Chapitre 13

Dérivation des fonctions à valeurs réelles

Nous ne considérerons que des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
On notera I un intervalle de $\mathbb{R}$.

13.1 Fonctions dérivables

13.1.1 Définitions

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ et $x_0 \in I$.
f est **dérivable en x_0** ssi

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ admet une limite finie quand } x \to x_0 .$$

Cette limite est le **nombre dérivé** de f en x_0

Il est noté $\boxed{f'(x_0)}$ ou $\boxed{\dfrac{d}{dx} f(x_0)}$

f est **dérivable** sur I ssi f est dérivable en tout point de I

Alors : $\begin{cases} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{cases}$ est la **fonction dérivée** notée $\boxed{f'}$ ou $\boxed{Df}$

Test 345 Utiliser la définition pour montrer que $x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Test 346 Trouver une fonction définie sur $\mathbb{R}$, non dérivable en $x_0 = 1$.

Test 347 Utiliser la définition pour montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{x+i}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Trouver la partie réelle φ et la partie imaginaire ψ de f. Vérifier que $f' = \varphi' + i\psi'$. Ce dernier résultat est-il généralisable à toute fonction complexe ?

f est **dérivable à droite en x_0** ssi

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ admet une limite finie quand } x \to x_0^+ .$$

Cette limite est le **nombre dérivé à droite** de f en x_0, noté $\boxed{f'_d(x_0)}$

f est **dérivable à gauche en x_0** ssi

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ admet une limite finie quand } x \to x_0^- .$$

Cette limite est le **nombre dérivé à gauche** de f en x_0, noté $\boxed{f'_g(x_0)}$

13.1.2 Interprétations pour f à valeurs dans $\mathbb{R}$

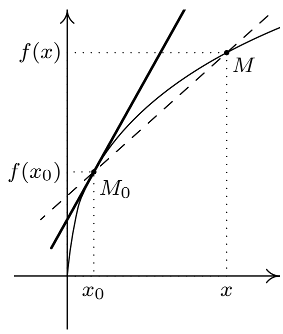
• **Tangente à une courbe :**

Soit $M_0\Big(x_0, f(x_0)\Big) \in \mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$. La **tangente** en M_0 à $\mathcal{C}$ est la position limite de la sécante M_0M lorsque $x \to x_0$ ($M \to M_0$)

▶ tangente "oblique" si f est dérivable en x_0 :
▷ c'est la droite passant par M_0
de coefficient directeur $f\,'(x_0)$
▷ Equation cartésienne :

$$\boxed{y = f(x_0) + (x - x_0)\, f\,'(x_0)}$$

▶ tangente "verticale" si f est continue en x_0 mais n'est pas dérivable en x_0 parce que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$,
▷ Equation cartésienne : $\boxed{x = x_0}$



• Demi-tangente :

▷ C'est la position limite, lorsque $x \to x_0^+$ (ou $x \to x_o^-$)
de la demi-droite d'origine M_0 contenant M .
▷ Si elles sont obliques, les coefficients directeurs sont $f\,'_d(x_0)$ et $f\,'_g(x_0)$.
▷ $\mathcal{C}$ présente un **point anguleux** en M_0 si $f\,'_d(x_0) \neq f\,'_g(x_0)$.

Test 348

Trouver les tangentes à la courbe d'équation $y = x^2 - 1$ qui sont :
-1- parallèles à la première bissectrice (d'équation $y = x$)
-2- qui passent par l'origine

Test 349

Former l'équation différentielle qui traduit que la courbe d'équation $y = f(x)$ admet en tout point $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ une tangente qui passe par le milieu de OA_0 où $A_0\,(x_0, 0)$.

• **Vitesse moyenne et instantanée :** **(mouvement rectiligne)**

si $f(t)$ est l'abscisse d'un point M à l'instant t

la **vitesse moyenne** de M entre les instants t_0 et t_1 est $\dfrac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$

la **vitesse instantanée** de M à l'instant t_0 est $f\,'(t_0)$

(c'est la limite de la vitesse moyenne quand $t_2 \to t_1$).

13.1.3 Propriétés

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $x_0 \in I$.

• **Lien entre dérivabilité et continuité :**

f est dérivable en x_0 (resp. sur I) $\quad\Rightarrow\quad$ f continue en x_0 (resp sur I)

• **Lien entre dérivées, dérivée à droite, à gauche :** en un point $x_0 \in \overset{\circ}{I}$

$$f \text{ dérivable en } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f \text{ dérivable à droite en } x_0 \\ f \text{ dérivable à gauche en } x_0 \\ \quad f\,'_d(x_0) = f\,'_g(x_0) \end{cases}$$

Test 350

Trouver une fonction qui, en $x_0 = 1 \in \overset{\circ}{I}$:
-1- admet une dérivée à gauche mais pas à droite
-2- admet une dérivée à droite mais pas à gauche
-3- admet une dérivée à droite différente de la dérivée à gauche
Si besoin, on pourra ne se limiter qu'à une réponse graphique.

- **Parité et dérivation :**
  Si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ est dérivable sur I, alors :
  - f paire $\Rightarrow$ f' impaire
  - f impaire $\Rightarrow$ f' paire
  - f T-périodique $\Rightarrow$ f' T-périodique

Test 351

Considérons une fonction f définie sur un intervalle I. Est-il possible
-1- que f non paire ait une dérivée impaire ?
-2- que f non impaire ait une dérivée paire ?
-3- que f fonction non périodique ait une dérivée périodique ?

Th. ▷ **Dérivabilité et Développement limité d'ordre 1**

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
f est dérivable en x_0 ssi $\exists \ell \in \mathbb{R}$ et $\exists \alpha$ définie sur I, tels que
$\forall\ x \in I,\ f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\,\ell + (x - x_0)\alpha(x)$
avec $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$,
Alors : $f'(x_0) = \ell$ et f possède un développement limité à l'ordre 1 en x_0.

