Chapitre 14

Développements limités

Ce chapitre traite de propriétés locales...
Elles ne sont pas utilisables partout, mais seulement "aux environs" d'un point donné.

Pour étudier une fonction f au voisinage d'un réel a, nous supposerons que f est définie au **voisinage de a**, c'est-à-dire que son ensemble de définition (noté $\mathcal{D}_f$) vérifie au moins l'un des trois cas ci-dessous :[1]

$\exists\, h > 0 \quad]\, a - h\,,\, a\,[\cup]\, a\,,\, a + h\,[\subset \mathcal{D}_f$

$\exists\, h > 0 \quad]\, a\,,\, a + h\,[\subset \mathcal{D}_f$ — voisinage à droite

$\exists\, h > 0 \quad]\, a - h\,,\, a\,[\subset \mathcal{D}_f$ — voisinage à gauche

Cette notion se généralise pour les voisinages de l'infini :

$\exists\, h \in \mathbb{R} \quad]\, h\,,\, +\infty\,[\subset \mathcal{D}_f$ — voisinage de $+\infty$

$\exists\, h \in \mathbb{R} \quad]\, -\infty\,,\, h\,[\subset \mathcal{D}_f$ — voisinage de $-\infty$

Nous ne considérerons que des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Les notions d'intérieur et d'adhérence d'une partie sont hors programme

14.1 Comparaison des fonctions

14.1.1 Fonction dominée, fonction négligeable

Une fonction f définie sur $\mathcal{D}$ est une **fonction bornée[2] sur $\mathcal{D}$**

si et seulement si $\quad \exists\, M \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x \in \mathcal{D}, \quad \big|f(x)\big| \leqslant M$

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire $a \in \mathbb{R}$ ou $a = +\infty$ ou $a = -\infty$).
f et φ sont deux fonctions définies sur un même voisinage $\mathcal{V}$ de a.
On suppose de plus que φ ne s'annule pas sur $\mathcal{V}$. On dit que :

f est dominée par φ au voisinage de a

si et seulement si $\dfrac{f}{\varphi}$ est bornée au voisinage de a

1. Vous remarquerez que l'appartenance de a à $\mathcal{D}_f$ importe peu.
2. Pour plus de précisions : voir 10.1.3 page 144 et voir 10.4.2 page 156

On utilise la notation de **Landau** [3] $f = \underset{a}{O}(\varphi)$ ou $\boxed{f = O(\varphi)}$

ou encore la notation de **Hardy** [4] $f \underset{a}{\preccurlyeq} \varphi$ ou $f \preccurlyeq \varphi$

f est négligeable devant φ [5] au voisinage de a

si et seulement si $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{\varphi} = 0$

On utilise la notation de **Landau** $f = \underset{a}{o}(\varphi)$ ou $\boxed{f = o(\varphi)}$

ou encore la notation de **Hardy** $f \underset{a}{<<} \varphi$ ou $f << \varphi$

Note importante : Il est parfois plus commode d'écrire $f = \varphi\, \varepsilon$ où $\lim\limits_{a} \varepsilon = 0$

Exemples

Au voisinage de 0 : $2\,x = O(x)$, $x = O(2\,x)$, $\sin x = O(1)$

$x^2 = O(x)$ mais $x \neq O(x^2)$, $x^2 = o(x)$

Au voisinage de l'infini : $x = O(e^x)$, $2\,x^2 + 7\,x - 3 = O(x^2)$

$x = O(x^2)$, $x = o(x^2)$

Attention

Les notations de Landau "o" et "O" peuvent prêter à confusion car elles indiquent un état et non une valeur :

$$\left.\begin{array}{l} f = o(h) \\ g = o(h) \end{array}\right\} \not\Rightarrow f = g$$

Test 386

Classer les fonctions suivantes de telle sorte que chaque fonction soit négligeable devant la suivante, au voisinage de 0, pour $x > 0$:

$$x \mapsto x,\ x \mapsto x^2,\ x \mapsto \sqrt{x},\ x \mapsto \cos(x),\ x \mapsto \ln(x)$$

Même question au voisinage de $+\infty$

Test 387

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que, au voisinage de 0 :

1 : $f(x) = O(1)$ **2** : $f(x) = o(1)$

14.1.2 Quelques comparaisons utiles :

- Au voisinage de 0
  - $\forall\, \alpha, \beta \quad \alpha < \beta \Rightarrow x^\beta = o(x^\alpha)$
- Au voisinage de $+\infty$
  - $\forall\, \alpha, \beta \quad 0 < \alpha < \beta \Rightarrow \alpha^x = o(\beta^x)$
  - $\forall\, \alpha, \beta \quad \alpha < \beta \Rightarrow x^\alpha = o(x^\beta)$
  - $\forall\, \alpha, \beta, \gamma, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0 \Rightarrow \ln^\alpha x = o(x^\beta)$ et $x^\beta = o(e^{\gamma\, x})$

Quelques règles de calculs : (au voisinage d'un même point a)

- Espace vectoriel des fonctions négligeables devant φ
  - $f = \underset{a}{o}(\varphi)$ et $g = o(\varphi) \Rightarrow f + g = \underset{a}{o}(\varphi)$ (valable avec "O")
  - $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f = \underset{a}{o}(\varphi) \Rightarrow \lambda\, f = \underset{a}{o}(\varphi)$ (valable avec "O")
- produit, transitivité, etc.
  - $f = \underset{a}{o}(\varphi) \Rightarrow f = \underset{a}{O}(\varphi)$
  - $f = \underset{a}{o}(\varphi)$ et $g = \underset{a}{O}(\psi) \Rightarrow f\, g = \underset{a}{o}(\varphi\, \psi)$ (valable avec "O")
  - $f = \underset{a}{o}(g)$ et $g = \underset{a}{O}(\varphi) \Rightarrow f = \underset{a}{o}(\varphi)$
  - $f = \underset{a}{O}(g)$ et $g = \underset{a}{o}(\varphi) \Rightarrow f = \underset{a}{o}(\varphi)$

3. Edmund Georg LANDAU (1877-1938)
4. Godefroy HARDY (1877-1947)
5. On peut dire aussi que φ est **prépondérante** devant f, ou que φ l'emporte sur f.

