Chapitre 5

Fonctions usuelles

5.1 Notions incontournables

Les résultats de ce paragraphe seront démontrés plus loin dans ce cours.

5.1.1 Dérivée d'une composée

Attention : La dérivation s'applique à une fonction et non à son image.
Il faut écrire $f\,'(x)$ (et non $\big(f(x)\big)'$.
Ceci évitera les confusions grossières entre $f'\big(g(x)\big)$ et $(f \circ g)'(x)$.

En cas de nécessité, **<u>utiliser la notation différentielle</u>**

Exemple Écrire $(x \sin x)'$ n'est pas correct [1] et peut conduire à des fautes graves.
Il faut préférer l'écriture $\dfrac{d}{dx}(x \sin x)$

Soit

$$g \circ f \left\{ \begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{f} & J & \xrightarrow{g} & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g\big(f(x)\big) \end{array} \right.$$

où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Si f est dérivable sur I, et g dérivable sur J, alors la composée $g \circ f$ est dérivable [2] sur I et

$$(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$$

Test 110

Déterminer l'ensemble de définition de $$f : x \mapsto \sqrt{\frac{\ln x}{x-2}}$$ On commencera la rédaction par : "Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow \cdots$". f est-elle dérivable sur son ensemble de définition ?

Test 111

Ecrire <u>directement</u> la dérivée des fonctions qui, à x associent :

1 : $\sin(x^2)$	**2** : $\sin^2 x$	**3** : $\sin^3(x^2)$
4 : $f \circ g \circ h$	**5** : $\ln\big(\sin\sqrt{1+e^x}\big)$	**6** : $\sqrt{x}\, e^{\sin x}$

(on ne cherchera pas à déterminer l'ensemble de dérivabilité, ni à transformer le résultat)

5.1.2 Bijections et fonctions réciproques

Note : Le résultat suivant se retrouve facilement en dérivant $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$

1. C'est un abus d'écriture parfois toléré mais qu'il faut éviter.
2. **Attention :** ces conditions assurent la dérivabilité de la composée $g \circ f$. Elles sont suffisantes mais ne sont pas nécessaires. **Exemple** : la fonction nulle $\mathbf{0}$ vérifie $\mathbf{0} \circ \varphi$ dérivable même si φ ne l'est pas.

☐ Bijection

☐ Réciproque

Th. ▷ **Théorème de Bijection continue** *(admis pour le moment)*

Si f est une fonction réelle, continue, strictement monotone sur l'intervalle I :
- f définit une bijection de I dans l'intervalle $J = f(I)$
- la bijection réciproque f^{-1} est continue strictement monotone sur J.
  f^{-1} a le **même sens de variation** que f.
- si de plus f est dérivable sur I, et f' ne s'annule pas sur I, alors

$$f^{-1} \text{ est dérivable sur } J \text{ et } \quad \forall\, t \in J,\ (f^{-1})'(t) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(t)\right)}$$

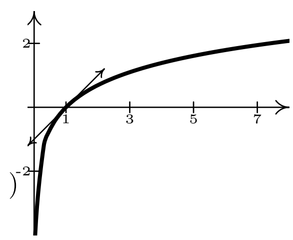
Test 112 Utiliser la dérivée de la $x \mapsto e^x$ pour retrouver la dérivée de $x \mapsto \ln x$
De même, utiliser la dérivée de "ln" pour retrouver la dérivée de l'exponentielle

5.2 Logarithmes, exponentielles, puissances

5.2.1 Fonctions logarithmes

La fonction **logarithme népérien** [3] est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.

Sur $\left]0, +\infty\right[$, "ln" est :
- continue, strictement croissante
- dérivable, avec $\ln' x = \dfrac{1}{x}$
- bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$
- $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x\,y) = \ln x + \ln y$
- $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln\dfrac{1}{x} = -\ln x$
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x^n) = n \ln x$



D'où $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\dfrac{x}{y} = \ln(x) - \ln(y)$.

Les limites à connaître :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

$$\forall\, \alpha, \beta > 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln^\beta x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0$$

Autres fonctions logarithmes

On appelle "fonction logarithme", toute fonction réelle non nulle, définie dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x\,y) = f(x) + f(y)$

✠ Ce sont les fonctions $\quad x \mapsto \lambda \ln x, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$.

✠ Elles sont toutes bijectives de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$.

✠ Elles sont précisées par l'unique réel $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ qui a pour image "1".

