Chapitre 12

Polynômes

12.1 Algèbre des polynômes

12.1.1 Définitions

Un **polynôme** à une indéterminée à coefficients dans le corps commutatif $\mathbb{K}$
est une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ à **support** fini,
c'est-à-dire : $\mathcal{S}_A = \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}$ est fini.

Les a_i sont les **coefficients** du polynôme A.

Test 307

$(k)_{k\in\mathbb{N}}$ est-il un polynôme ?

Même question pour $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ où $a_0 = 100$ et $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ a_k = \prod_{i=0}^{k}(100 - i)$

Pour cela on vérifiera si la suite est à support fini ou non (autrement dit les termes sont-ils nuls à partir d'un certain rang).

Notes

- $A = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $B = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont égaux ssi $\forall\, k \in \mathbb{N},\ a_k = b_k$
- $A = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un polynôme ssi S_A est majoré
  c'est-à-dire
  $\exists\, n \in \mathbb{N},\ i > n \Rightarrow a_i = 0$.

Notation : $A = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ se note [1] $\boxed{A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i}$ si $S_A \subset [\![0, n]\!]$

$\boxed{\mathbb{K}[X]}$ désigne l'ensemble des polynômes à une indéterminée, à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Le polynôme A est **nul** ssi $\forall\, i \in \mathbb{N},\ a_i = 0$ $(A = \mathbf{0})$.
est **constant** quand $\forall\, i \in \mathbb{N}^*$ $a_i = 0$ $(A = a_0 X^0)$
Un tel polynôme est déterminé par la donnée de a_0.
est un **monôme** si le support est, soit vide, soit un singleton.

Test 308

Écrire le monôme X^k sous la forme $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$.
(Utiliser le symbole de Kronecker : $\delta_{i,k} = 1$ si $i = k$ et 0 sinon)

Test 309

Le polynôme nul est-il constant ? est-ce un monôme ?

1. L'origine de cette notation découle de propriétés de l'algèbre des polynômes (voir **??** page **??** dans ce paragraphe).

12.1.2 Degré d'un polynôme

Si A n'est pas nul, son support S_A est un sous-ensemble fini non vide de $\mathbb{N}$, d'où les définitions suivantes :

Le **degré** [2] du polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ est
- $\deg(A) = \max\big(S_A\big)$ si $A \neq \mathbf{0}$
- $\deg(\mathbf{0}) = -\infty$ (par convention).

La **valuation** [3] du polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ est
- $\mathrm{val}(A) = \min\big(S_A\big)$ si $A \neq \mathbf{0}$
- $\mathrm{val}(\mathbf{0}) = +\infty$ (par convention).

$\boxed{K_n[\,X\,]}$ désigne l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré au plus n.

(donc $\mathbf{0} \in \mathbb{K}_n[X]$)

Ainsi :

$$\deg(A) = n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n \neq 0 \\ \forall\, i \in \mathbb{N},\ i > n \ \Rightarrow\ a_i = 0 \end{cases}$$

Test 310 De la même façon, caractériser la valuation de A.

Si $A \neq \mathbf{0}$ est de degré n :
- le **coefficient dominant** de A est a_n .
- le **monôme dominant** de A est $a_n X^{\,n}$.
- A est **normalisé** (ou **unitaire**) si $a_n = 1$.

Test 311 Est-il vrai qu'un polynôme constant non nul a un degré nul ? une valuation nulle ?

Test 312 Comment sont les polynômes A qui vérifient $\mathrm{val}(A) = \deg(A)$?