Th. ▷ **Dérivabilité au sens de Carathéodory** [1]

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
f est dérivable en x_0 ssi $\exists\, \varphi$ continue en x_0, telle que
$\forall\ x \in I,\ f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\,\varphi(x)$
Alors : $f'(x_0) = \varphi(x_0)$.

Test 352

Trouver la fonction φ associée à $x \mapsto x^3$ en $x_0 = 2$.
A-t-on $\varphi = f'$? Est-ce surprenant ?

Test 353

Soit f une fonction impaire qui admet une dérivée à droite en 0.
- Montrer que f est dérivable en 0.
- Ce résultat est-il encore valable avec une fonction paire ?

13.1.4 Opérations sur les dérivées

Attention
- *Les résultats qui suivent ne sont applicables qu'avec des fonctions dérivables.*
- *Il faut donc toujours justifier la dérivabilité avant de les utiliser.*
- *Ils ne permettent pas d'établir qu'une fonction est dérivable.*

- **Linéarité :** si f et g sont dérivables en x_0 (resp. sur I) :
  - $f + g$ est dérivable en x_0 (resp. sur I) et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
    (resp. $\boxed{(f+g)' = f' + g'}$)
  - $\lambda\, f$ est dérivable en x_0 (resp. sur I) et $(\lambda\, f)'(x_0) = \lambda\, f'(x_0)$
    (resp. $\boxed{(\lambda\, f)' = \lambda\, f'}$)

- **Produit :** si f et g sont dérivables en x_0 (resp. sur I) :
  - $f\,g$ est dérivable en x_0 (resp. sur I) et $(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$
    (resp. $\boxed{(f\,g)' = f'g + f\,g'}$)

1. Constantin Carathéodory (1873-1950), mathématicien grec, vivant en allemagne, spécialisé en théorie des fonctions à variables réelles, théorie de la mesure et thermodynamique.

- **Quotient :** si f et g sont dérivables en x_0 (resp. sur I) et si de plus, $g(x_0) \neq 0$ (resp. ne s'annule pas sur I),
  alors il existe un voisinage de x_0 où g ne s'annule pas :
  - Sur ce voisinage $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en x_0 (resp. sur I) et $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0) = -\dfrac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ (resp. $\boxed{\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}}$)
  - Sur ce voisinage, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0 (resp. sur I)
    et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ (resp. $\boxed{\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - f\,g'}{g^2}}$)

Important:

Composée : $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{K}$
si f est dérivable en x_0 (resp. sur I) et g dérivable en $y_0 = f(x_0)$ (resp. sur J),
alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 (resp. sur I)
et $(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)\, f'(x_0)$ (resp. $\boxed{(g \circ f)' = g' \circ f \times f'}$)

Test 354

Sur quel ensemble peut-on affirmer que les fonctions suivantes sont dérivables ? Quels sont les points qui nécessitent une étude spéciale

-1- $\ln(\sin x)$ **-2-** $\sqrt{\cos x}$ **-3-** $\left|2 - \sqrt{|x+1|}\right|$

(On ne demande pas le calcul de la dérivée, ni l'étude des points particuliers.)

Test 355

Sans se soucier de l'ensemble de dérivabilité et sans chercher à transformer le résultat, calculer le nombre dérivé de :

$$\ln\left(\ln\left(1 + e^{7\,(3\,x+2)^2}\right)\right) \qquad \sin\left(\ln\sqrt{\cos^5\left((x^2+x+1)^3\right)}\right)$$

Test 356

f_1, f_2 et f_3 sont dérivables sur I.
Montrer que le produit $f_1\,f_2\,f_3$ est dérivable sur I.
Généraliser au produit fini $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} f_i$. En déduire la dérivée de $f^{\,n}$.

Test 357

Si la somme $f_1 + f_2$ est dérivable en x_0, peut-on en déduire que f_1 et f_2 sont dérivables en x_0 ? Que peut-on dire de f_1 et f_2 si $f_1 + f_2$ n'est pas dérivable ?

Test 358

f est dérivable en 0, g ne l'est pas. Que peut-on dire du produit $f\,g$?
Étudier le cas particulier où $f(x) = x$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

Test 359

f et g sont continues en 0, $f(0) = 0$ et $g \circ f$ est dérivable en 0.
Peut-on affirmer que f est dérivable en 0 ? que g est dérivable en 0 ?

(Argumentez la réponse.)

Test 360

Soit $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$. Quel est l'ensemble de définition de f ? l'ensemble de continuité ? l'ensemble de dérivabilité ?

13.1.5 Fonction réciproque

Th. ▷ **Dérivée d'une fonction réciproque**

Si $x_0 \in I$ intervalle et $f : I \to J$ est une bijection continue [2], alors :

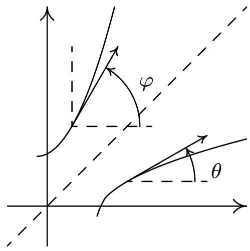
$$\left.\begin{array}{r} f \text{ dérivable en } x_0 \\ f'(x_0) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f^{-1} \text{ dérivable en } y_0 = f(x_0) \\ \boxed{(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}} \end{array}\right.$$

Note : *on peut confirmer ce résultat en dérivant la composée* $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$

Interprétation graphique pour f croissante. [3]

$f'(x) = \tan\theta$ et $(f^{-1})'(y) = \tan\varphi$

$\theta + \varphi = \dfrac{\pi}{2}$ donne la relation.



Test 361 Montrer que $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 3x + 3$ est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et que l'application réciproque est dérivable en 3, en 5 et en 12. Calculer ces nombres dérivés. En quels points f^{-1} n'est-elle pas dérivable ?

Test 362 Montrer que $f : x \mapsto 2x + \sin x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
En quels points la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction réciproque admet-elle une tangente de coefficient directeur $\dfrac{3}{2}$?