14.1.3 Fonctions équivalentes

Les fonctions f et g sont deux fonctions définies sur un même voisinage $\mathcal{V}$ de a et g ne s'annule pas sur $\mathcal{V} - \{a\}$ [6]. On dit que :

$\underline{\underline{f \text{ est équivalente à } g}}$ au voisinage de a si et seulement si $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = 1$

On utilise la notation $f \underset{a}{\sim} g$ ou $\boxed{f \sim g}$

Note importante :

Il est parfois intéressant de remplacer f
par $f = \varphi\, g$ avec $\lim\limits_{a} \varphi = 1$
ou par $f = (1+\varepsilon)\, g$ avec $\lim\limits_{a} \varepsilon = 0$

Th. ▷ **Lien entre équivalence et être négligeable**

$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f - g = \underset{a}{o}(g)$

Test 388 **Important :** Peut-on avoir $f \sim \mathbf{0}$ (fonction nulle) ?

☐ Équivalence

Ceci définit une " **relation d'équivalence** " sur l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions définies sur un même ensemble $\mathcal{D}$ vérifiant les conditions usuelles en a :

- **réflexive :** $\forall\, f \in \mathcal{F},\quad f \underset{a}{\sim} f$ ☐ Réflexive
- **symétrique :** $\forall\, f, g \in \mathcal{F},\quad f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow g \underset{a}{\sim} f$ ☐ Symétrique
- **transitive :** $\forall\, f, g, h \in \mathcal{F},\quad f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h \Rightarrow f \underset{a}{\sim} h$ ☐ Transitive

f et g jouent le même rôle : on dit " f et g sont équivalentes".

Intérêt de la notion de fonctions équivalentes
Si f et g sont équivalentes en a, alors :
- f admet une limite en a si et seulement si g admet une limite en a.
  Ces limites sont égales.
- f et g sont localement de même signe.
- Si f ne s'annule pas, localement, il en est de même pour g.

14.1.4 Équivalents usuels

Au voisinage de 0 et pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x \qquad \sin x \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad 1 - \cos x \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad \ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$$

Un polynôme non nul est équivalent à
son monôme de plus bas degré au voisinage de 0
son monôme de plus haut degré au voisinage de l'infini

6. Cette dernière condition n'est pas indispensable, mais elle est souvent réalisée dans la pratique est permet de simplifier les démonstrations. De plus, elle est conforme au programme

14.1.5 Calculs d'équivalents

Combinées à la connaissance des équivalents usuels, quelques transformations simples permettent souvent de déterminer un équivalent en un point.

Toutes les fonctions sont définies sur $\mathcal{D}$ vérifiant les conditions usuelles en a, et ne s'annulent pas sur $\mathcal{D}-\{a\}$.

- **Equivalent et limite :**
  Si f et g ont une même limite finie et non nulle, alors $f \underset{a}{\sim} g$
  En particulier : Si f admet une limite l finie et non nulle, alors $f \underset{a}{\sim} l$
- **Ajouter une quantité négligeable :**
  Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $h = \underset{a}{o}(f)$ alors $f+h \underset{a}{\sim} g$
- **Utiliser la dérivée :**
  Si $a \in \mathbb{R}$, f dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors $\big(f(x)-f(a)\big) \underset{a}{\sim} f'(a)\,(x-a)$
  C'est le cas pour $\sin x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$ et $(e^{x}-1) \sim x$.
- **Multiplier, diviser des équivalents :**
  Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ alors $f\,f_1 \underset{a}{\sim} g\,g_1$
  En particulier : $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow \lambda\, f \underset{a}{\sim} \lambda\, g$
  Si de plus f_1 et g_1 ne s'annulent pas sur $\mathcal{D}$, alors $\dfrac{f}{f_1} \underset{a}{\sim} \dfrac{g}{g_1}$
- **Changer de variable :**
  Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{b} u = a$ alors $f \circ u \underset{b}{\sim} g \circ u$
- **Élever à une puissance :** (selon l'exposant : f et g positives ou ne s'annulent pas)
  Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $f^{\alpha} \underset{a}{\sim} g^{\alpha}$
- **Prendre le logarithme :** (f et g positives)
  Si f admet en a une limite autre que 1 et $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$
- **Prendre l'exponentielle :**
  Si f admet en a une limite finie et $f \underset{a}{\sim} g$ alors $e^{f} \underset{a}{\sim} e^{g}$
- **Par encadrement :**
  Si $f \leq g \leq h$ et $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$
- **Attention :** on ne peut pas ajouter des équivalents...

Exemples

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{2}$ car $\ln(1+\cos x-1) \sim \cos x - 1 \sim -\dfrac{x^2}{2}$ et $\sin x \sim x$.
Attention : le raisonnement précédent utilise $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x - 1) = 0$..

Que penser de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{(e^x)}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{x} = 1$?