Th. ▷ **Une caractérisation du polynôme nul**

Avec les conventions habituelles ($n \in \mathbb{N} \Rightarrow -\infty < n < +\infty$) :

$$\forall\ A \neq \mathbf{0}\,, \quad \mathrm{val}(A) \leqslant \deg(A)$$

Par conséquent : $\boxed{A = \mathbf{0} \Leftrightarrow \deg(A) < \mathrm{val}(A)}$

12.1.3 Espace vectoriel des polynômes

$A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, X\, i$ et $B = \sum_{i=0}^{\infty} b_i\, X\, i$ sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, et $\lambda \in \mathbb{K}$

- **Somme :** $\sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i)\, X^{\,i}$ est un polynôme noté $\boxed{A + B}$
- **Produit externe :** $\sum_{i=0}^{\infty} (\lambda\, a_i)\, X^{\,i}$ est un polynôme noté $\boxed{\lambda\, A}$

Propriétés : $\forall\ A, B \in \mathbb{K}[X]\,,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{K}$:
- $\deg(A + B) \leqslant \max\big(\deg(A), \deg(B)\big)$
- $\deg(A) \neq \deg(B) \ \Rightarrow\ \deg(A + B) = \max\big(\deg(A), \deg(B)\big)$
- $\lambda \neq 0 \ \Rightarrow\ \deg(A) = \deg(\lambda\, A)$

Note : avec les conventions usuelles dans $\overline{R}$, ces résultats restent valables si $A = \mathbf{0}$ ou $B = \mathbf{0}$.

2. On peut le noter $\deg(A)$ ou $d^{\,\circ}(A)$.
3. Pour information seulement (cette définition n'est pas au programme).

Muni de ces opérations :

$K[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
Il est de dimension infinie
de base canonique $\left(X^0, X^1, \cdots, X^n, \cdots\right)$

Test 313 Énoncer les résultats équivalents pour la valuation.

Conséquence : $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
Il est de dimension $(n+1)$,
de base canonique $\left(X^0, X^1, \cdots, X^n\right)$

12.1.4 Algèbre des polynômes

$A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ et $B = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$ sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$

▶ **Produit :** $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, i \in \mathbb{N}, c_i = \sum_{k=0}^{i} (a_k\, b_{i-k})$

est un polynôme noté $A \cdot B$ ou AB ou $A \times B$

Propriétés : $\forall\, A, B \in \mathbb{K}[X]$

- $\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B)$

  Valable si $A = \mathbf{0}$ ou $B = \mathbf{0}$ (avec les conventions usuelles dans $\overline{\mathbb{R}}$)
- $AB = \mathbf{0} \Rightarrow A = \mathbf{0}$ ou $B = \mathbf{0}$
- Si $AB \neq \mathbf{0}$, le coefficient dominant du produit est égal au produit des coefficients dominants.

Muni de ces opérations :

$K[X]$ est un anneau commutatif, intègre.
Ce n'est pas un corps :
A est inversible ssi $\deg(A) = 0$
(c'est-à-dire A constant non nul)

12.1.5 Substitution (composition) de polynômes

$$A, B \in \mathbb{K}[X], \quad A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i .$$

La **composée** $A \circ B$, encore notée $A(B)$ est le polynôme $\sum_{i=0}^{\infty} a_i B^i$.

On dit également qu'on **substitue** [4] B à X dans A.

Notes :

- Contrairement aux apparences, la somme est une somme finie (A est à support fini)
  donc, $A \circ B$ est bien un polynôme. (élément de l'algèbre $\mathbb{K}[X]$)
- La substitution de X à X ne modifie par A.
  Ceci permet de noter indifféremment A ou $A(X)$

4. Ce vocabulaire et la notation $A(B)$ seront justifiés plus loin dans ce chapitre [voir ?? page ??].

CC BY NC SA

Test 314

Les polynômes A et B sont non nuls, de degrés respectifs n et m.
-1- Quel est le degré de B^k $(k \in \mathbb{N})$?
-2- Quel est le degré de $A \circ B$?
-3- Que se passe-t-il si un des polynômes est nul ?

12.1.6 Division euclidienne

Th. ▷ **Division euclidienne de A par B**

Pour tout couple (A, B) de polynômes, B non nul,
il existe un unique couple (Q, R) de polynômes

tels que $\boxed{A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B)}$

Q est le **quotient** de la division euclidienne
R est le **reste** de la division euclidienne

Remarque : la démonstration précédente donne l'algorithme de la division euclidienne.

Test 315

Le fait que $\mathbb{K}$ est un corps est-il utile pour ce résultat ?

Test 316

Effectuer la division euclidienne de $X^5 - X^4 - 3X^3 + X^2 + 3X + 1$
par $X^3 - X$, puis par $X^2 - X - 2$.
Le deuxième calcul était-il indispensable ?