13.1.6 Dérivées usuelles

conditions	([4])	*domaine*	*expression*	*dérivée*	
$n \in \mathbb{N} - \{1\}$		$x \in \mathbb{R}$	x^n	$n\,x^{n-1}$	
$n \in \mathbb{Z} - \{1\}$		$x \in \mathbb{R}^*$	x^n	$n\,x^{n-1}$	⇝ en particulier pour $\frac{1}{x}$
$n \in \mathbb{R}$		$x > 0$	x^n	$n\,x^{n-1}$	
	⋆	$x > 0$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	⇝ en particulier pour $\sqrt[n]{x}$

conditions	([4])	*domaine*	*expression*	*dérivée*
		$x \in \mathbb{R}$	e^x	e^x
$a > 0$		$x \in \mathbb{R}$	a^x	$a^x \ln a$
		$x > 0$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$a > 0,\ a \neq 1$		$x > 0$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

conditions	([4])	*domaine*	*expression*	*dérivée*
		$x \in \mathbb{R}$	$\sin x$	$\cos x$
		$x \in \mathbb{R}$	$\cos x$	$-\sin x$
		$x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

conditions	([4])	*domaine*	*expression*	*dérivée*
		$x \in \mathbb{R}$	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$
		$x \in \mathbb{R}$	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$
		$x \in \mathbb{R}$	$\mathrm{th}\, x$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1 - \mathrm{th}^2 x$

conditions	([4])	*domaine*	*expression*	*dérivée*
	⋆	$-1 < x < 1$	$\mathrm{Arcsin}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	⋆	$-1 < x < 1$	$\mathrm{Arccos}\, x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
		$x \in \mathbb{R}$	$\mathrm{Arctan}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$

2. Donc f strictement monotone et J est un intervalle.
3. Dans le cas d'une fonction réelle.
4. Pour les fonctions marquées d'une étoile, les ensembles de dérivabilité ne sont pas les mêmes que les ensembles de définitions.

Test 363

Soit $f(x) = \text{Arctan}\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$.
Justifier que f est dérivable sur $]0,\pi[$. Calculer et simplifier cette dérivée ?

13.2 Dérivées d'ordre supérieur

13.2.1 Classe d'une fonction

Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$:

- si f est continue sur I, on note $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$
- Si f est dérivable sur I nous noterons $f \in \mathcal{D}^1(I,\mathbb{K})$
- Si f' est continue sur I, on note $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$
- Généralisation : $(n \in \mathbb{N}^*)$
  - On pose $f^{(0)} = f$
  - f est **n fois dérivable** ssi f est $(n-1)$ fois dérivable, et la dérivée d'ordre $(n-1)$ est dérivable.
  - Nous écrirons $f \in \mathcal{D}^n(I,\mathbb{K})$,
    la dérivée d'ordre n étant notée $\boxed{f^{(n)} \text{ ou } \dfrac{d^n}{dx^n}f}$
  - Si $f^{(n)}$ est continue sur I, on dit que f est de **classe $\mathcal{C}^n$**
    qui se note $\boxed{f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})}$
  - f est **indéfiniment dérivable** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f \in \mathcal{D}^n(I,\mathbb{K})$
    qui se note $\boxed{f \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{K})}$

13.2.2 Propriétés

Relations entre ces ensembles :

- $\mathcal{C}^0 \supset \mathcal{D}^1 \supset \mathcal{C}^1 \supset \mathcal{D}^2 \supset \cdots \supset \mathcal{D}^n \supset \mathcal{C}^n \supset \cdots \supset \mathcal{D}^\infty = \mathcal{C}^\infty$
- $\mathcal{C}^\infty = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{D}^n$

Remarque

Chacune des inclusions précédentes est stricte.
Ceci se démontre en utilisant les fonctions

$$\begin{cases} f_k : x \mapsto x^k \sin\dfrac{1}{x} \quad (k \in \mathbb{N}^*) \\ \text{prolongée par } f_k(0) = 0 \end{cases}$$

Test 364

Utiliser la fonction f_3 pour montrer que l'inclusion $\mathcal{C}^1 \supset \mathcal{D}^2$ est stricte.
Pour cela on précisera la dérivabilité et la dérivée de f_3 sur $\mathbb{R}^*$,
puis on montrera que f_3 est dérivable en 0 grâce à la limite du taux d'accroissement,
ensuite on vérifiera que f_3' est continue en 0 enfin que f_3' n'est pas dérivable en 0.
Que prouverait-on en utilisant la fonction f_4 ?

Règles de calculs :

- $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)' = (f')^{(n)}$
- $\forall\, n,p \in \mathbb{N},\quad f^{(n+p)} = \left(f^{(n)}\right)^{(p)}$

Th. ▷ **Une caractérisation des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$**

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \quad \Leftrightarrow \quad f' \text{ est de classe } \mathcal{C}^{(n-1)}$$

(Cette caractérisation reste valable pour les fonctions "n fois dérivables".)

Test 365

> Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie l'équation différentielle $f' = e^f$.
> Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
> On pourra procéder par récurrence.

13.2.3 Opérations

- **Linéarité :** si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{D}^n$) sur I, alors
  - $f+g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{D}^n$) sur I, et $\boxed{(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}}$
  - $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, λf est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{D}^n$) sur I et $\boxed{(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}}$
  - ***Conséquence :*** $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}^n(I,\mathbb{K})$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels
    et $f \mapsto f^{(n)}$ est une application linéaire.

Test 366

> Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$.

- **Produit, quotient :**
  - si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{D}^n$) sur I, alors
    $f\,g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{D}^n$) sur I

    formule de Leibniz [4] $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad (f\,g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)}}$
  - Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont de classe $\mathcal{C}^n$

Test 367

> **Une application classique à connaître :**
> utiliser la formule de Leibniz pour calculer la dérivée 4ème de $x^4\, e^x$.
> Quelle est la dérivée 10ème ?