Test 389
Au voisinage de 0 :
1 : le raisonnement $e^{\sin x}-1 \sim \sin x \sim x$ est correct : justifiez-le
2 : le raisonnement $e^{\sin x}-1 \sim e^{x}-1 \sim x$ est faux : dire pourquoi.

Test 390
Donner un équivalent simple, au voisinage de 0, de :
1 : $\dfrac{\sin(\sin^2 x)}{1-\cos x}$ **2 :** $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}$ **3 :** $e^{x}-\cos x$

Test 391
Utile pour les développements limités : au voisinage de 0, montrer que $f(x) \sim x^{\alpha}$ (avec $\alpha > 0$) $\Rightarrow o\big(f^{n}(x)\big) = o(x^{n\,\alpha})$

14.2 Développements limités

C'est une notion plus puissante qui généralise la notion d'équivalent. Elle est aussi beaucoup plus souple et permet l'addition (interdite avec les équivalents).

Sauf mention contraire, n, m désignent des entiers naturels.

14.2.1 Définition

Soit f définie sur $\mathcal{D}$ vérifiant les conditions usuelles en 0 (exposées en préambule).
f admet un **développement limité en 0** [abrégé en $\mathrm{DL}_n(0)$] si et seulement si

$$\exists\ P_n \in \mathbb{K}_n[X],\ \exists\ \varepsilon \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{K}), \quad \forall\ x \in \mathcal{D},\ f(x) = P_n(x) + x^n\,\varepsilon(x) \text{ et } \lim_0 \varepsilon = 0$$

- n est **l'ordre** du développement limité
- $P_n(x)$ est la **partie régulière à l'ordre n** du développement limité

  C'est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, de degré au plus n
- $f(x) - P_n(x) = o(x^n)$ est le **reste à l'ordre n** du développement limité
- Attention : ∘ le développement limité est la somme $P(x) + o(x^n)$

  ∘ c'est le "o" qui indique l'ordre du DL

Test 392 | $f : x \mapsto x + 2x^2 - x^5$ admet-elle un $\mathrm{DL}_3(0)$? un $\mathrm{DL}_8(0)$?

Test 393 | Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ n'admet pas de $DL_1(0)$

14.2.2 Premières propriétés

Th. ▷ **Unicité d'un DL**

S'il existe, le développement limité de f en 0 à l'ordre n est unique.

Th. ▷ **Troncature d'un DL**

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$: $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$, alors
f admet un développement limité à tout ordre $p \in [\![0, n]\!]$.

Ce développement est $$f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + o(x^p)$$

On dit qu'on a **tronqué** la partie régulière à l'ordre p.

►►► **Conséquence :**

tout polynôme est un développement limité à n'importe quel ordre.

Il suffit éventuellement de le tronquer [voir Test 14.2.1 page 211].

Th. ▷ **Limite et développement limité**

f admet un $\mathrm{DL}_0(0)$ si et seulement si f admet une limite finie l en 0.
Ce développement est $f(x) = l + o(x^0)$

Th. ▷ **Développement limité et dérivabilité**

Soit f continue en 0.
f admet un $\mathrm{DL}_1(0)$ si et seulement si f est dérivable en 0.
Ce développement est $f(x) = f(0) + x\,f'(0) + o(x)$

si f n'est pas définie en 0, ayant un $\mathrm{DL}_0(0)$, elle est prolongeable par continuité en 0.

Attention

Le processus n'est plus valable à l'ordre 2 ...

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^2\,\varepsilon(x) \not\Rightarrow f \text{ deux fois dérivable en } 0.$$

Contre-exemple :

$$f(x) = x^3 \sin\frac{1}{x} \text{ admet un } \mathrm{DL}_2(0) : \; f(x) = 0 + x^2\,\underbrace{(x \sin\frac{1}{x})}_{=\varepsilon(x)\to 0}$$

mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Par contre, la réciproque est vraie. Plus généralement, nous avons

Th. ▷ **Formule de Taylor-Young** *(conditions faibles)* [7]

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, et $0 \in \mathring{I}$, alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\, f^{(k)}(0) + o(x^n)$$

$f^{(k)}(0)$ désigne la dérivée d'ordre k de f en 0.

14.2.3 Développements limités usuels

Tous ces développements sont à connaître par cœur...

Th. ▷ **DL(0) des fonctions usuelles**

- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha}{1!}\,x^1 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n + o(x^n)$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad (\text{ou } o(x^{2n+2}))$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \quad (\text{ou } o(x^{2n+1}))$
- $\operatorname{sh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad (\text{ou } o(x^{2n+2}))$
- $\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \quad (\text{ou } o(x^{2n+1}))$

Test 394 Ecrire tous ces développements limités en utilisant le symbole $\sum$.

Test 395 Retrouver le développement de $\dfrac{1}{1-x}$ en utilisant la formule de Taylor-Young.

14.2.4 Lien avec les équivalents

Th. ▷ **Développement limité et équivalent**

Si une fonction f admet un développement limité <u>non nul</u> en 0, alors, au voisinage de 0, $f(x)$ est équivalent au monôme non nul de plus bas degré de la partie régulière :

$$\left.\begin{array}{c} f(x) = a_p\,x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_n\,x^n + o(x^n) \\ a_p \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \sim a_p\,x^p$$

p est l'**ordre**, $a_p\,x^p$ est la **partie principale** de l'équivalent.