Test 317

Effectuer la division euclidienne de $A = X^5 + X^4 - X^3 - 1$ par $X^3 - 1$.
En déduire la division euclidienne de A par $X^2 + X - 1$.

Cas particulier :

- le reste de la division euclidienne de A par $B \neq \mathbf{0}$ est nul
  ssi $\exists\, Q \in \mathbb{K}[X], A = BQ$
- On dit que A est un **multiple** de B (ou B **divise** A)
  On note $\boxed{A \in B \cdot K[X]}$ ou encore $\boxed{B|A}$.
- On peut distinguer le cas particulier $Q \in \mathbb{K}$ (Q de degré négatif ou nul)
  en disant que A est **proportionnel**[5] à B.

12.2 Polynôme dérivé

Nous allons trouver ici des propriétés identiques à celles des fonctions dérivables. L'intérêt de ce paragraphe est que la notion de "dérivée d'un polynôme" est purement formelle.

Ne faisant pas appel à la notion de limite, les résultats peuvent être appliqués a des objets variés (fonctions, matrices, etc.)

12.2.1 Dérivée formelle

Le **polynôme dérivé** de $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ est $A' = \sum_{i=1}^{\infty} i\, a_i X^{i-1}$.

(Il est immédiat que A' est un polynôme puisque $S_{A'} \subset [\![0, \deg(A)]\!]$ est fini.)

5. Ce qui est légèrement différent du cas des polynômes associés [voir 16.1.1 page 243]

Test 318 A quelle condition un polynôme de degré 2 est-il divisible pas sa dérivée ?
On pourra utiliser la division euclidienne de A par A' avec $A = aX^2 + bX + c$.

Propriétés :

- *degré :* (Ces deux propriétés ne sont pas assurées si $\mathbb{K}$ est un autre corps que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.)
  - si A n'est pas constant, alors $\deg\left(A'\right) = \deg(A) - 1$
  - A est constant ssi $A' = \mathbf{0}$
- *linéarité :* $\forall\, A, B \in \mathbb{K}[X]\,,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}\,,\quad \left(A + \lambda\, B\right)' = A' + \lambda\, B'$
- *produit :*
  - $\forall\, A, B \in \mathbb{K}[X]\,,\quad (A\,B)' = A'B + A\,B'$
  - $\forall\, A \in \mathbb{K}[X]\,,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\,,\qquad (A^{\,n})' = n\,A^{\,n-1}\,A'$
- *substitution :* $\forall\, A, B \in \mathbb{K}[X]\,,\quad (A \circ B)' = (A' \circ B)\,B'$

12.2.2 Dérivées successives

Pour $k \in \mathbb{N}$: la dérivée d'ordre k de $A \in \mathbb{K}[X]$ est $A^{(k)} = \begin{cases} A & \text{si } k = 0 \\ \left(A^{(k-1)}\right)' & \text{si } k \geqslant 1 \end{cases}$

Propriétés :

- $\forall\, k, l \in \mathbb{N}\,,\quad A^{(k+l)} = \left(A^{(k)}\right)^{(l)}$ (en particulier $A^{(k+1)} = (A')^{(k)}$)
- *degré* si $\deg(A) = n \in \mathbb{N}$, alors $\forall\, k \in \mathbb{N}\,, \begin{cases} k \leqslant n \ \Rightarrow\ \deg\left(A^{(k)}\right) = n - k \\ k > n \ \Rightarrow\ A^{(k)} = \mathbf{0} \end{cases}$
- *linéarité* $\forall\, A, B \in \mathbb{K}[X]\,,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}\,,\quad \left(A + \lambda\, B\right)^{(n)} = A^{(n)} + \lambda\, B^{(n)}$
  (L'opérateur "dérivée $n^{\text{ème}}$ est linéaire.)
- *Formule de Leibniz*

$$\forall\, A, B \in \mathbb{K}[X]\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\quad (A\,B)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{(k)}\, B^{(n-k)}$$

Test 319 **Une situation assez fréquente** :
Appliquer la formule de Leibniz pour obtenir la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $(X^{\,2}A)$ (où A est un polynôme et $n \geqslant 2$.)