Test 368

> f, g et h sont 3 fois dérivables.
> Montrer que le produit $f\,g\,h$ est trois fois dérivable et calculer la dérivée d'ordre 3.

- **Composée :** si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et g de classe $\mathcal{C}^n$ sur $f(I)$,
  alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

  Démonstration non exigible

- **Fonction réciproque :** si $f \in \mathcal{C}^n(I,J)$ est bijective, et $\forall\, x \in I$, $f'(x) \neq 0$ alors, l'application réciproque est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J : $f^{-1} \in \mathcal{C}^n(J)$.

  Il est évident que ce résultat ne s'applique qu'aux fonctions réelles. Démonstration non exigible.

13.3 Étude globale des fonctions dérivables à valeurs dans $\mathbb{R}$

13.3.1 Extremum local

Th. ▷ **Extremum d'une fonction dérivable**

> Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, $a \in \overset{\circ}{I}$ et f dérivable en a,
>
> $$f \text{ présente un extremum local en } a \quad \Rightarrow \quad f'(a) = 0$$
>
> **Attention :**
> - non valable aux bornes de l'intervalle.
> - la réciproque est fausse

4. Gottfried von Leibniz, 1646-1716, philosophe, scientifique, mathématicien, diplomate, juriste, rien que ça !

Test 369

Quels sont les extrema locaux de $x \mapsto x^2(3x^2 - 8x + 6)$?
Même question pour la restriction à l'intervalle $[-2, 2]$.

Test 370

-1- Montrer que le résultat est faux aux bornes de l'intervalle
-2- f peut-elle présenter un extremum en un point où elle n'est pas dérivable ?
-3- Donner un exemple où la réciproque est fausse.
Si besoin, on pourra se limiter à une réponse graphique.

13.3.2 Rolle et accroissements finis

Th. ▷ **Théorème de Rolle** [5]

Soit $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ (avec $a < b$).

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ continue sur } [a, b] \\ f \text{ dérivable sur }]a, b[\\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in]a, b[\,,\ f'(c) = 0$$

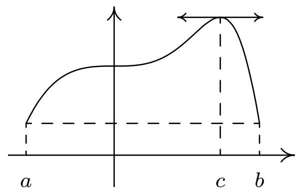
Attention : ***Ce théorème n'est valable que pour les fonctions réelles :***

Contre-exemple : $f \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{C} \\ x & \mapsto \quad (x^2 - x) + i\,(x^3 - x) \end{cases}$

vérifie les conditions sur $[0, 1]$, pourtant f' ne s'annule pas.

Interprétation graphique :

il existe un point à tangente horizontale.



Test 371

Donner un exemple où c n'est pas unique.
Si besoin, on pourra se limiter à une réponse graphique.

Test 372

Trouver c quand $f(x) = \sin(x^2)$, $a = 0$ et $b = \sqrt{\pi}$

Généralisation :

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ continue sur } [a, +\infty[\\ f \text{ dérivable sur }]a, +\infty[\\ f(a) = \lim\limits_{\infty} f \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in]a, +\infty[\,,\ f'(c) = 0$$

Th. ▷ **Égalité des accroissements finis**

Soit $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ (avec $a < b$).

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ continue sur } [a, b] \\ f \text{ dérivable sur }]a, b[\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in]a, b[\,,\ f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c)$$

Attention : *fonction réelle uniquement.*

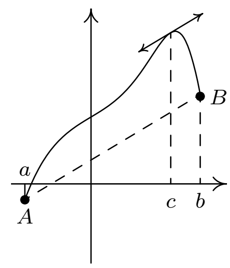
Interprétations :

- ***graphique***

  il existe un point où la tangente est parallèle à AB.

- ***cinématique***

  il existe un instant où la vitesse instantanée est égale à la vitesse moyenne.



5. Fils d'un marchand de Basse-Auvergne, Michel Rolle, né à Ambert le 21 avril 1652 et mort à Paris le 8 novembre 1719, est un mathématicien français.

Th. ▷ **Inégalité des accroissements finis**

Soient $a < b$

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\\ \forall\, x \in]a,b[\,,\ m \leqslant f'(x) \leqslant M \end{array}\right\} \Rightarrow m\,(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M\,(b-a)$$

Test 373	Justifier l'utilisation de l'inégalité des accroissements finis quand $f(x) = x^3$ et $a = 5, b = 10$. Même question avec $g(x) = \ln(x)$.

13.3.3 Fonctions lipschitziennes

$f \in \mathcal{F}(E,\mathbb{K})$ est **lipschitzienne** [6] ssi

$$\exists\, k \in \mathbb{R}_+^* \ \forall\, x,y \in E,\ |\,f(x) - f(y)\,| \leqslant k\,|\,x - y\,|$$

On dit alors que f est **k-lipschitzienne.**

Remarques :
- Une fonction est lipschitzienne si et seulement si l'ensemble des taux d'accroissement est borné.
- Soit $a < b < c$. Si f est k-lipschitzienne sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$, alors f est k-lipschitzienne sur $[a,c]$

Test 374	Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Utiliser le taux d'accroissement pour montrer que f est lipschitzienne sur $[1,+\infty[$, mais ne l'est pas sur $[0,\infty[$.

Test 375	$a < b < c$. Supposons f k_1-lipschitzienne sur $[a,b]$ et k_2-lipschitzienne sur $[b,c]$. Posons $k = \max(k_1,k_2)$. Montrer que f est k-lipschitzienne sur $[a;c]$.