7. William Henry YOUNG (1863-1942) mathématicien Anglais.

14.3 Calculs sur les DL

14.3.1 Somme et produits

Introduction :

$f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + o(x^3)$, $g(x) = 1 + 2x + o(x)$ donnent :

- $(f{+}g)(x) = 2 + 3x + 2x^2 + 3x^3 + o(x^3) + o(x)$
  $= 2 + 3x + o(x)$ est un $\mathrm{DL}_1(0)$... pourquoi ?
- $(f{\cdot}g)(x) = 1 + 3x + 4x^2 + 7x^3 + 6x^4$
  $+(1 + x + 2x^2 + 3x^3)o(x) + (1 + 2x)o(x^3) + o(x)o(x^3)$
  $= 1 + 3x + o(x)$ est un $\mathrm{DL}_1(0)$... pourquoi ?

Th. ▷ **Somme, produit de développements limités :**

Si $f(x) = P(x) + o(x^n)$, $g(x) = Q(x) + o(x^n)$ **(même ordre n)**

$(f + g)(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$
$(f \cdot g)(x) = \mathrm{tronc}_n \big(P(x) \cdot Q(x)\big) + o(x^n)^*$
$f^k(x) = \mathrm{tronc}_n\, P^k(x) + o(x^n)^*$

* : efficacité maximale si les constantes sont non nulles.

Précisons : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + o(x^n)$, $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} b_k\, x^k + o(x^m)$

- La somme $(f + g)(x)$ donne un $\mathrm{DL}_{\min(n,m)}$
  - **on ajoute des DL de même ordre**
  - les termes d'ordre supérieur sont tronqués.
- Si $a_0 \neq 0$ et $b_0 \neq 0$, le produit $f \cdot g(x)$ donne un $\mathrm{DL}_{min(n,m)}$
  - **on multiplie des DL de même ordre, de constante non nulle**
  - les termes d'ordre supérieur sont tronqués.
  - Quand une constante est nulle,
    on factorise par une puissance convenable de x
- Cas particulier d'une puissance entière :
  - si $a_0 \neq 0$, $f^k(x)$ donne un DL du même ordre que celui de f
  - si $a_0 = 0$, on factorise comme ci-dessus.

Test 396	Former le $\mathrm{DL}_2(0)$ de **1 :** $\sin x + \cos x$ **2 :** $e^x \cdot \ln(1 + x)$ **3 :** $\dfrac{1 + x}{1 - x}$

Que faire lorsque la constante est nulle ?

ce qui précède reste valable, mais en fait (sauf pour l'addition) on obtient facilement un DL d'ordre supérieur. Il suffit de mettre en facteur la première puissance de x dont le coefficient est non nul.

Exemple

Au voisinage de 0, si

$$f(x) = x^2 + 2\,x^3 - x^5 + o(x^5) \ \text{ et } \ g(x) = x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5)$$

on écrit

$$f(x) = x^2 \big(\underbrace{1 + 2\,x - x^3 + o(x^3)}_{\mathrm{DL}_3 \text{ de } f_1} \big) \ \text{ et } \ g(x) = x^3 \big(\underbrace{1 + x + x^2 + o(x^2)}_{\mathrm{DL}_2 \text{ de } g_1} \big)$$

ce qui donne un DL_7 du produit (en tronquant) :

$$\begin{aligned}(f\,g)(x) &= x^5 \big(1 + 2\,x + o(x^2)\big) \big(1 + x + x^2 + o(x^2)\big)\\ &= x^5 \big(1 + 3\,x + 3\,x^2 + o(x^2)\big)\\ &= x^5 + 3\,x^6 + 3\,x^7 + o(x^7)\end{aligned}$$

Test 397

Soit $f(x) = x + 2x^3 + o(x^4)$, $g(x) = 3x^2 - x^3 - 5x^4 + o(x^4)$.
Quel est l'ordre maximal possible pour le développement de

1 : $f \cdot g$ **2 :** f^2 **3 :** f^5 **4 :** $f^2 g$ **5 :** $f\,g^2$ **6 :** $f^3 g^4$

(On ne demande pas le calcul effectif de ces développements.)

14.3.2 Composition

Puisque le développement $f(x) = P(x) + o(x^n)$ est valable "pour tout x de $\mathcal{D}$", on peut remplacer x par tout autre élément de $\mathcal{D}$, en particulier par $g(x) = Q(x) + o(x^m)$.

Les questions qui se posent sont :
- le résultat est-il encore un DL ?

$$\text{oui si} \quad \lim_0 g = 0 \Leftrightarrow Q(0) = 0 \Leftrightarrow b_0 = 0$$

- si oui, quel est son ordre ?

Le DL obtenu est au moins d'ordre $\min(n, m)$
ce qui conduit une fois encore à utiliser des DL de même ordre...

Th. ▷ **Composition des développements limités**

Si $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o(x^n)$ avec $Q(0) = 0$, alors

$$f \circ g(x) = \operatorname{tronc}_n P\big(Q(x)\big) + o(x^n)$$

(Bien s'assurer que $g(x)$ reste au voisinage de 0.)