12.2.3 Formule de Taylor

Th. ▷ **Formule de Taylor pour les polynômes**

Pour $\mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{C}$, si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $h \in \mathbb{K}$, alors :

$$P(X+h) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{\,k}}{k\,!}\, P^{(k)}(X) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^{\,k}}{k\,!}\, P^{(k)}(h)$$

Qui peut encore s'écrire $\boxed{P(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(X-h)^k}{k\,!}\, P^{\,(k)}(h)}$

- La somme est finie (puisque $k > \deg(P) \ \Rightarrow\ P^{(k)} = \mathbf{0}$)

Test 320 Appliquer la formule à $P = X^{\,4}$ avec $h = 1$. Vérifier.

CC BY NC SA

12.3 Fonction polynôme et zéros

12.3.1 Fonction polynôme

La **fonction polynomiale** associée à $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est la fonction

$$\tilde{A} : \begin{cases} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \end{cases}$$

Note :
- On dit qu'on a substitué t à X.
- Si $\mathbb{K}_1$ est un sur-corps de $\mathbb{K}$, on peut considérer que $A \in \mathbb{K}_1[X]$.
  La fonction $\tilde{A}$ est naturellement définie sur $\mathbb{K}_1$ (à valeurs dans $\mathbb{K}_1$).
  Exemple : $A = X^2 + 3X \in \mathbb{R}[X]$, on peut utiliser $\tilde{A}(2 - 4i)$
- Sauf mention contraire, la fonction polynôme $\tilde{\text{A}}$ associée à $A \in \mathbb{K}[X]$ est définie sur $\mathbb{K}$.

Schéma (ou algorithme) de Horner [6]

Soit $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Le calcul de $\tilde{A}(t)$ est beaucoup plus rapide sous la forme

$$\tilde{A}(t) = a_0 + t\Big(a_1 + t\big(a_2 + \cdots + t(a_{n-1} + t\, a_n)\big)\Big)$$

Une présentation sous forme de tableau permet d'effectuer plus facilement les calculs à la main.
Prenons $P(x) = 4x^3 - 8x^2 - 7x - 1 = -1 + x(-7 + x(-8 + x(4)))$.

	4		-8		-7	-1
x			$4x$		$(4x-8)x$	$((4x-8)x-7)x$
	4	$\nearrow$	$(4x-8)$	$\nearrow$	$(4x-8)x-7)$	$\nearrow$ $((4x-8)x-7)x-1$

Ce qui permet de calculer une image à la main avec un minimum de calculs mais aussi de factoriser un polynôme.
Soit $Q : x \mapsto x^3 - 4x^2 + 5x - 2$. Q admet pour racine évidente 2. Le tableau suivant permet de trouver la factorisation :

	1	-4	5	-2
2	0	2	-4	2
	1	-2	1	0

On obtient $Q(x) = (x-2)(x^2 - 2x + 1)$.

Note
L'exponentiation rapide est dans le même esprit :

$t^{(2^k)}$ s'écrit $\left(\left(\cdots\left(t^2\right)^2\cdots\right)^2\right)^2$ (k niveaux)

Si n s'écrit $\overline{b_p b_{p-1} \cdots b_1 b_0}$ en base 2, alors $t^n = \prod_{k=0}^{p} b_k\, t^{(2^k)}$ s'évalue en un maximum de $2p$ multiplications (au lieu d'environ 2^p multiplications)
Exemple : $38 = \overline{100110}^2$ $t^{38} = t^2\,(t^2)^2\left(\left(((t^2)^2)^2\right)^2\right)^2$ se calcule en 10 multiplications (au lieu de 37).

Une astuce : Le reste de la division euclidienne de A par $X - \alpha$ est $\tilde{A}(\alpha)$

6. William George HORNER (1661-1704) mathématicien Anglais

Test 321

R est le reste de la division euclidienne de $A \in \mathbb{R}[X]$ par $(X-1)^2$.
- Qu'obtient-on en dérivant cette division euclidienne ?
- Comment peut-on calculer les constantes ?
- En déduire la valeur de R.