Th. ▷ **Fonction lipschitzienne :**

Si f dérivable sur I vérifie $\forall\, x \in I\,,\ |f'(x)| \leqslant k$,
alors f est $k-$lipschitzienne sur I

○ ***Attention à la réciproque :***
- ✠ Si f est $k-$lipschitzienne, alors $\forall\, x,y \in I\,,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|$
- ✠ Mais f n'est pas nécessairement dérivable sur I (exemple $x \mapsto |x|$)
- ✠ Si f est dérivable sur I, alors la dérivée vérifie $\forall\, x \in I \quad |f'(x)| \leqslant k$

13.3.4 Prolongements

Th. ▷ **Dérivabilité d'une fonction prolongée**

Soit $a \in I$ intervalle de ℝet soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continue sur } I \\ f \text{ dérivable sur } I - \{a\} \\ f' \text{ admet une limite finie } l \text{ quand } x \to a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} f \text{ dérivable en } a \\ f'(a) = l \end{array}\right.$$

Remarques :
- Donc f' est continue en a
- La réciproque est fausse
- Facilement adaptable si $\lim\limits_a f' = \pm\infty$ ("tangente verticale")

Test 376	Montrer que $x \mapsto x^2\,(1 - \ln x)$ est prolongeable par continuité en 0. Montrer que la fonction prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$

Test 377	f est la fonction définie par $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, prolongée par continuité en 0. Calculer la dérivée sur $\mathbb{R}^*$, et sa limite en 0. Qu'en déduisez-vous ?

6. Rudoplh Otto Sigismund LIPSCHITZ (1832-1903) mathématicien Allemand. Cette notion fut introduite pour améliorer les conditions de Cauchy (sur la résolution des équations différentielles).

13.4 Étude des variations

13.4.1 Sens de variation

Th. ▷ **Fonction croissante, décroissante, monotone**

Si f est dérivable sur l'intervalle I :
- f est croissante sur $I \Leftrightarrow \forall\, x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$
- f est décroissante sur $I \Leftrightarrow \forall\, x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$
- f est constante sur $I \Leftrightarrow \forall\, x \in I,\ f'(x) = 0$

Attention : uniquement valable sur un intervalle.

Th. ▷ **Fonction strictement monotone**

la fonction f dérivable sur l'intervalle I est strictement monotone sur I

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f' \text{ garde un signe constant sur } I \\ \text{et } \ f' \text{ n'est nulle sur aucun intervalle non dégénéré de } I \end{cases}$$

Souvent, dans la pratique :

f' de signe constant ne s'annule qu'en des points isolés.

Test 378 Utiliser la dérivation pour obtenir le sens de variation de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Test 379 Sens de variation de $f : x \mapsto 3\,x^4 - 4\,x^3 - 6\,x^2 + 12\,x$
(Préciser si la variation est stricte ou non)

13.4.2 Extremum (rappel)

Soit f dérivable sur l'intervalle I.

Si f présente un extremum local en $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ alors $f'(x_0) = 0$

Attention :
- ce n'est pas valable aux bornes de l'intervalle
- la réciproque est fausse
- Par contre, si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f présente un extremum local en x_0

Test 380 Quels sont les extremums locaux de la fonction $f : x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$?

Test 381 Trouver $a \in \mathbb{R}$ pour que $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x) + a\,x$ présente un extremum local en $\dfrac{1}{2}$.

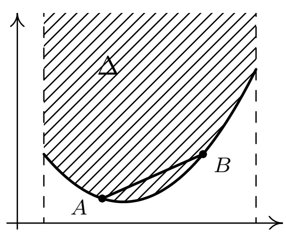
13.4.3 Fonction convexe

Sous-ensemble convexe : Un sous-ensemble Δ de l'espace affine $\mathcal{E}$ est convexe

$$\Leftrightarrow \quad \forall\, A, B, \quad (A, B) \in \Delta^2 \Rightarrow [A, B] \subset \Delta$$

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est **convexe**

ssi $\Delta = \{M(x, y) \mid x \in I \text{ et } y \geqslant f(x)\}$ est un ensemble convexe.



Th. ▷ **Caractérisations de la convexité**

f est convexe sur I :

- $\Leftrightarrow$ tout sous-arc $\overset{\frown}{AB}$ de $\mathcal{C}$ est situé sous la corde $[AB]$
- $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0; 1]$,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

- $\Leftrightarrow \forall\ a \in I, \quad \tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I - \{a\}$
- **inégalité de convexité** (*inégalité de Jensen*)

$\Leftrightarrow \forall\ \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+\,,\ \forall\ x_1, \cdots, x_n \in I$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \Rightarrow f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_i\, x_i\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_i\, f(x_i)$$

Test 382 Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ tel que $\ln(f)$ est convexe. Montrer que f est convexe.

Th. ▷ **Cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{D}^2$**

f est convexe sur I

- $\Leftrightarrow f'$ est croissante
- $\Leftrightarrow \mathcal{C}$ est située au dessus de chacune de ses tangentes
- $\Leftrightarrow f'' \geqslant 0$ (si f est deux fois dérivable)

Test 383 **Inégalités classiques de convexité**

1. Montrer que $-\ln$ est convexe et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ ln(x) \leq x - 1$.
2. Montrer que exp est convexe et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,$x - sin(x)$ est du signe de x.

13.4.4 Plan d'étude

L'ordre proposé ci-dessous est conseillé.

— Déterminer l' ensembles de définition, de continuité et dérivabilité.
(Ils sont souvent très proches. On peut aussi préciser la classe)

— Éventuellement, limiter l'étude à un ensemble $\mathcal{E}$
par parité, périodicité
(ne pas oublier de préciser les transformations
nécessaires pour compléter la courbe)

— Étudier le comportement aux bornes de l'ensemble $\mathcal{E}$
(Ce qui comprend les prolongements par continuité, les tangentes et les branches infinies)

— Étudier les variations et les visualiser dans un tableau
(y faire figurer les valeurs des limites, extremums, etc.)

— Éventuellement, étudier certains points particuliers
(intersections avec axes et les asymptotes,
points à tangente parallèle aux axes, etc.)