Une présentation possible des calculs :
On utilise un tableau dans lequel on place les coefficients, chaque colonne étant réservée à une puissance donnée de x.
Pour $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$ et $g(x) = b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + o(x^3)$, le calcul de $f \circ g(x)$ peut se présenter sous la forme :

	1	x	x^2	x^3	
1	1				a_0
g		b_1	b_2	b_3	a_1
g^2			b_1^2	$2b_1b_2$	a_2
g^3				b_1^3	a_3
$f \circ g$	a_0	a_1b_1	$\cdots$	$\cdots$	

Exemple

Au voisinage de 0,

$$\cos\big(\ln(1+x)\big) = \cos \underbrace{\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)}_{=u \in \mathcal{V}(0)} = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + o(u^4)$$

Comme $u \sim x \Rightarrow o(u^4) = o(x^4)$ il vient

	1	x	x^2	x^3	x^4	
1	1					1
u		1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0
u^2			1	-1	$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}$	$-\frac{1}{2}$
u^4					1	$\frac{1}{24}$
	1		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{12}$	

Finalement : $\cos\big(\ln(1+x)\big) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{12}x^4 + o(x^4)$

Test 398 Former le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\ln\big(1 + \ln(1+x)\big)$

Test 399 Former le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\dfrac{1}{1+\sin x}$

Test 400 Former le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\sqrt{1+x}$, puis le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$

14.3.3 Quotient

Pour développer le quotient $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$, il suffit de savoir développer l'inverse. Une condition nécessaire pour que ce développement existe est que g admette une limite finie non nulle en 0. La méthode est alors simple :

$\boxed{\text{Th.}}$ ▷ **Développement de $\dfrac{1}{g}$**

Si $g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + o(x^n)$ est le $\mathrm{DL}_n(0)$ de g, avec $a_0 \neq 0$,

alors $\dfrac{1}{g}$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$.

Celui-ci s'obtient en écrivant $\dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{a_0} \cdot \dfrac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_0} x^k + o(x^n)}$

(On développe la composée $x \mapsto u(x) \mapsto \dfrac{1}{1+u(x)}$.)

Test 401 Former un $\mathrm{DL}_4(0)$ de **1 :** $\dfrac{x}{2+x^3}$ **2 :** $\dfrac{x^4+3x^3+2x^2+1}{x^2+3x+1}$

Test 402 Former le $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\tan x$.
Il sera à retenir à l'ordre 3 dans le formulaire.

14.3.4 Intégration, dérivation

$\boxed{\text{Th.}}$ ▷ **Intégration d'un DL**

Si f est continue sur l'intervalle I contenant 0, et admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, alors toute primitive F de f sur I admet un DL_{n+1} :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + o(x^n) \Rightarrow F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\, x^{k+1} + o(x^{n+1})$$

(Ne pas oublier la constante $F(0)$ ...)

Attention : $\boxed{\text{on ne dérive pas un DL}}$

$$\left.\begin{matrix} f \text{ dérivable} \\ f \text{ admet un } \mathrm{DL}_n(0) \end{matrix}\right\} \not\Rightarrow f' \text{ admet un } DL_{n-1}(0)$$

Mais, <u>si</u> f' admet un développement limité,
celui-ci s'obtient en dérivant le développement limité de f .

Test 403 Dériver $f : x \mapsto 2\sqrt{x^4+x^2} - \ln\left(x^2 + \dfrac{1}{2} + \sqrt{x^4+x^2}\right)$.
En déduire un $\mathrm{DL}_5(0)$ de f .

Associée à la technique des coefficients indéterminés, ceci permet parfois d'obtenir des DL :

Exemple

Trois fois dérivable, $x \mapsto e^x$ admet un $\mathrm{DL}_3(0)$

$$e^x = a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$$

$x \mapsto e^x$ en est une primitive. Elle admet un $\mathrm{DL}_4(0)$

$$e^x = e^0 + ax + \frac{b}{2}x^2 + \frac{c}{3}x^3 + \frac{d}{4}x^4 + o(x^4)$$

L'unicité du DL permet d'identifier les coefficients

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = a \\ c = b/2 \\ d = c/3 \end{cases} \Rightarrow (a,b,c,d) = (1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}) \Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Test 404 Utiliser la **technique des coefficients indéterminés**
pour obtenir un $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\tan x$
(Penser à utiliser la parité pour alléger les calculs.)

14.4 Généralisations

14.4.1 Développement limité en $a \in \mathbb{R}$

Il suffit de changer de variable pour revenir en 0...

Soit f définie dans les conditions usuelles en $a \in \mathbb{R}$.

f admet un **développement limité en $a \in \mathbb{R}$** si et seulement si la fonction φ définie par $\varphi(h) = f(a+h)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$.

$$\text{On écrit :} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$$

Remarques :

- C'est $(x-a)$ la variable intéressante qui rend le DL exploitable.
- Il ne faut jamais développer les $(x-a)^k$
- Dans la pratique, x étant au voisinage de a fini

on pose $x = a + h$

et on développe par rapport à h qui est au voisinage de 0.

Exemple

$\mathrm{DL}_4(\frac{\pi}{4})$ de $\sin x$:

changement de variable $x = \frac{\pi}{4} + h$,

$$\sin x = \sin(\frac{\pi}{4} + h) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin h + \cos h)$$

On développe en 0 $\sin(\frac{\pi}{4} + h) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + h - \frac{h^2}{2!} - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + o(h^4)\right)$

on "revient en x"

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + (x-\frac{\pi}{4}) - \frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2!} - \frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{3!} + \frac{(x-\frac{\pi}{4})^4}{4!}\right) + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4\right)$$

Test 405 | Former les $\mathrm{DL}_4(2)$ de **1 :** e^x , **2 :** $\ln(1+x)$

14.4.2 Développement asymptotique

C'est un DL en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Il suffit de changer de variable pour revenir en 0 . . .

Soit f définie dans les conditions usuelles en $+\infty$ (resp. $-\infty$).

f admet un **développement limité en $+\infty$** (resp. $-\infty$) si et seulement si la fonction φ définie par $\varphi(X) = f(\frac{1}{X})$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$.

$$\text{On écrit :} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,\frac{1}{x^k} + o(\frac{1}{x})^n$$

Dans la pratique :

- Souvent, on factorise par le terme dominant (l'équivalent)
- Les termes "$\frac{1}{x}$" apparaissent, on calcule directement avec ces termes
- En cas de doute, il est toujours possible d'effectuer le changement le variable

Exemple

$\mathrm{DL}_3(+\infty)$ de $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2+x+1}$

On factorise par les termes dominants $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2}\cdot\dfrac{1+\frac{1}{x}+(\frac{1}{x})^3}{1+\frac{1}{x}+(\frac{1}{x})^2}$

On développe en $\dfrac{1}{x}$ (avec $u=(\frac{1}{x}+(\frac{1}{x})^2)\in\mathcal{V}(0)$)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\cdot\left(1+\tfrac{1}{x}+(\tfrac{1}{x})^3\right)\cdot\left(1-u+u^2-u^3+u^4+o(\tfrac{1}{x})^4\right)\\
&= x\cdot\left(1+\tfrac{1}{x}+(\tfrac{1}{x})^3\right)\cdot\left(1-(\tfrac{1}{x})+(\tfrac{1}{x})^3-(\tfrac{1}{x})^4+o(\tfrac{1}{x})^4\right)\\
&= x\cdot\left(1-(\tfrac{1}{x})^2+2(\tfrac{1}{x})^3-(\tfrac{1}{x})^4+o((\tfrac{1}{x})4)\right)\\
&= x-\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+o(\frac{1}{x^3})
\end{aligned}$$

Test 406

Développement asymptotique d'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ de

$$f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x$$

Même question en $-\infty$

14.4.3 Développement généralisé

Théoriquement, un DL ne comporte que des exposants entiers relatifs.

Parfois, on est amenés à utiliser des exposants non entiers. Ce n'est plus vraiment un "développement limité" mais l'expression est aussi facile à manipuler et permet d'accéder aux mêmes renseignements. On parlera alors de "développement limité généralisé".

Exemple

Comportement en $+\infty$ de

$$f(x)=\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}-\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}$$

Au voisinage de $+\infty$ on utilise les mêmes méthodes :

- $\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}=\sqrt[3]{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=x^{1/6}\left(1-(\frac{1}{x})^{1/2}\right)^{1/3}$

$$=x^{1/6}\left(1-\frac{1}{3}(\tfrac{1}{x})^{1/2}+o(\tfrac{1}{x})\right)^{1/2}$$

$$=x^{1/6}-\frac{1}{3}(\tfrac{1}{x})^{1/3}+o(\tfrac{1}{x})^{1/3}$$

- $\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}=x^{1/6}-\dfrac{1}{2}(\frac{1}{x})^{1/6}-\dfrac{1}{8}(\frac{1}{x})^{1/2}+o(\frac{1}{x})^{1/2}$

En ajoutant : $f(x)=\dfrac{1}{2}(\frac{1}{x})^{1/6}-\dfrac{1}{3}(\frac{1}{x})^{1/3}+o(\frac{1}{x})^{1/3}$

14.5 Quelques applications

14.5.1 Calcul de limites

Pour calculer une limite, il ne faut pas se précipiter sur les développements limités, car souvent, un équivalent permet de conclure.

On commence par observer chaque quantité. S'il y a forme indéterminée :

- on "isole les termes qui créent l'indétermination"
- on simplifie le problème en écartant les termes négligeables (utiliser les équivalents usuels)
- Si les théorèmes sur les limites ne permettent pas de conclure . . .

alors, et alors seulement, on utilise les développements limités.

Exemples

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin^2 x}{1+x-\cos x}=1$ car

$$\begin{cases} \sin^2 x \sim x^2 = o(x) \Rightarrow x-\sin^2 x\sim x \\ 1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2} = o(x) \Rightarrow 1+x-\cos x \sim x \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+2x-e^x}{x}$ s'écrit $\underbrace{\dfrac{1-e^x}{x}}_{\to -1}+2\to 1$

Au voisinage de 0 de $1-e^x-\sin x$ est équivalent à $-2x$

Attention

on n'ajoute pas les équivalents mais on met en facteur et on ajoute des limites.

Test 407

Comportement au voisinage de 0 de $\dfrac{x+\sin x - x\cos x}{1-\cos x}$

Test 408

Comportement en 0 de $f(x)=\dfrac{1+x^2-\cos x+\sin^2 x}{\tan^2(2x)}$.

Même question avec $g(x)=\dfrac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^k}$ (discuter suivant k)

14.5.2 Étude locale

Courbe et tangente

Si f est au moins de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de a, alors :

- l'équation de la tangente en a est $y=f(a)+(x-a)f'(a)$
- Les développements limités en a commencent par

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\cdots+o(x^n)$$

Th. ▷ **Tangente, extremum local**

Un développement limité d'ordre suffisant en a permet donc d'obtenir, sans calculs :

- l'équation de la tangente en a

  (Il suffit garder la partie polynomiale de degré au plus 1)
- la position locale de la courbe par rapport à sa tangente

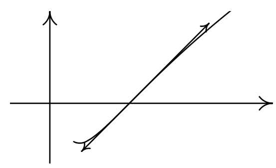
  (il suffit d'étudier le signe de la différence.)
- la présence d'un extremum local en un point intérieur (si la dérivée s'annule en changeant de signe autrement dit avec une dérivée seconde non nulle)

Exemple

Représentation locale de $y=2\,ln(x)+\ln^2(x)$ au voisinage de $x=1$.
Avec $x=1+h$, h au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x\,(2+\ln x) \\ &= (h-\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{3}h^3+o(h^3))\,(2+h-\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{3}h^3+o(h^3)) \\ &= 2h-\frac{1}{3}h^3+o(h^3) \end{aligned}$$

d'où l'équation de la tangente : $y=2(x-1)$ et la position locale (en dessous pour $x<1$ et au dessus pour $x>1$).