Application avec $A = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n$.

Test 322

S'inspirer du test précédent pour obtenir le reste de la division euclidienne de $A \in \mathbb{K}[X]$ par $(X-1)^3$.

12.3.2 Zéros d'un polynôme

$x \in \mathbb{K}$ est un **zéro** (ou une **racine**) du polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ ssi $\tilde{A}(x) = 0$

Note :
Si on définit $\tilde{A}$ sur une $\mathbb{K}$-algèbre E, et si $\tilde{A}(x) = o_E$,
on dit que x est un zéro de A dans E

Exemple : i est un zéro dans $\mathbb{C}$ de $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

Th. ▷ **Zéros distincts et divisibilité**

- $\alpha \in \mathbb{K}$ est un zéro de $A \in \mathbb{K}[X]$ ssi $(X-\alpha) \mid A$
- $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$.
  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ sont des zéros de A
  ssi $(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_p) \mid A$

(Attention : il est indispensable que les zéros soient dans $\mathbb{K}$.)

Conséquence 1

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n zéros distincts.

Conséquence 2

$$\left.\begin{array}{c} P \in \mathbb{K}_n[X] \\ P \text{ admet plus de } n \text{ zéros distincts} \end{array}\right\} \Rightarrow P = \mathbf{0}$$

Test 323

Quels sont les zéros dans $\mathbb{Q}$, puis dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$ de $P_1 = X^2 - 1$,
$P_2 = X^2 - 2$, $P_3 = X^2 + 2$, $P_4 = X^2 + X + 1$, $P_5 = X^4 + X^2 + 1$

Test 324

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 sont les zéros de $P = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.
Trouver les zéros de $Q = X^4 - 2X^3 + 3X^2 + 1$ et de $R = X^4 + 3X^2 + 2X + 1$.
On pourra remarquer que $P(X) = Q(-X)$ et que $R(X) = X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$.

Test 325

Soit $P = \frac{3}{2}(X-1)(X-2) - 2(X-1)(X-3) + \frac{1}{2}(X-2)(X-3) - X$.
- Sans développer P, peut-on majorer son degré ?
- Toujours sans développer P, calculer $P(1), P(2)$ et $P(3)$.
- Que pouvez-vous en déduire ?

Test 326

Un raisonnement indispensable :
Soit $P = 2X^3 - 9X^2 + 14X - 5 \in \mathbb{R}[X]$ Calculer $\tilde{P}_{\mathbb{C}}(2-i)$.
Peut-on en déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$?
On n'oubliera pas que si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est racine de P à coefficients réels, alors son conjugué aussi.

Test 327

Comment éviter de longs calculs ?
- Trouver un polynôme simple de degré 2 à coefficients entiers ayant $1 + \sqrt{2}$ pour zéro.
- $P = X^8 + X^7 - 6X^6 - 6X^5 + 5X^4 - 8X^3 - 4X^2 + 6X + 1$.
  Utiliser une division euclidienne pour obtenir $\tilde{P}(1 + \sqrt{2})$.

CC BY NC SA

12.3.3 Zéros multiples

$a \in \mathbb{K}$ est un **zéro d'ordre** $k \in \mathbb{N}^*$ de A ssi

$$\exists\, Q \in \mathbb{K}[X]\,, \quad A = (X-a)^k\, Q \ \text{ avec } \ \tilde{Q}(a) \neq 0$$

Un **zéro multiple** est un zéro d'ordre $k \geqslant 2$.

k est l'**ordre de multiplicité** du zéro.

Tout zéro d'un polynôme A non nul admet un ordre unique.
C'est $\max\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid (X-a)^k | A\right\}$
sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$ majoré par $\deg A$.

Test 328 a est un zéro d'ordre k de P. Est-ce un zéro de P^2 ? de quel ordre ?