✠ On la désigne par **logarithme de base a** : $\boxed{\forall\, a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}, \quad \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}}$

✠ $\log_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\quad {\log_a}'(x) = \dfrac{1}{x\,\ln a}$

3. John Neper (ou Napier : 1550-1617). Mathématicien et théologien écossais.
Entre à 13 ans à l'université S^t-Andrews où il n'obtient aucun diplôme.
A découvert les logarithmes par une approche cinématique.

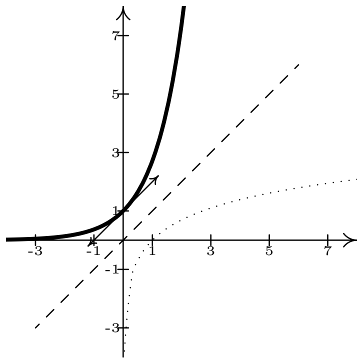
5.2.2 Fonction exponentielle

La fonction "logarithme népérien" est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$, continue, strictement croissante.

La **fonction exponentielle réelle** est la fonction réciproque. Ses propriétés découlent des propriétés de "ln".

Sur $\mathbb{R}$, "exp" est :

- continue
- strictement croissante
- dérivable, avec $\exp' x = \exp x$
- bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$
- $\forall\ x, y, \quad \exp(x+y) = \exp x \times \exp y$
- en repère orthonormé, sa représentation graphique se déduit de celle de "ln" par symétrie par rapport à la première bissectrice



Les limites à connaître

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+ \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\forall\ \alpha, \beta > 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^\alpha e^{\beta x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$$

5.2.3 Fonctions puissances

Une **fonction puissance** est une fonction de la forme [4] $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & x^a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$.

Les propriétés de l'exponentielle donnent les règles usuelles de calculs sur les puissances.

Attention : Quand l'exposant n'est pas entier, la fonction puissance n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$.
Lorsqu'on "mélange" des calculs avec des exposants entiers et des exposants non entiers, il faut toujours travailler dans $\mathbb{R}_+^*$. Sans cette précaution, les "règles usuelles de calculs" ne sont plus valables.

$\boxed{\text{Th.}}$ ▷ **transformation et dérivation de** $x \mapsto x^a$

$\forall\ a \in \mathbb{R}, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^a = e^{a \ln x}$.
Par conséquent, cette fonction se dérive en $\quad x \mapsto a\, x^{a-1}$

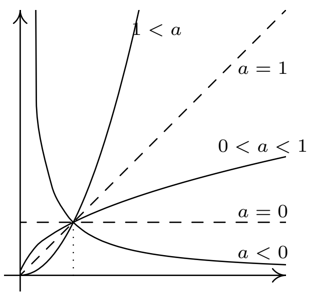
Ceci permet d'obtenir les variations et la représentation graphique des fonctions $x \mapsto y = x^a$

$a > 0$

x	0		1		$+\infty$
y	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$a < 0$

x	0		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0



En 0 Pour $a > 0$, on peut poser le prolongement par continuité $0^a = 0$.
Pour $a = 0$, on pourrait poser le prolongement par continuité $0^0 = 1$.

4. Remarquer la différence sur les ensembles de définition.
Habituellement : $x \mapsto x^5$ est définie sur $\mathbb{R}$, $\quad x \mapsto x^{-5}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, mais, en tant que "cas particulier de fonction puissance", l'ensemble de définition est limité à $\mathbb{R}_+^*$.

Attention : Le résultat précédent **n'est valable que pour** a **constant**...
Dans le cas $f : x \mapsto u(x)^{v(x)}$ $[u, v$ dérivables, u à valeurs strictement positives],
il faut impérativement écrire

$$f(x) = e^{v(x)\ \ln u(x)}$$

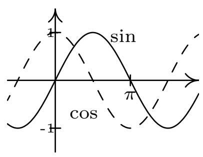
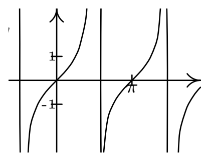
qui se dérive en $f\,'(x) = e^{v(x)\ \ln u(x)}\left(v'(x)\ \ln u(x) + v(x)\ \dfrac{u'(x)}{u(x)}\right)$.

5.3 Fonctions circulaires directes

A l'exception des formules trigonométriques [voir 5.3.4] qui sont à connaître par coeur, tous les résultats de ce paragraphe se retrouvent immédiatement en utilisant le cercle trigonométrique. Mais savoir les retrouver rapidement reste indispensable !

5.3.1 Propriétés

Rappelons que pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont l' abscisse et l'ordonnée du point situé sur le cercle unité d'affixe $e^{i\alpha}$.
Les fonctions trigonométriques circulaires sont continues et dérivables sur leur ensemble de définition :

propriété	**sin, cos**	**tan :** $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
définie sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$-$\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$
période	2π	π
dérivée	cos, -sin	$1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$
limites	pas de limite à l'infini	$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ <}} \tan x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{2}\\ >}} \tan x = -\infty$
représentation		

Test 113

Dans un repère $(O; I, J)$, on considère un réel x appartenant à l'intervalle $]0; \frac{\pi}{4}]$, le point M du cercle trigonométrique associé à x, et le point T à l'intersection de la droite (OM) et de la tangente au cercle en I.

1. Montrer que $IT = \dfrac{sinx}{cosx}$
2. En rangeant dans l'ordre croissant les aires des triangle OIM, OIT et celle du secteur de disque OIM, montrer que, pour tout x de $]0; \frac{\pi}{4}]$, $sinx \leq x \leq \dfrac{sinx}{cosx}$.
3. En déduire que pour tout x de $]0; \frac{\pi}{4}]$, $cosx \leq \dfrac{sinx}{x} \leq 1$.
4. On montre de même que l'encadrement est également vrai lorsque x appartient à l'intervalle $[-\frac{\pi}{4}; 0[$.
5. En déduire, en utilisant la définition, que la fonction sinus est dérivable en 0 et que sin'(0) = 1.

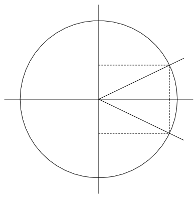
Test 114

Déterminer une période de chacune des fonctions suivantes :
1 : $x \mapsto \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x)$ **2 :** $x \mapsto \tan\dfrac{2x}{3} \times \cos\dfrac{3x}{2}$

5.3.2 Transformations élémentaires

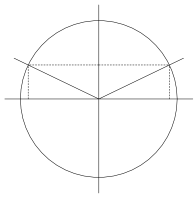
Ce sont les transformations du genre $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, etc.

Angles opposés



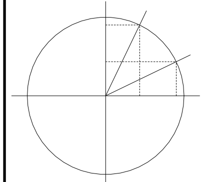
$\cos(-x) = \cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$
$\tan(-x) = -\tan x$

Angles supplémentaires



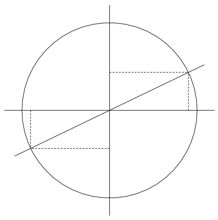
$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\tan(\pi - x) = -\tan x$

Angles complémentaires



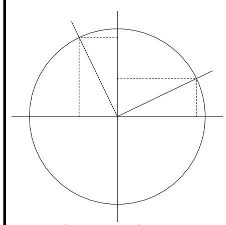
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

Angles qui diffèrent de π



$\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$
$\tan(\pi + x) = \tan x$

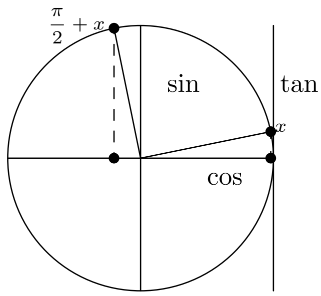
Angles qui diffèrent de $\frac{\pi}{2}$



$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

Il ne faut pas les apprendre par coeur, ni utiliser les formules de trigonométrie, mais savoir utiliser le "cercle trigonométrique". Il faut savoir où se lisent $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$. Ci-contre, la visualisation de

$$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$$



Test 115

> Utilisez le cercle trigonométrique pour transformer :
> $\cos(3\pi - x)$ $\cos(3\pi + x)$ $\tan(x - 125\pi)$ $\sin(x + \frac{17\pi}{2})$
> $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$ $\sin(x - \frac{\pi}{2})$ $\sin(x + \frac{\pi}{2})$

Th. ▷ **Changer de ligne trigonométrique**

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$$

5.3.3 Équations élémentaires

Les solutions des équations élémentaires se retrouvent immédiatement à partir du cercle trigonométrique :

Th. ▷ **Equations élémentaires**

$$\begin{aligned}
\sin x = \sin a &\Leftrightarrow x \equiv a\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \pi - a\ [2\pi] \\
\cos x = \cos a &\Leftrightarrow x \equiv a\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -a\ [2\pi] \\
\tan x = \tan a &\Leftrightarrow x \equiv a\ [\pi]
\end{aligned}$$

Test 116 Résoudre $\sin(3\,x)=\sin(2\,x)$ puis $\sin(3\,x)=\cos(2\,x)$, et représenter les solutions sur un cercle trigonométrique

Test 117 Résoudre l'équation $\sin x=\sin(2\,x)$.

