

Chapitre 4

Nombres complexes

4.1 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

4.1.1 Définition

Définition (Définition)

On admet qu'il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$ et appelé ensemble des nombres complexes, vérifiant les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication possédant les mêmes propriétés algébriques (règles de calculs, distributivité...) que sur $\mathbb{R}$.
- Il existe un élément de $\mathbb{C}$ noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont des nombres réels.

$x = \operatorname{Re}(z)$	est la <u>partie réelle</u>
$y = \operatorname{Im}(z)$	est la <u>partie imaginaire</u>

Un complexe de la forme iy , $y \in \mathbb{R}$ est un imaginaire pur. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

Ainsi tout complexe s'écrit de manière unique comme somme d'un réel et d'un imaginaire pur, ce qui s'appelle sa forme algébrique.

Proposition (Inversible)

Tout complexe non nul admet un inverse : $\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

□ Inversible

ce qui conduit à étudier les quantités $x - iy$ et $x^2 + y^2$.

Test 84

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant $\begin{cases} x + iy = a + ib \\ y + ix = b + ia \end{cases}$
(x, y sont les inconnues complexes, a, b des paramètres complexes.)

4.1.2 Conjugaison

Le conjugué du complexe $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est $\boxed{\bar{z} = x - iy}$.

La conjugaison $\begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \bar{z} \end{cases}$ a pour propriétés :

- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \quad (\text{addition})$
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \overline{z z'} = \bar{z} \bar{z}' \quad (\text{multiplication})$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \overline{\bar{z}} = z \quad (\text{involution})$

Ces propriétés ont des conséquences immédiates :

$$\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z}' \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

Test 85Soient a et b des complexes. Quel est le conjugué de $a + ib$?**Important:****Deux outils indispensables :**

- $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}, \quad z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Test 86**Il est souvent préférable de ne pas utiliser la forme algébrique ...**

... ou de repousser son utilisation au maximum.

Soit $a = 2 + 3i$, $b = 1 - 2i$. Déterminez $z \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}$.On remarquera qu'un nombre complexe m appartient à $\mathbb{R}$ si et seulement si $m = \bar{m}$.**Test 87**Vérifier que $2 - i$ est solution de l'équation $2z^2 - (1 - 3i)z - 7 + i = 0$. Factoriser. En déduire l'autre solution.

4.1.3 Module

Le module du complexe z est le réel

$$|z| = \sqrt{z \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Un module est bien défini. C'est un réel positif ou nul.

Premières propriétés :pour tous complexes z, z' nous avons

- $|z| = |\bar{z}| = |-z|$
- $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \quad \operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
- $|zz'| = |z| |z'| \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$

**L'inégalité triangulaire :**pour tous complexes z, z' nous avons

- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- **cas d'égalité** $|z + z'| = |z| + |z'|$
ssi z et z' sont proportionnels dans un rapport réel positif
- **seconde forme de l'inégalité triangulaire** $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$

Test 88Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $|z| = z$.

□ Norme

Le module définit une norme sur $\mathbb{C}$:

- $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| \geq 0$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 0 \Rightarrow z = 0$
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad |zz'| = |z| |z'|$
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$

4.1.4 Interprétation graphique

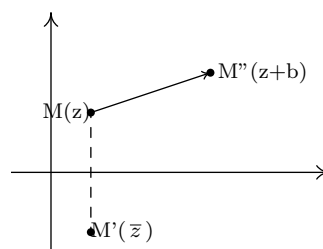
Le plan affine¹ euclidien $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.Il a pour direction le plan vectoriel² euclidien P .Donc $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée directe de P .A tout complexe $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ on associe $M \in \mathcal{P}$ (ou $\vec{u} \in P$) de coordonnées (x, y) . $\mathcal{P}$ est souvent appelé "plan complexe"³

1. Les éléments du plan affine sont des points.
2. Les éléments du plan vectoriel sont des vecteurs.
3. Ou encore "plan d'Argand-Cauchy".