Test 329 a est un zéro d'ordre k de P.
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
$$(X-a)^{k-1}|P \qquad (X-a)^k|P \qquad (X-a)^{k+1}|P$$

Test 330 Que peut-on dire de a si $P = (X-a)^k\, Q$? $(k \in \mathbb{N}^*)$

Th. ▷ **Zéros multiples et factorisation**

Si $a_1, a_2, \cdots, a_m$ sont des zéros distincts de $P \in K[X]$
d'ordres respectifs $p_1, p_2, \cdots, p_m$, alors $\displaystyle\prod_{k=1}^{m} (X-a_k)^{p_k}$ divise P

Conséquences :

- Dans ces conditions, si $P \neq \mathbf{0}$, alors $\deg(P) \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{m} p_k$

c'est-à-dire Un polynôme non nul de degré n admet au plus n zéros comptés avec leur ordre de multiplicité.

- Si de plus $\deg(P) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} p_k$, alors $P = \alpha \displaystyle\prod_{k=1}^{m} (X-a_k)^{p_k}$

où α est le coefficient dominant de P.

Prenons comme convention qu'un zéro d'ordre 0 d'un polynôme n'en est pas racine.

Th. ▷ **Zéros multiples et dérivation**

$\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

$a \in \mathbb{K}$ est un zéro d'ordre $k \geqslant 1$ de $A \neq \mathbf{0}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a \text{ est un zéro de } A \\ a \text{ est un zéro d'ordre } k-1 \text{ de } A' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a \text{ est un zéro de } A,\ A',\ A^{(2)}, \cdots,\ A^{(k-1)} \\ a \text{ n'est pas un zéro de } A^{(k)} \end{cases}$$

Attention : ce théorème peut être faux avec d'autres corps.

Test 331 Que peut-on dire si $A \neq \mathbf{0}$ vérifie $\tilde{A}(a) = \tilde{A}'(a) = \cdots = \tilde{A^{(k)}}(a) = 0$?

Test 332 Trouver un polynôme non constant P tel que $\tilde{P}(1) \neq 0$
et $\tilde{P}'(1) = \tilde{P}''(1) = \tilde{P^{(3)}}(1) = 0$

Test 333 $a \in \mathbb{K}$. Écrire tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$, de degré 3 où
-1- a est un zéro d'ordre 3 de P **-2-** a est un zéro d'ordre 2 de P

Test 334 $P = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$. Vérifier que 2 est un zéro de P. quel est son ordre ? En déduire une factorisation de P.

Test 335 $P = X^5 - X^4 - 2X^3 + 2X^2 + X - 1$. 1 est un zéro de P. Quel est son ordre ? Quel est l'autre zéro de P ? quel est son ordre ?

Test 336 a est un zéro d'ordre $k \geqslant 1$ de P. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?
$P^{(k-1)}(a) = 0$ $P^{(k)}(a) = 0$ $P^{(k+1)}(a) = 0$

12.4 Polynômes scindés

12.4.1 Définition

$A \in \mathbb{K}[X]$ non constant est **scindé** [7] (ou **dissocié**) s'il peut s'écrire

$$A = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - a_k) \qquad \lambda, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$$

Test 337 Les polynômes $X^2 - 1$, $X^2 - 2$, $X^2 + 1$, $X^2 + 2$ sont-ils scindés dans $\mathbb{Q}[X]$? dans $\mathbb{R}[X]$? dans $\mathbb{C}[X]$

12.4.2 Relations entre coefficients et racines

Développons

- $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) = X^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)X + \alpha_1\alpha_2$
- $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3) = X^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)X^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)X - \alpha_1\alpha_2\alpha_3$
- plus généralement :

Important:

$$\prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k) = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \cdots + (-1)^k \sigma_k X^{n-k} + \cdots + (-1)^n \sigma_n$$

où les σ_k sont les **expressions symétriques élémentaires** [8] de $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$

σ_k est la "somme des produits k par k" des α_i

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant n} \alpha_{i_1} \\
\sigma_2 &= \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\sigma_k &= \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\sigma_n &= \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant n} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_n} = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k
\end{aligned}$$

Test 338 Écrire toutes les expressions symétriques élémentaires de α_1, α_2 , puis de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, puis de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

7. Certains auteurs font la distinction entre $X^2 - 1$ qui est **scindable** et $(X - 1)(X + 1)$ qui est **scindé**.
8. On dit aussi **fonction** symétrique élémentaire, ou **polynôme** symétrique élémentaire

CC BY NC SA

Th. ▷ **Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé**

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$ est scindé, alors

$$\boxed{\forall\, k \in [\![1, n]\!] \ , \quad \sigma_k = (-1)^k \, \frac{a_{n-k}}{a_n}}$$

Test 339 Quelles sont les expressions symétriques élémentaires de $(-1, -1, 1, 2)$?
Vérifier vos résultats en développant $(X+1)^2 (X-1)(X-2)$.