Test 118 Résoudre l'équation $\sin x=\tan x$

Résolution de l'équation $a\,\sin x+b\,\cos x=c \quad a,b\neq 0$

- *Méthode :* on factorise par $\sqrt{a^2+b^2}\neq 0$ qui donne

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ qui devient

au choix : $\sin(x+\theta_1)=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ou $\cos(x-\theta_2)=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Test 119 **Cas particulier important :**
transformez $\sin x+\cos x$ et $\sin x-\cos x$

Test 120 Résoudre l'équation $\sin x+\sqrt{3}\,\cos x=\sqrt{2}$

5.3.4 Formules trigonométriques

Il faut les apprendre et les revoir régulièrement...
Il faut également savoir les retrouver rapidement...

Formule fondamentale
C'est cette formule qui explique la dénomination "fonctions circulaires"
En effet, "sin" et "cos" peuvent servir à paramétrer un ***cercle*** $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$

$$\begin{aligned} 1 &= \sin^2 a+\cos^2 a \\ \frac{1}{\cos^2 a} &= 1+\tan^2 a \qquad a\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi] \end{aligned}$$

Formules d'addition

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin a\,\cos b+\sin b\,\cos a \\ \sin(a-b) &= \sin a\,\cos b-\sin b\,\cos a \\ \cos(a+b) &= \cos a\,\cos b-\sin a\,\sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a\,\cos b+\sin a\,\sin b \\ \tan(a+b) &= \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\,\tan b} \qquad a,b,a+b\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi] \\ \tan(a-b) &= \frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\,\tan b} \qquad a,b,a-b\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi] \end{aligned}$$

Formules de duplication

$$\begin{aligned} \sin(2\,a) &= 2\,\sin a\,\cos a \\ \cos(2\,a) &= \cos^2 a-\sin^2 a \\ \cos(2\,a) &= 2\,\cos^2 a-1 \\ \cos(2\,a) &= 1-2\,\sin^2 a \\ \tan(2\,a) &= \frac{2\,\tan a}{1-\tan^2 a} \qquad a\not\equiv\frac{\pi}{4}\ [\frac{\pi}{2}] \text{ et } a\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi] \end{aligned}$$

Test 121 Calculer $\sin\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
On pourra utiliser $\cos\dfrac{\pi}{4}$ et $\cos\dfrac{\pi}{6}$.

Test 122 Calculer $\sin(5x)$ en fonction de $\sin x$ en utilisant $5x=2x+3x$.

Produits en sommes : LINEARISER
On ajoute (ou retranche) les formules fondamentales associées :

$$\begin{aligned} \sin a\,\cos b &= \frac{1}{2}\,\big(\sin(a+b)+\sin(a-b)\big) \\ \cos a\,\cos b &= \frac{1}{2}\,\big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\big) \\ \sin a\,\sin b &= -\frac{1}{2}\,\big(\cos(a+b)-\cos(a-b)\big) \end{aligned}$$

Test 123

Trouver une primitive de la fonction $x \mapsto 3\sin(x)\cos(4x)$.
On pourra utiliser $\sin a\,\cos b = \frac{1}{2}\,\big(\sin(a+b)+\sin(a-b)\big)$.

Sommes en produits : FACTORISER
On "inverse" les formules précédentes :

$$\begin{aligned} \sin p+\sin q &= 2\,\sin\frac{p+q}{2}\,\cos\frac{p-q}{2} \\ \sin p-\sin q &= 2\,\sin\frac{p-q}{2}\,\cos\frac{p+q}{2} \\ \cos p+\cos q &= 2\,\cos\frac{p+q}{2}\,\cos\frac{p-q}{2} \\ \cos p-\cos q &= -2\,\sin\frac{p+q}{2}\,\sin\frac{p-q}{2} \end{aligned}$$

Test 124

Sachant que $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, montrer l'égalité

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 4\,\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

Test plus difficile : on utilisera le fait que $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}$ et que la transformation en $\frac{\pi}{2}-x$ permet d'échanger les lignes trigonométriques sin et cos.

Test 125

Retrouver les valeurs de

$$C_n = \sum_{k=0}^{n}\cos(k\,x) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n}\sin(k\,x) \quad \text{[voir 4.2.4 page 55]}$$

en transformant les quantités $\sin\frac{x}{2}\cdot C_n$ et $\sin\frac{x}{2}\cdot S_n$

(et utilisez le "**principe des dominos**")

5.4 Fonctions circulaires réciproques

5.4.1 Définitions

La fonction Arcsin

☐ **Restriction**

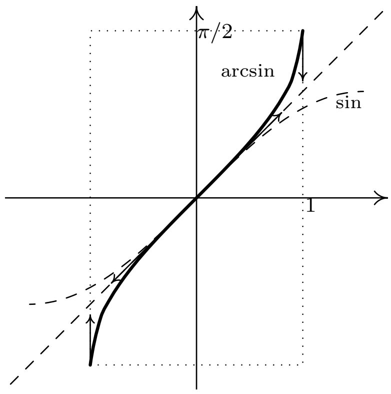
La restriction de la fonction sinus à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ est continue, strictement croissante. Elle définit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$. Elle admet une fonction réciproque notée **Arcsin**

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} y=\operatorname{Arcsin} x \\ -1\leqslant x\leqslant 1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=\sin y \\ -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\end{array}\right.}$$

Les propriétés de la fonction Arcsin découlent de celles de la fonction sin :

- définie, continue sur [-1,1]
- fonction impaire
- strictement croissante
- Tableau de variation
- représentation graphique
- tangente à l'origine et aux extrémités.

Voir la dérivée page 73



La fonction Arccos

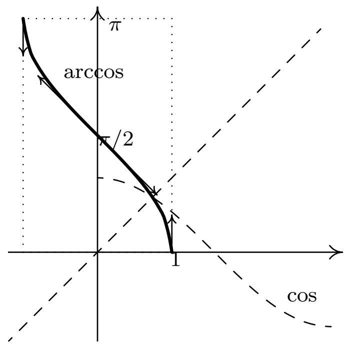
La restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $\big[0,\pi\big]$ est continue, strictement décroissante. Elle définit une bijection de $\big[0,\pi\big]$ sur $\big[-1,1\big]$. Elle admet une fonction réciproque notée **Arccos**

$$\boxed{\left.\begin{matrix} y = \operatorname{Arccos} x \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = \cos y \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi \end{matrix}\right.}$$

Les propriétés de la fonction Arccos découlent de celles de la fonction cos :

- définie, continue sur [-1,1]
- strictement décroissante
- Tableau de variation
- représentation graphique
- tangente en $(0,\frac{\pi}{2})$ et aux extrémités.

Voir la dérivée page 73



La fonction Arctan

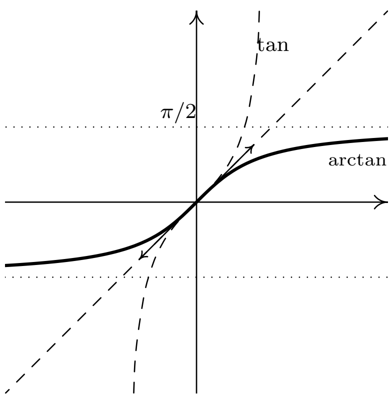
La restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ est continue, strictement croissante. Elle définit une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet une fonction réciproque notée **Arctan**

$$\boxed{\left.\begin{matrix} y = \operatorname{Arctan} x \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = \tan y \\ -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2} \end{matrix}\right.}$$

Les propriétés de la fonction Arctan découlent de celles de la fonction tan :

- Définie, continue sur $\mathbb{R}$
- strictement croissante
- Tableau de variation
- représentation graphique
- asymptotes
- tangente à l'origine.

Voir la dérivée page ??



Attention : nous n'avons pas $\operatorname{Arcsin} = \sin^{-1}$, etc.

Test 126

Donner la valeur de :
1 : $\sin(\text{Arcsin}\,\frac{1}{2})$ **2** : $\text{Arcsin}(\sin \pi)$ **3** : $\text{Arcsin}\left(\sin(7\,\pi)\right)$
4 : $\text{Arcsin}\left(\sin \frac{17\,\pi}{3}\right)$ **5** : $\text{Arcsin}\left(\cos \frac{\pi}{3}\right)$ **6** : $\text{Arcsin}(\sin 10)$

Test 127

Quel est l'ensemble de définition des composées suivantes :
1 : $\text{Arcsin} \circ \sin$? **2 :** $\sin \circ \text{Arcsin}$?
En donner les représentations graphiques : On se limitera à $-\pi \leqslant x \leqslant 2\,\pi$

Quelques formules à connaître

- $\forall\, x \in [-1, 1], \quad \text{Arcsin}\, x + \text{Arccos}\, x = \dfrac{\pi}{2}$
- $\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{|x|}\, \dfrac{\pi}{2}$

5.4.2 Dérivées des fonctions circulaires inverses

Dérivée de Arc sinus

La fonction $\sin : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \left]-1, 1\right[$ est bijective, dérivable, et la dérivée ne s'annule pas.

La fonction Arcsin est dérivable

sur $\left]-1, 1\right[$, $\quad \text{Arcsin}\,'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Attention : bien que définie pour $x = 1$ et $x = -1$, Arcsin n'y est pas dérivable.

Dérivée de Arc cosinus

La fonction $\cos : \left]0, \pi\right[\to \left]-1, 1\right[$ est bijective, dérivable, et la dérivée ne s'annule pas.

La fonction Arccos est dérivable

sur $\left]-1, 1\right[$, $\quad \text{Arccos}\,'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Attention : bien que définie pour $x = 1$ et $x = -1$, Arccos n'y est pas dérivable.

Dérivée de Arc tangente

La fonction $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est bijective, dérivable, et la dérivée ne s'annule pas.

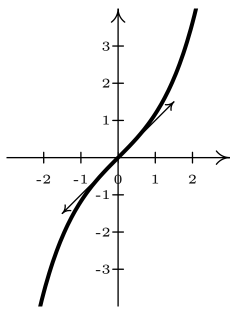
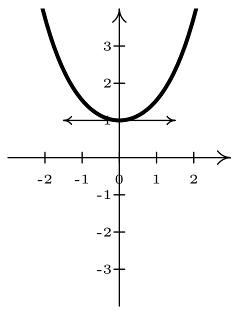
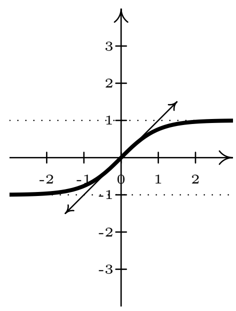
La fonction Arctan est dérivable

sur $\mathbb{R}$, $\quad \text{Arctan}\,'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

5.5 Fonctions hyperboliques

5.5.1 Fonctions hyperboliques directes

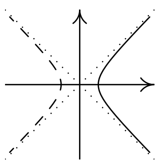
Les fonctions "sinus hyperbolique" et "cosinus hyperbolique" sont les composantes impaire et paire de la fonction "exponentielle". On les note : "sh" et "ch".

propriété	**sh**	**ch**	**th**
valeur	$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$
définie sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
parité	impaire	paire	impaire
dérivée	ch	sh	$1 - \operatorname{th}^2$
représentation			

5.5.2 Trigonométrie hyperbolique

Formules fondamentales :

$$\boxed{\begin{array}{c} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \\ 1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \end{array}}$$



C'est cette formule qui justifie la dénomination "fonctions hyperboliques".

"ch" et "sh" peuvent être utilisées pour paramétrer l'hyperbole $\begin{cases} x = \pm \operatorname{ch} \theta \\ y = \operatorname{sh} \theta \end{cases}$.

transformation d'exponentielles
C'est l'équivalent des "formules d' Euler" :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \\ e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \end{cases}$$

Formules d'addition A titre d'exercice[5]...

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{sh}(a+b) & = & \operatorname{sh} a\ \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b\ \operatorname{ch} a \\ \operatorname{sh}(a-b) & = & \operatorname{sh} a\ \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b\ \operatorname{ch} a \\ \operatorname{ch}(a+b) & = & \operatorname{ch} a\ \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a\ \operatorname{sh} b \\ \operatorname{ch}(a-b) & = & \operatorname{ch} a\ \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a\ \operatorname{sh} b \end{array}$$

Test 128 Calculez $\operatorname{sh}(3\,x)$ en fonction de $\operatorname{sh} x$.