— Représentation graphique, en faisant figurer tous les résultats acquis
(on s'appliquera à bien respecter les tangentes obtenues)

13.4.5 Branches infinies

Soit I un intervalle, soit $x_0 \in I$.

Asymptote verticale

Soit f définie sur $I - \{x_0\}$ telle que $lim_{x \to x_0} f(x) = \mp\infty$.
Alors la représentation graphique de f admet une asymptote verticale d'équation $x = x_0$.

Asymptote horizontale

Soit f définie au voisinage de ∞ telle que $lim_{x\to\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$.
Alors la représentation graphique de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = a$.

Branche infinie en $+\infty$, (idem en $-\infty$)

Soit f définie au voisinage de $+\infty$ telle que $lim_{x\to+\infty} f(x) = \mp\infty$.
Alors plusieurs cas sont possibles :

— Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \mp\infty$ alors la représentation graphique de f admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

— Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ alors la représentation graphique de f admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

— Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ alors deux cas sont possibles :

  — Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = \mp\infty$ alors la représentation graphique de f admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.

  — Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$ alors la représentation graphique de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

Test 384

Etudier les branches infinies des R.G. des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto x^2$
2. $x \mapsto e^x$
3. $x \mapsto \ln(x)$
4. $x \mapsto 2x + 3 + \dfrac{1}{x^2+1}$

13.5 Etude des suites récurrentes

13.5.1 Utilisation du théorème de point fixe

Ce théorème est bien utile pour une suite dont on connaît la convergence mais dont on ne connaît pas la limite.

Théorème (Théorème de point fixe)
Soient I un intervalle fermé, f une fonction et u une suite définie par, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ tels que :

1. *f continue sur I.*
2. *$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.*
3. *u convergente.*

Alors la limite l de la suite u est solution dans I de l'équation $f(x) = x$.

Point Méthode : Un exercice utilisant un théorème de point fixe s'articulera en 3 étapes :

1. Pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$, on pourra utiliser une démonstration par récurrence. L'hérédité donnera parfois lieu à l'élaboration du tableau de variation de f sur I afin de montrer que I est stable par f autrement dit que $f(I) \subset I$.
2. Pour montrer que u est convergente, on pourra utiliser le théorème concernant les suites décroissantes minorées ou croissantes majorées.
3. Il restera à appliquer le théorème et résoudre l'équation $f(x) = x$ qui donnera la valeur de la limite de u.

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 1$$

- Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$...
- Montrons par récurrence que (u_n) est décroissante.
- Soit $f : x \mapsto \ln(x) + 1$ et $g : x \mapsto x - f(x)$. On peut montrer que f est définie, continue sur $[1; +\infty[$ et que g est définie, continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$. De plus on montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution 1 dans $[1; +\infty[$ en utilisant la bijection, autrement dit que l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution 1 dans $[1; +\infty[$.
- (u_n) est décroissante et minorée par 1, donc elle est convergente.

Finalement (u_n) est convergente, tous ces termes sont dans $[1; +\infty[$ et f est continue sur $[1; +\infty[$. Dès lors la limite de (u_n) est solution de $f(x) = x$ dans $[1; +\infty[$, autement dit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

13.5.2 Utilisation de l'inégalité des accroissements finis

Par rapport à la situation précédente, on ne sait pas a priori si u est convergente.

Point Méthode : On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction $x \mapsto \ln(2 + x)$.
On peut démontrer que :

1. f de classe C^1 sur un intervalle $[0; 2]$.
2. $\forall x \in [0; 2]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
3. par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 2]$.
4. $f(x) = x$ admet une unique solution, notée α, dans $[0; 2]$.

- **Etape 1** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \;\; |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2} |u_n - \alpha|$.
  - f de classe C^1 sur $[0; 2]$.
  - $\forall x \in [0; 2]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
  - $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 2]$.
  - $\alpha \in [0; 2]$.

  Nous pouvons alors appliquer l'inégalité des accroissements finis :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$
  Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$ d'où
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

- **Etape 2** Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \;\; |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
  - Initialisation ; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha|$ donc $|u_0 - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha|$ donc l'initialisation est vraie.
  - Hérédité : Supposons que $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$ est vrai. Montrons alors que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$.

    Or on a
    $$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right) |u_n - \alpha| .$$
    donc
    $$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$
    L'hérédité est démontrée.
  - Conclusion : Par le principe de récurrence, on obtient que
    $$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

— **Etape 3** Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \alpha$.
Puisque $-1 < \left(\dfrac{1}{2}\right) < 1$, la suite géométrique $(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. Dès lors

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$$

Or on a l'inégalité :

$$0 \leq |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| .$$

On obtient par le théorème d'encadrement que $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n - \alpha| = 0$. Finalement

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \alpha$$

Remarque : u_n est une valeur approchée de α à $\epsilon = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$ près.
Pour avoir une valeur approchée de α à 10^{-p} près, il suffit que $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq 10^{-p}$, c'est-à-dire déterminer la plus petite valeur de n qui vérifie l'inéquation précédente.

13.6 Cas des fonctions complexes

Ceci est un résumé des propriétés déjà établies dans ce chapitre.
D'autre-part : Une fonction complexe est un cas particulier de fonction vectorielle.
Ce qui suit est facilement adaptable aux fonctions vectorielles

13.6.1 Fonction complexe dérivable

Th. ▷ **Dérivabilité d'une fonction complexe**

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ est dérivable en $x_0 \in I$ ssi
sa partie réelle et sa partie imaginaire sont dérivables en x_0

De plus : $\boxed{f\,'(x_0) = \big(\mathrm{Re}\ f\big)'(x_0) + i\ \big(\mathrm{Im}\ f\big)'(x_0)}$

Généralisation : une fonction vectorielle est dérivable ssi ses fonctions coordonnées le sont.