Test 340 Vérifier que 1, 2 et 3 sont des zéros de $P = X^4 - X^3 - 19X^2 + 49X - 30$.
Sans factoriser, trouver un autre zéro de P.

Test 341
- Écrire toutes les relations entre a, b, c et les zéros de
$$P = aX^2 + bX + c \quad (a \neq 0)$$
- Même question avec $P = X^3 + pX + q$,
puis avec $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \quad (a \neq 0)$

12.4.3 Notions sur les fonctions symétriques

Ce paragraphe n'est pas explicitement au programme.
Aucune notion théorique sur les fonctions symétriques n'est exigible.

Une fonction $f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de n variable est
- **symétrique** ssi pour toute bijection $\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$
$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$
- **antisymétrique** ssi pour tout échange $x_i \leftrightarrow x_j \quad (i \neq j)$
$$f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = -f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$$

Test 342 Quelles sont les expressions symétriques de a_1, a_2, a_3 ?

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \qquad a_1^2 + a_1a_2 + a_1a_3 \qquad a_1^2a_2 + a_2^2a_3 + a_3^2a_1$$
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \qquad \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_1} \qquad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \frac{1}{a_1a_2a_3}$$

Intérêt :
- On démontre que, si $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est une expression rationnelle symétrique, elle peut s'exprimer uniquement en fonction des expressions symétriques élémentaires.
- Ceci permet de calculer certaines expressions qui font intervenir les solutions d'une équation algébrique, **sans connaître ces solutions**.

Test 343 x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $x^2 + ax + b = 0$.
Calculer $x_1^2 + x_2^2$, $x_1^3 + x_2^3$, $x_1^4 + x_2^4$,

Test 344 x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $x^2 + ax + b = 0$.
Former une équation du second degré dont les solutions sont $\frac{x_1}{x_2}$ et $\frac{x_2}{x_1}$.

(Voir l'exercice "**à faire absolument**".)

12.5 Exercices

Exercice 1

Division euclidienne de $P = X^4 + 6X^3 + 10X^2 + 3X - 6$ par $X^2 + 3X$.
En déduire la décomposition de P en produit de polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2

Soit $P = 1 + X(X+1)(X+2)(X+3)$.

1. Calculer le reste de la division euclidienne de P par P' (polynôme dérivé).
2. Montrer que P' est divisible par ce reste.
3. En déduire une factorisation de P.

Exercice 3

Incontournable...

1. α et β sont les restes de la division euclidienne de P par $X - a$ et $X - b$ $(a \neq b)$.
   Trouver le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.
2. Généraliser avec $(X - a)(X - b)(X - c)$.

Exercice 4

Les grands classiques : étudier, dans $\mathbb{C}[X]$ la divisibilité de :

1. $X^n \sin(\theta) - X \sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)$ par $X^2 - 2X\cos\theta + 1$
2. $X^{2n} - 2X^n \cos(n\theta) + 1$ par $X^2 - 2X\cos\theta + 1$
3. $X^n - a^n$ par $X^p - a^p$

Exercice 5

Résoudre l'équation $x^5 - 13x^4 + 67x^3 - 171x^2 + 216x - 108 = 0$ sachant qu'elle a des racines réelles multiples

Exercice 6

Déterminer les réels m, n et p pour que l'équation
$x^6 + mx^4 + 10x^3 + nx + p = 0$ ait une racine réelle quadruple.
Quelles sont les racines du polynôme.

Exercice 7

A faire absolument... x_1, x_2 et x_3 sont les zéros de $X^3 + pX + q$.

