 est un espace vectoriel, et que $E = E_1 \oplus E_2$.

Exercice 10

Soit E l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, F le sev engendré par les fonctions $f_n : x \mapsto \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, et G le sev engendré par les fonctions $g_n : x \mapsto \cos^n x$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $F = G$.

Exercice 11

Soient $E = \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et F défini par $F = \{f \in E \text{ tel que } f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E .

Exercice 12

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions dérivables à tout ordre. Vérifier que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et dire dans chaque cas si les propriétés suivantes définissent un sous-espace vectoriel.

- | | | |
|----------------------------------|-----------------------------|----------------------|
| 1. $f(1) = 2f(0)$ | 3. $f(t)^2 = 3f(t)$ | 5. $f(t^2) = f(t+2)$ |
| 2. $f''(t) + 3f'(t) + 2f(t) = 0$ | 4. $t \times f(2-t) = f(t)$ | |

15.5 Exercices Complémentaires

Structure d'espace vectoriel

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

On munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition usuelle : $(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}', \vec{y}') = (\vec{x} + \vec{x}', \vec{y} + \vec{y}')$ et de la multiplication externe par les complexes définie par : $(a + ib) \cdot (\vec{x}, \vec{y}) = (a \cdot \vec{x} - b \cdot \vec{y}, a \cdot \vec{y} + b \cdot \vec{x})$.

Montrer que $E \times E$ est alors un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Celui-ci est appelé complexifié de E .

Sous-espaces vectoriels

Exercice 2

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

- | | |
|--|---|
| 1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ | 3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ |
| 2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ | 4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ |

Exercice 3

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $F \cap G$.

Exercice 4

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

- | | |
|--|--|
| 1. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ bornée}\}$ | 3. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ convergente}\}$ |
| 2. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ monotone}\}$ | 4. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ arithmétique}\}$ |

Exercice 5

Montrer que les parties de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ suivantes sont des sous-espaces vectoriels avec $a < b$:

- | | |
|---|---|
| 1. $F = \{f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \mid f'(a) = f'(b)\}$ | 2. $G = \left\{f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \mid \int_a^b f(t) dt = 0\right\}$ |
|---|---|

Exercice 6

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E .

Montrer que $F \cap G = F + G \Leftrightarrow F = G$.

15.5.1 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Exercice 7

Soient $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 8

Soient $F = \left\{ f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C}) \mid \int_{-1}^1 f(t) dt = 0 \right\}$ et $G = \{f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C}) \mid f \text{ constante}\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C})$.

Exercice 9

Soient $H = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$ et $\vec{u} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{K}^n$.
Montrer que H et $\text{Vect}(\vec{u})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 10

Soient $E = \mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R})$, $F = \{f \in E \mid f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\}$ et $G = \text{Vect}(\sin, \cos)$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .