

Chapitre 7

Matrices

7.1 Définition et matrices particulières

7.1.1 Définition

Une $n \times m$ -matrice¹ à coefficients dans le corps commutatif $\mathbb{K}$

$$\text{est une application } A : \begin{cases} \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket \\ (i, j) \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow \mathbb{K} \\ \mapsto a_{i,j} \end{matrix}$$

- n et m sont les dimensions de la matrice.
- le $i^{\text{ème}}$ vecteur ligne de A est $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,m}) \in \mathbb{K}^m$
- le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de A est $(a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j}) \in \mathbb{K}^n$

Notations :

$$A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket} \quad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des (n, m) -matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Conséquence : égalité de deux matrices.

Deux matrices A et B sont égales ssi

elles ont les mêmes dimensions et les coefficients correspondants sont égaux

7.1.2 Matrices particulières

- A est une matrice ligne si $n = 1$
- A est une matrice colonne si $m = 1$
- Pour tout couple d'entiers (p, q) tels que $1 \leq p \leq m$ et $1 \leq q \leq n$,
 $E_{p,q} = (e_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ avec $e_{i,j} = \delta_{i,p} \delta_{j,q}$ et $\delta_{a,b} = 1$ si $a = b$ et 0 sinon

- A est une matrice carrée (d'ordre n) si $n = m$. On écrira

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Dans ce cas :

- A est triangulaire supérieure ssi

$$\forall i, j, \quad 1 \leq j < i \leq n \Rightarrow a_{i,j} = 0_{\mathbb{K}} \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

1. On dit encore matrice de type (n, m)

- A est triangulaire inférieure ssi

$$\forall i, j, \quad 1 \leq i < j \leq n \Rightarrow a_{i,j} = 0_{\mathbb{K}} \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

- A est diagonale ssi $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0_{\mathbb{K}}$
(elle est simultanément triangulaire supérieure et inférieure.)

- A est scalaire ssi A est diagonale avec les coefficients $a_{i,i}$ égaux

$$\text{◦ La } \underline{\text{matrice unité}} \text{ (d'ordre } n) \quad I_n = (\delta_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.2 Opérations sur les matrices

7.2.1 Somme de matrices

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

- définition : $A + B = C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

$$\text{où } \forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

7.2.2 Produit d'une matrice par un scalaire

Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \quad \lambda \in \mathbb{K}$.

- définition : $\lambda A = B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

$$\text{où } \forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, \quad b_{i,j} = \lambda a_{i,j}$$

- Toute matrice de $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de la famille des matrices élémentaires $(E_{p,q})_{\substack{1 \leq p \leq m \\ 1 \leq q \leq n}}$

$$\text{où } E_{p,q} = (e_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{avec } e_{i,j} = \delta_{i,p} \delta_{j,q} \quad (\text{voir } ^2)$$

Test 155

$$\text{Exprimer } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ comme combinaison linéaire de matrices élémentaires}$$

7.2.3 Produit de deux matrices

Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- définition : $A B = C \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ ³

$$\text{où } \forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

2. δ est le symbole de Kronecker.

3. ATTENTION : le produit de matrices n'est pas une loi de composition interne.

- Une présentation possible :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,k} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,k} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k,1} & \cdots & b_{k,j} & \cdots & b_{k,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,j} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,j} & \cdots & c_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i,1} & \cdots & c_{i,j} & \cdots & c_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m,1} & \cdots & c_{m,j} & \cdots & c_{m,p} \end{pmatrix}$$

Test 156

Calculer la produit AB où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
 Peut-on calculer le produit BA ?

Test 157

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
 • Pourquoi est-on sûr, sans calculer les produits, que $AB \neq BA$?
 • Calculer ces produits.

- L'application $\begin{cases} \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \mapsto AB \end{cases}$ est **bilinéaire**.