Remarque En fait, à quelques signes près, toutes les formules de trigonométrie circulaires se retrouvent en trigonométrie hyperbolique

5. Ces formules sont "Hors Programme".

5.6 Primitives usuelles : compléments

intervalle	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x + C^{te}$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + C^{te}$
$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$	$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C^{te}$
$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$\tan x + C^{te}$

intervalle	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + C^{te}$
$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + C^{te}$
$\mathbb{R}$	$\operatorname{th} x$	$\ln \operatorname{ch} x + C^{te}$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1-\operatorname{th}^2 x$	$\operatorname{th} x + C^{te}$
$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\frac{1}{\operatorname{th} x} + C^{te}$

intervalle	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctan} x + C^{te}$
$]-1,1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin} x + C^{te}$

Les primitives suivantes sont données sous réserve de définition...
Il ne faut pas apprendre ces résultats par cœur.

Fraction du type inverse d'un polynôme de degré 1 :

- $\displaystyle\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln\lvert x-a\rvert + C^{te}$

Fraction du type inverse d'un polynôme de degré 2 :

- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{Arctan} x + C^{te}$ (primitive connue)
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\frac{x}{a} + C^{te} \qquad (a \neq 0)$ (on factorise par a et on change de variable)
- $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$ pour $\Delta < 0$: Arctan

(Cas précédent après décomposition canonique)

- $\displaystyle\int \frac{x+\beta}{ax^2+bx+c}\,dx$ pour $\Delta < 0$: faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur puis isoler en 2 fractions, l'une donnant un logarithme et l'autre un *Arctan*
- $\displaystyle\int \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}\,dx = \int \frac{a}{(x-x_1)} + \frac{b}{(x-x_2)}\,dx$ puis 2 logarithmes

(a et b se détermine par identification)

- $\displaystyle\int \frac{1}{(x-x_1)^2}\,dx = \frac{-1}{(x-x_1)} + C^{te}$

Test 129

Mettre $\displaystyle\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ sous la forme d'une somme de deux fractions.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}$.

Inspirez-vous de ce qui précède pour calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

Test 130 Intégrer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{6-x}{(x-3)(2\,x-5)}\,dx$

Test 131 Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^{\,2}+1)^{\,3}}\,dx$.

5.7 Exponentielle complexe

La fonction **exponentielle complexe** est l'application définie sur $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ définie par : $\boxed{\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^{\,2},\quad e^{\,x+i\,y} = e^{x}\,\big(\cos y + i\,\sin y\big)}$

Les propriétés usuelles[6] de l'exponentielle restent valables dans $\mathbb{C}$.

Définition

Dérivée d'une fonction complexe d'une variable réelle :

Soit $f : \begin{cases} I\subset\mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & f(t) = f_1(t) + i\,f_2(t) \end{cases}$,

où f_1 et f_2 sont à valeurs réelles.

f est dérivable sur I si et seulement si f_1 et f_2 le sont,

et alors $\boxed{\forall\ t\in\ I,\quad f\,'(t) = f_1'(t) + i\,f_2'(t)}$

Applications :

► Si $\varphi : I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est dérivable, alors, la fonction $f : \begin{cases} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{\varphi(t)} \end{cases}$

est dérivable sur I , et $\boxed{\dfrac{d}{d\,t}\,e^{\,\varphi(t)} = \varphi\,'(t)\,e^{\,\varphi(t)}}$

► $\alpha\in\mathbb{C}$. La fonction $\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{\,\alpha\,t} \end{cases}$ est dérivable et $\boxed{\dfrac{d}{d\,t}\,e^{\,\alpha\,t} = \alpha\,e^{\,\alpha\,t}}$

6. Propriétés de morphisme, c'est-à-dire $e^{a+b} = e^{a}\times e^{b}$

5.8 Exercices

Exercice 1

Calculer $\sin(2\,x)$ sachant que $\sin x + \cos x = 2\sqrt{\dfrac{2}{5}}$.
Calculer ensuite $|\cos(2\,x)|$ et $|\tan(2\,x)|$

Exercice 2

Résoudre le système $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ 4\,\cos x\,\cos y = 3 \end{cases}$

Primitives

Exercice 3
Déterminer les primitives suivantes :

$$\text{a) } \int^x (t^2 - t + 1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \quad \text{b) } \int^x (t-1)\sin t\,\mathrm{d}t \quad \text{c) } \int^x (t+1)\mathrm{ch}t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 4
Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x \quad \text{c) } \int_0^1 \frac{\mathrm{Arctan}\,x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Puissances et exponentielles