Test 409

Montrer que $x\mapsto ch(x)$ admet un extremum local en 0

Branches infinies

Dans le même ordre d'idée, au voisinage de l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$), on peut préciser la position locale de la courbe par rapport à une courbe simple connue.

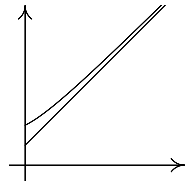
Exemple

Au voisinage de $+\infty$: $\quad f(x) = \sqrt{1+x+x^2} = x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$
permet d'écrire

$$f(x) = \underbrace{x+\frac{1}{2}}_{\text{expression simple}} + \underbrace{\frac{3}{8\,x}+o(\frac{1}{x})}_{\to 0^+}$$

d'où la droite asymptote d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$

et la position locale de la courbe par rapport à son asymptote.



Test 410 Étudier les deux branches infinies de la courbe Γ d'équation $y = 2\,x + \sqrt{1+x^2}$. (asymptote et position locale)

14.6 Suites et Comparaison

Il est important de revoir le chapitre "Développements limités" [page 207] qui contient l'essentiel de ces notions. Ce qui suit n'est présent qu'a titre de rappel.

14.6.1 Définitions

- Suite dominée :
  (u_n) est dominée par (v_n) ssi $\exists\ (w_n)$ bornée telle que $(u_n) = (v_n w_n)$
  Notation $\quad (u_n) = O(v_n)$
  Caractérisation quand v ne s'annule pas à partir d'un rang N : $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant N}$ bornée.
- Suite négligeable :
  (u_n) est négligeable devant (v_n) ssi $\exists\ (w_n) \to 0$ telle que $(u_n) = (v_n w_n)$
  Notation $\quad (u_n) = o(v_n)$
  Caractérisation quand v ne s'annule pas à partir d'un rang N : $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant N} \to 0$.
- Suites équivalentes :
  (u_n) est équivalente à (v_n) ssi $\exists\ (w_n) \to 1$ telle que $(u_n) = (v_n w_n)$
  Notation $\quad (u_n) \sim (v_n)$
  Caractérisation quand v ne s'annule pas à partir d'un rang N : $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant N} \to 1$.

Utilisation :

Opérations permises sauf l'addition.
Composition (sous condition pour le logarithme et l'exponentielle).
Des suites équivalentes sont
de même nature (même limite si elle existe)
de même signe (à partir d'un certain rang).

- Comparaison des suites de référence :
  Chacune des suites suivantes est négligeable devant celles qui suivent :

$$\left(\ln^\alpha n\right) \quad << \quad \left(n^\beta\right) \quad << \quad \left(r^{\,n}\right) \quad << \quad \left(n\,!\right) \quad << \quad \left(n^{\,n}\right)$$

où α, β et r sont positifs, $r > 1$.

Test 411 Montrer que les suites $(n^3 + 2\,n)$ et $(n^3 - n^2)$ sont équivalentes.
Quelle est la limite de la différence ? Est-ce surprenant ?

Test 412

Calculer la limite de la suite $\left(\sqrt[3]{n^3+5\,n^2}\;\ln(1+\frac{3}{n})\right)$
puis de la suite $\left(\dfrac{\sqrt{n^3+n^2}-\sqrt{n^3+n}}{\sqrt{n-1}}\right)$.

Test 413

Utiliser un équivalent pour étudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_n=\sqrt{n^\alpha+\sqrt{n}}\left(1-\cos\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ (discuter suivant le réel strictement positif α.)

14.6.2 Comparaison et suites extraites

Th. ▷ **Comparaison des suites extraites**

Si la suite (u_n) est dominée par (resp. négligeable devant, équivalente à) la suite (v_n), alors, toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ est dominée par (resp. négligeable devant, équivalente à) la suite extraite $(v_{\varphi(n)})$.

Attention : c'est la même extraction.

Test 414

On considère les suites $u=(n)$ et $v=(n^2)$.
- Vérifier que $(u_n)=o(v_n)$.
- Trouver une suite extraite de u non négligeable devant une suite extraite de v.
- Est-il possible que v soit négligeable devant une suite extraite de u.

Exercices

Exercice 1

Calculer les développements limités au voisinage de x_0 des expressions suivantes, à l'ordre indiqué :

1. $DL_3(0)$ de
$$\ln(1+e^x)$$
2. $DL_3(0)$ de
$$\ln(2+\sin x)$$
3. $DL_3(0)$ de
$$\sqrt{3+\cos x}$$
4. $DL_3(0)$ de
$$\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$$
5. $DL_3(0)$ de
$$\ln(1+\sin x)$$
6. $DL_3(1)$ de
$$\cos(\ln(x))$$
7. $DL_3(\pi/4)$ de
$$\sin x$$
8. $DL_4(1)$ de
$$\frac{\ln x}{x^2}$$
9. $DL_5(0)$ de
$$\text{sh}x\text{ch}(2x)-\text{ch}x$$

Exercice 2

Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \to +\infty$

a) $\dfrac{\sqrt{x^3+2}}{\sqrt[3]{x^2+3}}$ b) $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}-1$

c) $\dfrac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$ avec α, β dans $\mathbb{R}_+^*$ d) $\dfrac{1+x^\alpha}{1+x^\beta}$ avec α, β dans $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 3

DL des fonctions paires et impaires.