Ceci signifie qu'on peut⁴ "développer" et "factoriser" les expressions matricielles.

$$(A_1 + A_2)(B_1 + B_2) = A_1B_1 + A_1B_2 + A_2B_1 + A_2B_2$$

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \dots$$

- L'opération produit matriciel est **associative**

Ceci signifie qu'on peut⁵ écrire $(AB)C = A(BC) = ABC$

Test 158

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculer AX et montrer que le résultat est une combinaison linéaire des colonnes de A

Test 159

Soit $(E_{a,b})$ dans $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ et soit $(E_{i,j})$ dans $(\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), +, \cdot)$, calculer le produit de ces 2 matrices élémentaires. On pourra commencer par des valeurs explicites de n, p, q, a, b, i, j de son choix et utiliser le symbole de Kronecker.

Test 160

Calculer AB et BA lorsque $A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$



Test 161

De manière générale, donner une condition nécessaire et suffisante sur les dimensions des matrices A et B pour que les produits AB et BA soient possibles. Dans ce cas, est-il possible (certain !) que $AB = BA$?

Test 162

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$.
 • Trouver toutes les matrices X telles que $XA = B$.
 • Trouver toutes les matrices X telles que $AX = B$.

4. Sous réserve que les dimensions sont convenables.

5. Sous réserve que les dimensions sont convenables.

7.2.4 La transposition

La transposée de $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est la matrice $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$
où $\forall (i,j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,j} = b_{j,i}$

Notation : $B = A^T$

Ou encore : $B = {}^t A$

Th. $\triangleright$ Propriétés de la transposition

Ainsi on a les propriétés suivantes :

- $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \quad (A^T)^T = A$
- $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \quad (A + B)^T = A^T + B^T$
- $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad (\lambda A)^T = \lambda A^T$

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad (AB)^T = B^T A^T$$

La matrice carrée A est symétrique ssi $A^T = A$

La matrice carrée A est antisymétrique ssi $A^T = -A$

Test 163

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle antisymétrique ?

Test 164

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

- Que peut-on dire de $S = M + M^T$? de $A = M - M^T$?
- Ceci est-il valable avec une matrice carrée M quelconque ?
- Et avec une matrice M non carrée ?

7.3 Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées

Th. $\triangleright$ Anneau des matrices carrées

- $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ a une structure d'anneau
- Cet anneau est non commutative et non intègre.

7.3.1 Puissance d'une matrice

- définition : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$A^0 = I_n, \quad A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ fois}}$$

- propriétés de calcul :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$A^1 = A, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \quad A^k A^p = A^{k+p}$$

- Seules les puissances entières positives d'une matrice sont définies ; il n'y a pas de division chez les matrices ! En général $(AB)^k \neq A^k B^k$. En effet dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AB \neq BA$.



- puissances et matrices permutables :

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A et B commutent (ou sont permutables) alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $(AB)^k = A^k B^k$.

I_n commute avec toutes les matrices d'ordre n .

- puissance d'une matrice diagonale :
Soit D une matrice carrée d'ordre n diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \quad \text{Alors } \forall k \in \mathbb{N}^*, D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{pmatrix}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, I^k = I$$

- une matrice est nilpotente si l'une de ses puissances est la matrice nulle.

Test 165

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA . A-t-on l'égalité ?
Calculer $(A+B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$. A-t-on l'égalité ? Pourquoi ?

Test 166

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer AB . est-ce surprenant ?
Sans le calculer, que pensez-vous du produit BA ? Vérifier.

Test 167

Est-il vrai que deux matrices qui ont le même carré sont égales ou opposées ?

Notes :

- Écrire $AB + A = A(B + 1)$ n'a pas de sens.
- Par contre : $AB + A = A(B + I_n)$.
- En général : $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
- Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieur (de même avec inférieur et diagonale)

Th. $\triangleright$ **Binôme de Newton et Factorisation**

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que $AB = BA$. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$(A+B)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^k B^{N-k}$$

$$A^N - B^N = (A-B) \sum_{k=0}^{N-1} A^k B^{N-1-k}$$

Test 168

Calculer A^N pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.3.2 Matrices triangulaires

Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- A est triangulaire supérieure ssi

$$\forall i, j, \quad 1 \leq j < i \leq n \Rightarrow a_{i,j} = 0_{\mathbb{K}}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

- A est triangulaire inférieure ssi

$$\forall i, j, \quad 1 \leq i < j \leq n \Rightarrow a_{i,j} = 0_{\mathbb{K}}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

- A est diagonale ssi $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0_{\mathbb{K}}$
(elle est simultanément triangulaire supérieure et inférieure.)
- A est scalaire ssi A est diagonale avec les coefficients $a_{i,i}$ égaux

Th. $\triangleright$ **Matrices particulières et produit**

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaire supérieure.

Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est encore une matrice triangulaire inférieure.

Le produit de deux matrices diagonales est encore une matrice diagonale.

7.4 Matrices inversibles

7.4.1 Définition

La matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi

il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.

On note $B = A^{-1}$

A est inversible à droite ssi $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n$

A est inversible à gauche ssi $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), BA = I_n$

Test 169 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? pourquoi ?



Th. $\triangleright$ **Groupe Linéaire**

Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$

est le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices inversibles

. C'est un groupe pour le produit.

Test 170 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3 . A est-elle inversible ?

Th. $\triangleright$ **Inverse et transposée**

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

A est inversible $\Leftrightarrow A^T$ est inversible. Alors $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Test 171 Pouvez-vous trouver une matrice A carrée d'ordre 2 telle que $A^T = A^{-1}$?
(une telle matrice est une matrice orthogonale.)

7.4.2 Manipulations élémentaires

Les manipulations élémentaires sur $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont :

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ multiplication d'une ligne par un scalaire non nul
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ addition à une ligne d'un multiple d'une autre ligne
- $L_i \leftrightarrow L_j$ Échange de deux lignes
- La même chose avec les colonnes de la matrice

Notes :

- En combinant plusieurs manipulations élémentaires, on peut également
- $L_i \leftarrow L_i + \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ k \neq i}} \lambda L_k$ ajouter une combinaison linéaire des autres lignes
 - $L_i \leftarrow \sum_{k=1}^m \lambda_k L_k$ avec $\lambda_i \neq 0$ remplacer une ligne par une combinaison linéaire de toutes les lignes
 - L'échange $L_i \leftrightarrow L_j$ découle des deux premières manipulations.

Th. ▷ Lien entre manipulations élémentaires et produit

Une manipulation élémentaire sur ses lignes transforme A en PA .
 Une manipulation élémentaire sur ses colonnes transforme A en AQ
 (où P et Q sont inversibles).

Lemme :

Par des opérations élémentaires, toute matrice non nulle $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ peut se transformer en

$$\left(\begin{array}{c|c} \alpha & \cdots \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array} \right) \quad \text{où } \alpha \neq 0$$

Th. ▷ Méthode des pivots de Gauss

Par une suite de transformations élémentaires, toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ peut se mettre sous la forme

$$\left(\begin{array}{cccccc} \alpha_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{1,n} \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{r,r} & \cdots & \alpha_{r,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right) \quad \text{où } \prod_{k=1}^r \alpha_{k,k} \neq 0$$

Th. ▷ Inversibilité d'une matrice triangulaire

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls ; son inverse est alors une matrice triangulaire.

7.4.3 Calcul pratique de l'inverse

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice régulière. On peut calculer l'inverse A^{-1} en utilisant l'une des quatre méthodes suivantes :

Algorithme d'inversion (TECHNIQUE DU PIVOT DE GAUSS) :⁶

On travaillera uniquement sur les lignes, ou uniquement sur les colonnes.

Par des manipulations élémentaires, on transforme A en la matrice unité I_n . On applique simultanément les mêmes transformations à la matrice unité qui se transformera en A^{-1} .

Remarque : cet algorithme permet de déterminer l'inversibilité de A .

6. voir 21.4.4 page 322

Exemple : Etudions l'inversibilité de A et le cas échéant, calculons son inverse par la méthode du pivot de Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

2	7	3			1	0	0
3	9	4			0	1	0
1	5	3			0	0	1
2	7	3			1	0	0
0	-3	-1	$L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1$		-3	2	0
0	3	3	$L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1$		-1	0	2
2	7	3			1	0	0
0	-3	-1			-3	2	0
0	0	2	$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$		-4	2	2

La matrice A a été transformée en une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous non-nuls. Donc A est inversible.

2	7	3			1	0	0
0	-3	-1			-3	2	0
0	0	2			-4	2	2
4	14	0	$L_1 \leftarrow 2L_1 - 3L_3$		14	-6	-6
0	-6	0	$L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3$		-10	6	2
0	0	2			-4	2	2
12	0	0	$L_1 \leftarrow 3L_1 + 7L_2$		-28	24	-4
0	-6	0			-10	6	2
0	0	2			-4	2	2
1	0	0	$L_1 \leftarrow \frac{1}{12}L_1$		$-\frac{7}{3}$	2	$-\frac{1}{3}$
0	1	0	$L_2 \leftarrow -\frac{1}{6}L_2$		$\frac{5}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$
0	0	1	$L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$		$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et pour s'assurer que l'on ait pas fait d'erreurs, on calcule AA^{-1} afin de vérifier que $AA^{-1} = I_3$

Remarque : Appliquer un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforme A en I_n revient à multiplier A à gauche par une matrice B inversible.

Ainsi $BA = I_n$. Par définition de l'inversibilité, on obtient que A est inversible, d'inverse B .

Dans la seconde colonne, les mêmes opérations sur les lignes ont été appliquées à I_n , autrement dit, en bas de la seconde colonne, on trouve BI_n id est B , l'inverse de A !

Test 172

Utiliser une méthode (sans calculatrice) pour inverser $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$



Comment démontrer sans calculs qu'une matrice A est inversible? :

- A est une matrice diagonale ou triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls.
- A est le produit de matrices inversibles.
- Il existe une matrice B telle que $AB = I_n$, alors $A^{-1} = B$.
- Existe-t-il une expression factorisable par A et égale à I_n ? Dans ce cas l'autre facteur est l'inverse de A .

Exemple :

— Soit A une matrice carrée d'ordre n telle que

$$2A^2 - 3A + 4I = 0_n$$

Alors $4I = 3A - 2A^2$, d'où

$$I = A \times \left(\frac{1}{4} (3I - 2A) \right)$$

Finalement A est inversible, d'inverse $\frac{1}{4} (3I - 2A)$.

— Soit A une matrice carrée d'ordre n telle que

$$A^3 - 3A^2 + A = 0_n \text{ avec } (A^2 - 3A + I) \neq 0_n$$

Alors $A(A^2 - 3A + I) = 0_n$.

Supposons A inversible alors $A^{-1}A(A^2 - 3A + I) = A^{-1}0_n$

d'où $(A^2 - 3A + I) = 0_n$, ce qui est absurde d'après les données.

Par conséquent A n'est pas inversible.

Test 173

Utiliser la technique du pivot de Gauss pour déterminer l'inversibilité de :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.5 Système d'équations linéaires

7.5.1 Généralités

Un système linéaire de n équations à p inconnues $x_1, \dots, x_p$ est

$$\text{tout système du type } (1) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,k}x_k + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,k}x_k + \dots + a_{i,p}x_p = b_i \\ \dots\dots\dots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,k}x_k + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Vocabulaire :

- $(b_1, \dots, b_n)$ est le second membre.
- Si $b_1 = \dots = b_n = 0$, le système est dit homogène⁷
- Une solution du système est un p -uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ qui vérifie les n équations.
- Résoudre le système c'est trouver toutes les solutions.
- Le système est compatible s'il admet au moins une solution.

Un système homogène est donc compatible (solution nulle).

- $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est la matrice du système.

7.5.2 Interprétation matricielle

(1) est équivalent à l'équation matricielle $AX = B$

$$\text{où } A \text{ est la matrice du système, } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Avec cette interprétation :

si A est carrée inversible, alors
(1) admet une solution unique donnée par
 $X = A^{-1}B$

7.5.3 Cas général d'un système compatible

Si le système $AX = B$ est compatible :

- ▷ l'ensemble des solutions est l'espace affine de direction $\text{Ker}(A)$, noté $x_0 + \text{Ker}(A)$.
- ▷ $\text{Ker}(A)$ est l'ensemble des solutions du système homogène associé.
- ▷ x_0 est une solution particulière du système.
- ▷ En résumé toutes les solutions d'un système compatible sont obtenues en ajoutant à une solution particulière une des solutions du système homogène associé

7. On dit aussi "sans second membre".

Test 174

$$\text{Quelles sont les solutions de } \begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Test 175

$$\text{Inverser } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et en déduire les solutions de } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 5y + 3z = 2 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

7.5.4 Système de Cramer

Un système de Cramer est un système linéaire

de n équations, à n inconnues, de matrice inversible.

Conséquence : un système de Cramer admet une solution et une seule.

Résolution d'un système de Cramer triangulaire :

- Un système est triangulaire lorsque sa matrice A est triangulaire.
- Un tel système est de Cramer ssi les termes de la diagonale sont tous non nuls.
- La résolution d'un tel système se fait naturellement, "en cascade".

Test 176

$$\text{Résoudre les systèmes suivants : } \begin{cases} 2x = 6 \\ x - 3y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y - z = -2 \\ 3y - z = 4 \\ z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ 2x - 3y = 3 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Méthode du pivot pour la résolution d'un système de Cramer

En se limitant aux opérations élémentaires sur les lignes (avec éventuellement un ou des échanges de colonnes), la méthode du pivot de Gauss permet de transformer une matrice A en matrice triangulaire. Si on effectue les mêmes opérations sur le second membre, on obtient un système équivalent (un échange de colonnes revient à changer l'ordre des inconnues).

On peut choisir entre une représentation classique

$$\begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ x - 3y - 2z = 5 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ 5y + z = 2 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \dots$$

ou une représentation matricielle (la barre verticale est facultative).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -5 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \dots$$

Test 177

$$\text{Résoudre le système } \begin{cases} 2x + y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y + 2z = c \end{cases}$$

Test 178

$$\text{Nombre de solutions (en fonction de } \lambda) \text{ de } \begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda + 1 \\ x + 2y + \lambda z = 3\lambda \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

7.6 Exercices

Calcul Matriciel

Exercice 1

Expliciter les matrices :

$$A = ((-1)^{i+j})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} \quad B = (i+j)_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}} \quad C = (ij)_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} \quad D = (2i)_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq 2}}$$

Trouver une écriture compacte pour la matrice suivante

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & -9 & -11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Calculer les produits suivants :

$$\begin{array}{l} A = (1 \quad 3 \quad 5) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\ D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ E = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} (1 \quad 3 \quad 5) \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ H = (x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 3

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer tous les produits possibles.

Exercice 4

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Développer et simplifier

$$S = (2A)(3B) - (A + 2B)^2 + (A - B)(A + B)$$

Anneau

Exercice 5

Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

1. Montrer que E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
2. L'anneau E est-il intègre ? Est-il commutatif ?
3. Quel sont les éléments inversibles de E . Leur inverse est-il dans E ?

Puissances**Exercice 6**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\frac{5}{2}A^{2014} + \frac{3}{2}A^{2013} + \frac{1}{2}A^{2012} + 2I_n = 0$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 7

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} q & 0 & 1 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}$ où $q \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une matrice M telle que $A = qI + M$.
2. Calculer M^2 . En déduire A^n .

Exercice 8

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le réel a tel que $A = aI + B$. Calculer B^2 et B^3 .
2. A l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer A^n .

Exercice 9

On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer P^2 , Q^2 , PQ , QP . Déterminer deux réels a et b tels que $A = aP + bQ$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = a^n P + b^n Q$

Exercice 10

Mq $\forall n \geq 1$, $J^n = 6^{n-1}J$ avec $J = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 11

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I$.

1. Calculer B^2 et B^3 . En déduire l'expression de B^k en fonction de k .
2. En remarquant que $A = B + 2I$, calculer A^n .