Exercice 5
Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x\to+\infty} x^{1/x} \quad \text{b) } \lim_{x\to 0} x^{\sqrt{x}} \quad \text{c) } \lim_{x\to 0^+} x^{1/x}$$

Exercice 6
Résoudre les équations suivantes :

a) $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{1-x} = \mathrm{e} + 1$ dans $\mathbb{R}$ *b)* $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ dans $\mathbb{R}_+^*$ *c)* $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$

Fonctions trigonométriques

Exercice 7
Linéariser :

a) $\cos^2 x$ b) $\cos x \sin^2 x$ c) $\cos^2 x \sin^2 x$
d) $\cos a \cos b$ e) $\cos a \cos b \cos c$

Exercice 8
Développer :

a) $\cos 3a$ b) $\tan(a+b+c)$

Exercice 9

Ecrire sous la forme $A\cos(x-\varphi)$ les expressions suivantes :

$$\text{a) } \cos x + \sin x \quad \text{b) } \cos x - \sqrt{3}\sin x$$

Exercice 10

Résoudre les équations suivantes d'inconnues $x \in \mathbb{R}$.

a) $\cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4)$ b) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1$
c) $\sin x + \sin 3x = 0$ d) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$
e) $3\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{6}$ f) $2\sin x.\cos x + \sqrt{3}\cos 2x = 0$

Fonctions trigonométriques inverses

Exercice 11

Simplifier les expressions suivantes :

a) $\cos(2\,\mathrm{Arccos}\,x)$ b) $\cos(2\,\mathrm{Arcsin}\,x)$ c) $\sin(2\,\mathrm{Arccos}\,x)$
d) $\cos(2\,\mathrm{Arctan}\,x)$ e) $\sin(2\,\mathrm{Arctan}\,x)$ f) $\tan(2\,\mathrm{Arcsin}\,x)$

Exercice 12

Simplifier $\mathrm{Arcsin}\,\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
On pourra déterminer son ensemble de dérivabilité puis calculer sa dérivée.

Exercice 13

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle :

$$\text{a) } \mathrm{Arcsin}\,x = \mathrm{Arcsin}\,\frac{4}{5} + \mathrm{Arcsin}\,\frac{5}{13} \quad \text{b) } \mathrm{Arcsin}\tan x = x \quad \text{c) } \mathrm{Arccos}\,x = \mathrm{Arcsin}\,2x$$

Fonctions hyperboliques

Exercice 14

Soit $y \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On pose $x = \ln\left(\tan\left(\dfrac{y}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.
Montrer que $\mathrm{th}\dfrac{x}{2} = \tan\dfrac{y}{2}$, $\mathrm{th}x = \sin y$ et $\mathrm{ch}x = \dfrac{1}{\cos y}$.

Exercice 15

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(a + kb) \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(a + kb)$$

5.9 Exercices Complémentaires

Exercice 1

Un grand classique : la formule de **Machin** [7]

Montrer que $4 \text{ Arctan } \dfrac{1}{5} - \text{Arctan } \dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$

Exercice 2

a) Montrer que, pour tout $x > -1$

$$\ln(1+x) \leqslant x$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Exercice 3

a) Etablir que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$, $\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| \leqslant \sqrt{|y-x|}$.

b) Ce résultat est-il encore vrai en terme de racine cubique ?

Exercice 4

Résoudre les systèmes suivants :

$$\text{a)} \begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} \mathrm{e}^x \, \mathrm{e}^{2y} = a \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

Exercice 5

Etablir que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\sin x \leqslant x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 6

Soit $x \neq 0 \quad [2\pi]$.

a) Montrer

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

en procédant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

b) En exploitant les nombres complexes.

Exercice 7

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle :

d) $\text{Arctan } x + \text{Arctan}\left(x\sqrt{3}\right) = \dfrac{7\pi}{12}$ e) $\text{Arcsin } \dfrac{2x}{1+x^2} = \text{Arctan } x$ f) $\text{Arcsin } \dfrac{\tan x}{2} = x$

Exercice 8

Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\text{Arctan}(p+1) - \text{Arctan}(p)$.

Etudier la limite de la suite (S_n) de terme général : $S_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \text{Arctan } \frac{1}{p^2+p+1}$.

7. John Machin (1680-1751) Mathématicien Anglais, a calculé π avec 100 décimales grâce à cette formule et à la série de Grégory.