Test 385 $a \in \mathbb{R}$. Utiliser les parties réelles et imaginaires pour montrer que $t \mapsto e^{i\,a\,t}$ est dérivable, et donner une expression de la dérivée.

Opérations sur les fonctions dérivables :
Si les fonctions complexes f et g sont dérivables sur I, alors
- la fonction **conjuguée** $\overline{f}$ est dérivable sur I et $\overline{f}\,' = \overline{f\,'}$
- $f + g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f\,' + g\,'$
- $\forall\, a \in \mathbb{C}$, $a\,f$ est dérivable sur I et $(a\,f)' = a\,f\,'$
- $f\,g$ est dérivable[7] sur I et $(f\,g)' = f\,'g + f\,g\,'$
- si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f\,'g - f\,g\,'}{g^2}$

7. Attention : le produit n'a pas de sens pour une fonction vectorielle

13.6.2 Dérivées successives

Th. ▷ **Classe d'une fonction complexe**

$f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{C})$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I

ssi Re (f) et Im (f) sont de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I

De plus : $\boxed{D^n(f) = D^n\left(\mathrm{Re}\ f\right) + i\, D^n\left(\mathrm{Im}\ f\right)}$

Généralisable aux fonctions vectorielles (et ses fonctions coordonnées).

Propriétés :

- Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors $f+g, \alpha f, f g$ sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
- Conséquence : $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
- La formule de Leibniz reste valable : $(f\,g)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$
- si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

13.6.3 Accroissements finis

Attention :

avec une fonction complexe [8],

Le théorème de **Rolle**
l'**égalité** des accroissements finis } **ne sont pas valables**

Contre-exemple

$\varphi : t \mapsto e^{i\,t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, vérifie $\varphi(0) = \varphi(2\,\pi)$
pourtant φ' ne s'annule pas.

Par contre, l'**inégalité** des accroissements finis **restent valables**.

Th. ▷ **Inégalité des accroissements finis (fonction complexe)**

Soit f une fonction complexe

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [a,b] \\ |f'| \text{ est majorée sur } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow |f(b)-f(a)| \leqslant |b-a| \sup_{[a,b]} |f'|$$

13.7 Exercices

Exercice 1
Dérivée logarithmique
La dérivée logarithmique de f en x est le nombre $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ (s'il existe).

Si f et g admettent une dérivée logarithmique en x, en est-il de même pour $f+g$? λf? fg? $\dfrac{f}{g}$? f^n?
Ce résultat est-il surprenant ? Comment pouvez-vous le justifier ?

Exercice 2
Un exemple à connaître :
une fonction non nulle dont toutes les dérivées sont nulles en 0
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $\forall\, x \neq 0,\ f(x) = e^{-1/x^2}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Monter que, sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x)$ est de la forme $\dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}\, e^{-1/x^2}$ où P_n est un polynôme de degré au plus $\big(2\,(n-1)\big)$.
3. En déduire (en justifiant rigoureusement) que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$.

Exercice 3
La formule des accroissements finis n'est pas valable dans $\mathbb{C}$:
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = x^2 + i\,x^3$. Montrer que la formule des accroissements finis n'est pas vérifiée entre 0 et 1.
Quelle sont les conditions d'utilisation non vérifiées ?

Exercice 4
Soit $f(0) = \alpha$ et $f(t) = \dfrac{1}{t\sqrt{1-4t}} - \dfrac{1}{t}$. Prouver qu'on peut choisir α pour que f soit continue sur $]-\infty, \dfrac{1}{4}[$. Est-ce que f est C^1 ?

Exercice 5
On définit sur $]0,1[$ la fonction f par $f(x) = x\exp(\dfrac{1}{\ln x})$. Montrer qu'on peut prolonger f en une fonction de classe C^1 sur le segment $[0,1]$.

Autour des théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Exercice 6
Soit $f : x \mapsto (e^x - 1)(\ln x - 1)$. Sans calcul de dérivée, montrer qu'il existe $\alpha \in]0; e[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

Exercice 7
1. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < a < b$, et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ telle que $af(b) = bf(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $cf'(c) = f(c)$.
2. Aboutir à la même conclusion sur $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $[0;1]$ et vérifie

$$f(0) = f'(0) = f(1) = 0$$

Exercice 8

A l'aide du théorème des accroissements finis, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}})x^2$.

Exercice 9

Théorème de Rolle itéré

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I, admettant au moins p zéros avec $p \geq n$. Montrer que $f^{(k)}$ admet au moins $p-k$ zéros pour tout $k \leq n$.

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et périodique de période $T > 0$. On suppose que f admet au moins n zéros sur $[0;T[$. Montrer qu'il en est de même de ses dérivées successives.

Exercice 11

Isométries de $\mathbb{R}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $|f'|$ est une constante C. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|f(x) - f(y)| = C|x-y|$, puis montrer que f est affine.

Exercice 12

Règle de l'Hôpital

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a;b]$, dérivables sur $]a;b[$ et à valeurs réelles. On suppose que $\forall x \in]a;b[,\ g'(x) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. *On pourra considérer une fonction $f - \lambda g$ avec λ bien choisi.*
2. On suppose que g' ne s'annule pas sauf en a, et que $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f'(t)}{g'(t)} = \ell$ existe. Montrer que g est injective, puis que
$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{g(t)-g(a)} = \ell$$

Exercice 13

Théorème de Darboux

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable (I étant un intervalle de $\mathbb{R}$).