On notera $M(z)$ ou $\vec{u}(z)$ z est l'affixe de M (et de $\vec{u}$)
 M (ou $\vec{u}$) est l'image de z .

l'application $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ définie par :

- $M(z) \mapsto M'(\bar{z})$ est la symétrie
- orthogonale par rapport à l'axe $x'Ox$
- $M(z) \mapsto M''(z+b)$ est la translation
- de vecteur $\vec{u}(b)$ ($b \in \mathbb{C}$ est constant)



Test 89

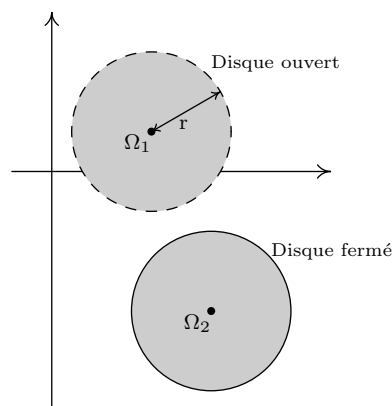
Soit $A(a), B(b), C(c)$ trois points du plan complexe. Trouver les affixes a', b', c' des points qui forment les parallélogrammes $ABCA', BCAB'$ et $CABC'$.

- Le module est interprété comme une distance ou une norme :

$$|z| = d(OM) = \|\vec{OM}\|$$

$$|z - z'| = d(M, M') = \|\vec{MM'}\|$$

- Le cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble $\mathcal{C}(\Omega, r) = \{M(z) \in \mathcal{P} \mid |z - \omega| = r\}$
- Le disque ouvert de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble $\mathcal{B}(\Omega, r) = \{M(z) \in \mathcal{P} \mid |z - \omega| < r\}$
- Le disque fermé de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble $\mathcal{B}_F(\Omega, r) = \{M(z) \in \mathcal{P} \mid |z - \omega| \leq r\}$



Test 90

Trouver la médiatrice du segment $A(1+i)B(2-i)$

4.2 Le groupe $\mathcal{U}$ des nombres complexes de module 1

4.2.1 Structure de $\mathcal{U}$

On désigne par $\underline{\mathcal{U}}$ l'ensemble des complexes de module 1 :

$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Son image est le "cercle trigonométrique".

L'ensemble $\mathcal{U}$ vérifie les propriétés suivantes :

- | | | | | |
|---|---|--------|---|----------------|
| <ul style="list-style-type: none"> • $\mathcal{U}$ est stable pour la multiplication • $\times$ est associative dans $\mathcal{U}$ • $1 \in \mathcal{U}$ est élément neutre pour $\times$ • $\forall z, z \in \mathcal{U} \Rightarrow \frac{1}{z} \in \mathcal{U}$ • $\times$ est commutative | } | groupe | } | groupe abélien |
|---|---|--------|---|----------------|

- ☐ groupe
- ☐ Groupe commutatif

4.2.2 Forme trigonométrique

- Tout complexe non nul z s'écrit de manière unique sous la forme

$$z = \lambda z_0, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad z_0 \in \mathcal{U}$$

- Tout élément $z_0 \in \mathcal{U}$ peut se mettre sous la forme

$$z_0 = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

La forme trigonométrique de $z \in \mathbb{C}^*$ est

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) = |z| e^{i\theta}$$

θ est l'argument de z .



Attention :

θ existe, mais n'est pas unique. Il est déterminé "modulo 2π "
 Par contre, il existe un unique argument dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ appelé **argument principal** de z .

On ne peut pas définir un argument du complexe nul.

L'écriture $z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$, $\rho \in \mathbb{R}$ est acceptable avec $\rho \leq 0$

On peut écrire aussi $z = [\rho, \theta] \dots$

(mais ce n'est peut-être pas la forme trigonométrique de z).

Test 91

Trouver tous les complexes de partie réelle 2, dont $\frac{\pi}{3}$ est un argument.

Test 92

Trouver tous les cas d'égalité $[\rho, \theta] = [\rho', \theta']$.