Résolution de systèmes**Exercice 12**

Les systèmes suivant sont-ils compatibles ? Si oui, expliciter les solutions :

$$\begin{array}{ccc}
1. & \left\{ \begin{array}{l} -x - y + 2z = -1 \\ 3x + 2y - 4z = 1 \\ x + 3y - 6z = 5 \end{array} \right. & 3. & \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{array} \right. & 5. & \left\{ \begin{array}{l} 2a + b + c - 3d = 1 \\ a - 2b + c + d = -2 \\ -a + b + 5c = 1 \\ 3a - 2b - c - d = -2 \\ 2a - b + c - d = -1 \end{array} \right. \\
2. & \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = 8 \\ 4x - 5y + z = 15 \\ 2x + 4z = 1 \end{array} \right. & 4. & \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = -5 \\ 2x + 13y - 7z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{array} \right. & &
\end{array}$$

Exercice 13

Résoudre par la méthode du pivot en discutant suivant la valeur du paramètre λ les systèmes suivants. (*Indication : on pourra échanger des lignes afin de manipuler un pivot fonction de λ le plus tard possible*)

$$\begin{array}{ccc}
1. & (E_\lambda) : \left\{ \begin{array}{l} (1 - \lambda)x + y = 0 \\ -x + (2 - \lambda)y + z = 0 \\ x + (1 - \lambda)z = 0 \end{array} \right. & 3. & (E_\lambda) : \left\{ \begin{array}{l} (1 - \lambda)x + y + z = 0 \\ x + (1 - \lambda)y + z = 0 \\ x + y + (1 - \lambda)z = 0 \end{array} \right. \\
2. & (E_\lambda) : \left\{ \begin{array}{l} (2 - \lambda)x + y + z = 0 \\ x + (2 - \lambda)y + z = 0 \\ x + y + (2 - \lambda)z = 0 \end{array} \right. & &
\end{array}$$

Exercice 14

Déterminer l'ensemble des polynômes P de degré 3 vérifiant

$$P(1) = P(-2) = 1 \quad P'(1) = 1$$

Exercice 15

Soient a et b deux réels.

On considère le système

$$(E_{(a,b)}) : \left\{ \begin{array}{l} ax + 2y - z = 1 \\ -x + 3y + z = b \\ 2x - 7y + 3z = -2 \end{array} \right.$$

Résoudre le système selon les valeurs de a et de b .

7.7 Exercices Complémentaires

Exercice 1

Centre de $\mathcal{M}_n(K)$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ commutant avec toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_n(K)$.

Montrer que A est une matrice scalaire (c'est-à-dire est un multiple scalaire de I_n).

Indication : prendre $B = E_{i,j}$.

Exercice 2

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une telle que $M^n = 0_n$.

Montrer que $I_n - M$ est inversible, et en déterminer l'inverse.

Exercice 3

Les matrices triangulaires strictes sont nilpotentes

On fixe n un entier une fois pour toutes. On considère des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note, pour $0 \leq k \leq n-1$, $T_{k,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices A triangulaire supérieures, ayant k "sur-diagonales" nulle, c'est-à-dire telle que $a_{i,j} = 0$ si $i \geq j - k$. Par exemple, $T_{0,n}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, $T_{1,n}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes...

1. Soit $M_1 \in T_{k_1,n}$ et $M_2 \in T_{k_2,n}$. Montrer que $M_1 M_2 \in T_{k_1+k_2,n}$.
2. En déduire que toute matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente.

Exercice 4

Inverser les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & & a_2 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_i \neq 0$$

Exercice 5

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A + N$.

1. Vérifier que $AN = NA$ et $N^3 = 0_3$.
2. Calculer B^n pour tout $n > 2$.

Exercice 6

Résoudre les systèmes suivants, de paramètre a .

$$(S1) \begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + 4y - 5z = -4 \end{cases} \quad (S2) \begin{cases} x + 2y + az = 0 \\ x - ay + z = 1 \\ ax - 2y + z = a \end{cases}$$

Exercice 7

$$\text{Résoudre le système} \quad \begin{cases} x_1 & +2x_2 & +\cdots+ & (n-1)x_{n-1} & +nx_n & = a_1 \\ 2x_1 & +3x_2 & +\cdots+ & nx_{n-1} & +x_n & = a_2 \\ & & \dots\dots\dots & & & \\ nx_1 & +x_2 & +\cdots+ & (n-2)x_{n-1} & +(n-1)x_n & = a_n \end{cases}$$