Soit f une fonction qui admet un $\text{DL}_{2n+1}(0)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, x^k + o(x^{2n+1})$$

1 : On suppose que f est une fonction paire.
En utilisant la fonction $g : x \mapsto g(x) = f(-x)$, montrer que la partie régulière du développement de f est un polynôme pair

(c. à d. : $\forall\, k \in [\![0;n]\!], \quad a_{2k+1} = 0$)

2 : Adaptez ce qui précède à une fonction f impaire.

3 : Que pensez-vous de la réciproque ? (utiliser $\varphi : x \mapsto e^{-1/x^2}$)

Exercice 4

Trouver le $\text{DL}_5(0)$ de la fonction "arcsin"

1. A partir de la dérivée.
2. En utilisant la fonction "sin" et la méthode des coefficients indéterminés.

Exercice 5

Déterminer le développement limité en 0 de la fonction tan à l'ordre 5, par trois méthodes différentes :

1. A l'aide de la relation
$$\tan = \frac{\sin}{\cos}$$
2. En utilisant le développement limité de Arctan et des coefficients indéterminés.
3. A l'aide de la relation
$$\tan' = 1 + \tan^2$$

Exercice 6

Etudier les branches infinies de la courbe représentative de $f : x \mapsto \frac{x^2}{x+1} \operatorname{Arctan} x$ (asymptote oblique ?).

Exercice 7

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x - \sin x)}{\sqrt{1+x^3} - 1}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\tan(2x) - 2\tan(3x)}{3\sin(2x) - 2\sin(3x)}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{1}{\ln(\cos x)}\right)$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b}\right)$, $(a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$.
5. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\operatorname{sh}\left(\sqrt{x^2+x}\right) - \operatorname{sh}\left(\sqrt{x^2-x}\right)\right)$.

Exercice 8

Donner un équivalent simple, puis la limite en 0 des fonctions suivantes :

— $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x\tan(x)}$

— $f(x) = \dfrac{1-\exp(-x)}{\sin(x)}$

— $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\ln(1+x)}$

— $f(x) = \dfrac{\exp(\sqrt{1+\sin x}) - e}{\tan x}$

Exercice 9

Déterminer (a,b) pour que la partie principale de $x \longmapsto e^x - \dfrac{1+ax}{1+bx}$ au voisinage de 0 soit de valuation (degré du monôme de plus bas degré) la plus grande possible.

14.7 Exercices Complémentaires

Exercice 1
Simplifier :

$$\underset{0}{o}(5x)$$
$$\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ln x\right)$$
$$\underset{0^+}{o}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ln x\right)$$
$$\underset{+\infty}{o}(x+x^2+\ln x)$$
$$\underset{+\infty}{o}\left(e^{-x}+\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\underset{0}{o}(x+x^2)$$
$$\underset{+\infty}{o}(x+x^2)$$
$$\underset{+\infty}{o}(x^2)+\underset{+\infty}{o}(x)$$
$$\underset{0}{o}(x^2)+\underset{0}{o}(x)$$
$$\underset{+\infty}{o}(x)-\underset{+\infty}{o}(x^2)+\underset{+\infty}{o}(\ln x)-\underset{+\infty}{o}(\exp x)$$
$$\underset{+\infty}{o}(x)-\underset{+\infty}{o}(x^2)$$

Exercice 2
Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \to 0$

a) $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$ b) $\tan x - \sin x$ c) $\ln(1+\sin x)$ d) $\ln(\ln(1+x))$

Exercice 3
Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \to +\infty$

a) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$ b) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ c) $x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$

Exercice 4
Déterminer un équivalent de $\ln(\cos x)$ quand $x \to (\pi/2)^-$

Exercice 5
Déterminer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\mathrm{e}^{-x}+x^2}{x-\ln x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln x - x}{x+\cos x}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x\mathrm{e}^{x}-x^2}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$

Exercice 6
Déterminer un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ puis de 0^+ de

$$f(x)=\frac{\ln(x+1)-\ln(x)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$$

Exercice 7
Déterminer les développements limités d'ordre n au point a, notés $\mathrm{DL}_n(a)$ des fonctions f suivantes :

1. $\mathrm{DL}_6(0)$ de $f(x) = \sin x \cos x$
2. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x) = (1+x^3)\sqrt{1-x}$
3. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$
4. $\mathrm{DL}_4(0)$ de $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$
5. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x) = \dfrac{\exp x}{\sqrt{1-x}}$
6. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x) = \sqrt{x+2}$
7. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x) = \ln(1+x+\sqrt{1+x})$
8. $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$
9. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$
10. $\mathrm{DL}_4(0)$ de $f(x) = \ln(1+\cos x)$

Exercice 8

Exprimer le développement limité à l'ordre n en 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ à l'aide de nombres factoriels.

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le développement limité à l'ordre $2n+2$ en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.
On pourra commencer par calculer la dérivée de cette fonction.

Exercice 10

Soit f solution de l'équation différentielle

$$y' = \sqrt{1-y^2}$$

sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ vérifiant $f(0) = 0$.

1. Justifier que f est 5 fois dérivable au voisinage de 0, et calculer $f^{(n)}(0)$ pour $n \in [\![0;5]\!]$.
2. En déduire le $\mathrm{DL}_5(0)$ de f .
3. Connaissez-vous une fonction ayant le même $\mathrm{DL}_5(0)$? Est-elle solution de l'équation ?
4. En déduire la valeur de $f^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