Remarques :

pour tous réels θ, θ' nous avons

$$\bullet \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$$

$$\bullet e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\bullet \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

$$\bullet 1 + e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\theta}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\bullet 1 - e^{i\theta} = -2ie^{i\frac{\theta}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

4.2.3 Exponentielle complexe

Par définition :

$$\forall z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, \quad e^z = e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Cette notation est cohérente car :

- Si $z \in \mathbb{R}$, e^z coïncide avec l'exponentielle réelle
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, e^{z+z'} = e^z e^{z'}$

Remarques :

- la fonction exp est $2i\pi$ périodique
- Pour tout nombre complexe z , le nombre complexe e^z est non nul et

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} \quad \arg(e^z) \equiv \operatorname{Im}(z) \quad [2\pi]$$

- si ρ est un réel strictement positif et θ un nombre réel :

$$e^z = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \ln(\rho) + i(\theta + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Test 93

Soit $x \in \mathbb{R}$. Quand a-t-on $e^{ix} = 1$?

**Important:****Argument d'un produit :**

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}^*, \quad \arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$

Relations d'Euler :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Formule de Moivre ^a :

$$\forall (\theta, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

^a. Abraham de Moivre (1667-1754) c'est également lui qui a découvert la formule (dite) de Stirling qui donne un équivalent en l'infini de $n!$. . .

Test 94	Module et argument de $\sin \theta + i \cos \theta$
Test 95	Module et argument de $z = 1 + e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ (Faire attention...)

4.2.4 Linéarisation, factorisation

Calcul de $\cos(n\theta)$, et $\sin(n\theta)$

BUT	Obtenir une expression en $\sin \theta$ et $\cos \theta$ afin de factoriser ou de changer de variable...
Méthode	▷ Utiliser la formule de Moivre ▷ Utiliser le binôme de Newton (voir l'alternance des + et -, des réels et imaginaires purs) ▷ Éventuellement utiliser $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ (ou le contraire).

□ Binôme newton

Test 96	Transformer $\sin(5\theta)$ et $\cos(4\theta)$
----------------	--

Linéarisation de $\cos^n \theta$ et $\sin^n \theta$

BUT	Trouver des primitives...
Méthode	▷ Utiliser la relation d'Euler appropriée ▷ Utiliser le binôme de newton ▷ Remarquer la progression des exposants de 2 en 2 et éventuellement l'alternance des signes ▷ Regrouper les termes associés

Test 97	Chercher une primitive de $\sin^6 x$.
----------------	--

Calcul de certaines sommes

Méthode	Interpréter la somme comme la partie réelle ou la partie imaginaire d'une somme de nombres complexes.
----------------	---

L'exemple le plus classique⁴ est le calcul, pour tout $x \notin 0 [2\pi]$, de

$$\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \frac{\cos \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \sin(kx) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

Test 98	Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$
----------------	---



4.3 Équations algébriques

4.3.1 Racines $n^{\text{ème}}$ d'un complexe

$z \in \mathbb{C}$ est une racine $n^{\text{ème}}$ de $Z \in \mathbb{C}$ ⁵ si et seulement si $z^n = Z$.

Th. ▷ **Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un complexe non nul, avec $n \in \mathbb{N}^*$**

Tout complexe non nul $Z = R e^{i\Theta}$ ($R > 0$) admet exactement n racines $n^{\text{ème}}$ qui sont obtenues en identifiant module et argument.

$$\sqrt[n]{R} e^{i \frac{\Theta + 2k\pi}{n}}, \quad k \in [0, n-1]$$

4. Il est important de savoir retrouver ces résultats

5. On dit aussi "racine d'ordre n de Z ."

4.3.2 Racines n^{eme} de l'unité

Une racine n^{eme} de l'unité est une racine n^{eme} de 1, avec $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n^{eme} de l'unité.