1. Calculer $x_1 + x_2 + x_3$ et $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
2. Comment peut-on évaluer $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ sans calculs (ou presque !) ?
3. Même question pour $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

Exercice 8

Décomposer le polynôme $P = X^4 + 12X - 5$ en produit de deux polynômes de degré 2, sachant que deux de ses zéros (complexes) ont pour somme 2.

Exercice 9

Soit l'équation à coefficients entiers $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$ avec $a_0 \neq 0$.

CC BY NC SA

Montrer que si le rationnel $\dfrac{p}{q}$ (donné sous forme irréductible) est solution de l'équation, alors p divise a_n et q divise a_0.

Applications : trouver (si elles existent), les racines rationnelles de $3x^3+8x^2+12x-5=0$ puis de $x^3-x-1=0$ et enfin de $2x^6+x^5-9x^4-6x^3-5x^2-7x+6=0$.

Exercice 10

Trouver trois complexes a, b, c qui vérifient $\begin{cases} a+b+c=2 \\ a^2+b^2+c^2=2 \\ a^3+b^3+c^3=8 \end{cases}$

12.6 Exercices Complémentaires

Exercice 1

1. En développant de deux manières différentes le polynôme $(1+X)^n(1+X)^m$, montrer que pour $0 \leq k \leq \min(m,n)$, $\left(\begin{array}{c} m+n \\ k \end{array} \right) = \sum_{i=0}^{k} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} m \\ k-i \end{array} \right)$.
2. Développer de deux manières différentes le polynôme $(1+X)^n(1-X)^n$: préciser le coefficient du terme de degré n, et simplifier

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)^2$$

Exercice 2

1. Donner deux expressions du polynôme dérivée de $(1+X)^n$.
   En déduire la valeur de $A_n = \sum_{k=0}^{n} k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$.
2. Développer le polynôme $X(1+X)^n$, et exprimer son polynôme dérivé de deux façons. Quelle égalité remarquable obtient-on pour $X=1$? $X=-1$?

Exercice 3

On désire calculer rapidement $P(\varphi)$ avec $P = X^5 + 2X^4 - X^3 - 2X - 6$ et $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Effectuer la division euclidienne de P par $F = X^2 - X - 1$.
2. Calculer $P(\varphi)$.
3. S'inspirer de ce qui précède pour indiquer une méthode permettant de calculer rapidement $S(\alpha)$ avec $\alpha = 3 + \sqrt{2}i$ et $S = 2X^6 - 11X^5 + 3X^4 + 15X^3 - 34X^2 + 47X - 23$.

Exercice 4

A l'aide de la formule de Taylor, déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par $(X-1)^3$.
On rappelle cette formule : si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors, pour tout $a \in \mathbb{K}$, $P = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.

Exercice 5

1. Montrer que 2 est racine du polynôme $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$.
   Quel est son ordre de multiplicité ?
2. Quelles sont les autres racines de P ?

Exercice 6

Quels sont les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ qui soient T-périodiques ($T \in \mathbb{C}^*$), (ie) vérifiant : $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z+T) = P(z)$?

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$: montrer que le polynôme $A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ est divisible par $B = (X-1)^2$.
Déterminer le quotient dans la division euclidienne de A par B.

CC BY NC SA

Exercice 8

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

1. Montrer que, si a est une racine éventuellement complexe de P, alors a^2 et $(a+1)^2$ sont aussi racines de P.
2. Montrer que 0 n'est pas racine de P.
3. Montrer que, si a est une racine de P, alors $|a+1| = 1 = |a|$.
4. En déduire les racines de P et sa forme.

Exercice 9

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P = X^4 - 1$
2. $P = X^5 - 1$
3. $P = X^4 + 1$
4. $P = X^{2n} - 1$
5. $P = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$
6. $P = X^4 - 2\cos(\varphi)X^2 + 1$
7. $P = (1-X^2)^3 + 8X^3$
8. $P = (1-X^2)^3 - 8X^3$
9. $P = X^6 + 3X^4 + 3X^2 + 1$

Exercice 10

Soit $P = X^5 + 1$ et $Q = \dfrac{P}{X+1}$. Montrer que, si z est une racine de Q, alors $Z = z + \dfrac{1}{z}$ vérifie une équation du second degré. Puis factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.