1. On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$. On pourra étudier, selon le signe de $f(b) - f(a)$, l'un des taux d'accroissement $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ou $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$.
2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer que pour tout réel L compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = L$ (ainsi, une dérivée, même non continue, vérifie le théorème des valeurs intermédiaires).
3. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Etudes de suites récurrentes

Exercice 14

Etudier la convergence des suites définies par

1. $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = \cos(u_n) \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^+ \\ u_{n+1} = \dfrac{{u_n}^2+3}{2(u_n+1)} \end{cases}$

Exercice 15

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ et on note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 & = & \frac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \quad \text{si } n \geqslant 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$
2. Dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
3. Etudier les branches infinies de la représentation graphique de f.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$
5. Majoration de la valeur absolue de f' sur l'intervalle $[\frac{1}{2}; 1]$
   (a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x et de $f(x)$
   (b) Montrer que $\forall x \in [\frac{1}{2}; 1], \quad f(x) \geqslant \sqrt{\frac{3}{4}}$
   (c) En déduire que $\forall x \in [\frac{1}{2}; 1], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$
6. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad, u_n \in [\frac{1}{2}; 1]$
7. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}$
8.
   (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 1| \leqslant (\frac{1}{\sqrt{3}})^n |u_0 - 1|$
   (b) Justifier que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 16

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + 2 - 2\ln(e^x + 1)$ et on note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonorrnal.

On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Justifier le fait que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout x réel, on a : $f(x) = -x + 2 - 2\ln(e^{-x} + 1)$.
   En déduire que f est paire sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
4. Démontrer que la droite D d'équation : $y = -x + 2$ est asymptote à C et étudier la position de la courbe C par rapport à l'asymptote D.
5. Donner le tableau de variations de f.
6. Déterminer la solution, notée α, de l'équation $f(x) = x$.
7. Montrer que pour tout x réel : $f"(x) = -2\frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$
8. En déduire que : $\forall x \in [0, 1], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{e - 1}{e + 1}$
9. On donne les valeurs approchées à 10^{-2} près suivantes :

   $$f(0) \simeq 0,61 \quad f(1) \simeq 0.37 \quad \ln(e - 1) \simeq 0,54$$

   Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, 1]$
10. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant (\frac{e - 1}{e + 1})^n$.
11. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel à préciser.

13.8 Exercices Complémentaires

Exercice 1

Soit f, une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Que peut-on dire de f' si f est paire ? impaire ? T-périodique ?
2. Que peut-on dire de f si f' est paire ? impaire ? T-périodique ?

On rappelle : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 2

On pose $f(0) = 0$ et pour $x \neq 0$, $f(x) = x\sin(\dfrac{1}{x})$: montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, mais non dérivable en 0 et $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ n'existe pas !

Exercice 3

On définit, sur $]0, \dfrac{\pi}{2}]$: $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$. Montrer qu'on peut prolonger f sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ en une fonction de classe C^1.

Exercice 4

1. Montrer : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.
2. Montrer : $\forall x, y \in [-\dfrac{\pi}{4}, +\dfrac{\pi}{4}]$, $|\tan x - \tan y| \leq 2|x - y|$.

Exercice 5

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\,a\,,\,b\,]$. Montrer que : $\forall\ x \in]\,a\,,\,b\,[,\ \exists\ c \in]\,a\,,\,b\,[$

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a) + \frac{(x - a)(x - b)}{2}\,f''(c)$$

Exercice 6

a) Montrer : $\forall x > -1$, $\ln(1 + x) \leq x$. b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.

Exercice 7

Etudier les suites définies par

1. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^+ \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n} \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = -\sqrt[3]{u_n} \end{cases}$

Exercice 8

L'exercice se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

La fonction f étant définie sur $\mathbb{R}$ pour tout x réel par :

$$f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^x)$$

Partie 1 : Etude d'une fonction g intermédiaire. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \geqslant 0, \qquad g(t) = \frac{t}{t+1} - \ln(1 + t)$$

1. Déterminer la fonction dérivée g' de g et en donner son signe sur $\mathbb{R}_+$.
2. En déduire les variations de la fonction g et montrer que :

$$\forall t \geqslant 0,\ g(t) \leqslant 0$$

Partie 2 : Etude de la fonction f

1. Démontrer que l'on a , pour tout x réel : $f'(x) = e^{-x} g(e^x)$
2. Etudier alors les variations de la fonction f (on ne demande pas ici le calcul des limites).
3. Sachant que $\ln 2 \simeq 0.69$ et que $\dfrac{\ln(1+e)}{e} \simeq 0.48$, montrer que l'on a, pour tout x de l'intervalle $[0,1]$:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$$

Partie 3 : Convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Justifier que pour tout x de $[0,1]$:

$$|f'(x)| \leqslant |g(e)|$$

2. On considère la fonction h définie sur $[0,1]$ par : $h(x) = f(x) - x$.
   (a) Montrer que h est une fonction strictement décroissante sur $[0,1]$.
   (b) Prouver que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0,1]$.
   (c) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $[0,1]$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

4. Montrer que, pour tout n entier naturel :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant |g(e)| \,.\, |u_n - \alpha|$$

   Ainsi que :

$$|u_n - \alpha| \leqslant |g(e)|^n$$

5. Sachant que $|g(e)| < 0.6$, déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Ecrire un programme qui fournit tous les termes de la suite u jusqu'à ce que l'écart entre deux termes consécutifs soit inférieur à une quantité *epsilon* choisie par l'utilisateur.

Exercice 9

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{5} = \dfrac{2}{5}\mathrm{ch}(x)$.

1. Montrer que f possède, sur $[0,1]$, un point fixe et un seul noté α.
2. Montrer, pour tout $a, b \in [0,1]$: $|f(b) - f(a)| \leq \dfrac{8}{15}|b - a|$.
3. On définit la suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 10

Soit f définie par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^*$.

1. Montrer : $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{2} \leq f(x) \leq \dfrac{3}{2}$, et $f(f(x)) > 1$ puis que f est $\dfrac{1}{2}$ - lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\ell > 1$ tel que $f(\ell) = \ell$.
3. Soit $u_0 = a > 0$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Justifier que, pour $n \geq 2$, u_n existe et $u_n \geq 1$. Montrer enfin que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.