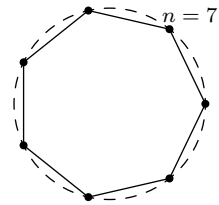
conséquences :

- Il y a exactement n racines n^{eme} de l'unité ($n \geq 1$)

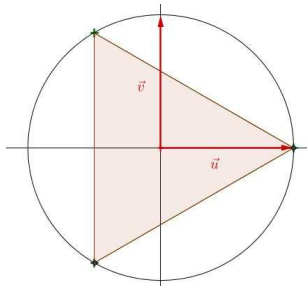
- Ces racines sont $\rho^0, \rho^1, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}$ où $\rho = e^{i2\pi/n}$



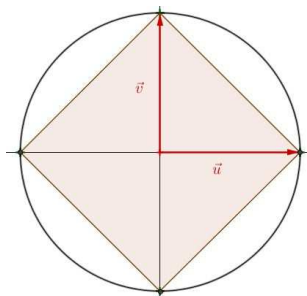
- Leurs images forment un polygone régulier



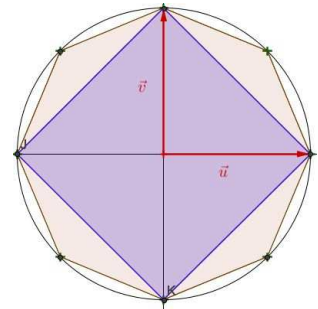
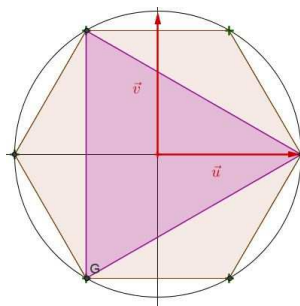
Les éléments de $\mathbb{U}_3$ ($1, j$ et $j^2 = \bar{j}$) sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral.



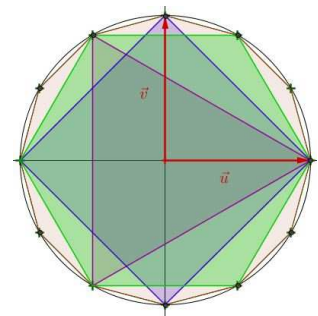
Les éléments de $\mathbb{U}_4$ ($1, i, i^2 = -1$ et $i^3 = -i$) sont les affixes des sommets d'un carré (de plus $\mathbb{U}_4$ contient $\mathbb{U}_2$).



Les éléments de $\mathbb{U}_6$ sont les affixes des sommets d'un hexagone régulier (de plus $\mathbb{U}_6$ contient $\mathbb{U}_3$ et $\mathbb{U}_2$).



Les éléments de $\mathbb{U}_{12}$ sont les affixes des sommets d'un dodécagone régulier (et $\mathbb{U}_{12}$ contient $\mathbb{U}_2, \mathbb{U}_3, \mathbb{U}_4$ et $\mathbb{U}_6$).



Les éléments de $\mathbb{U}_8$ sont les affixes des sommets d'un octogone régulier (de plus $\mathbb{U}_8$ contient $\mathbb{U}_4$ et $\mathbb{U}_2$).



Trois
résultats
très utiles :

- Pour $n \geq 2$, la somme des racines de l'unité est nulle
- Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1} = 0$$

sont les racines $(m+1)^{eme}$ de l'unité, sauf "1".

- Toutes les racine n^{eme} de $Z \in \mathbb{C}^*$ sont obtenues en multipliant l'une d'elles par les racines n^{eme} de l'unité.

Test 99

Ce test est simple et important : Soit z une racine n^{eme} de l'unité. Montrer que $\bar{z} = \frac{1}{z} = z^{n-1}$, $\frac{1}{z^k} = z^{n-k}$

Test 100

Tout complexe de module 1 est-il une racine de l'unité ?

Racines cubiques de l'unité

- Ce sont $1, j$ et j^2 où $j = e^{i2\pi/3} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$
- $\bar{j} = j^2$ et $1 + j + j^2 = 0$



Test 101 Calculer $(2 - i)^3$. En déduire les racines cubiques de $2 - 11i$.

Test 102 Quelles sont les racines quatrième de $(2 - 3i)^4$?

4.3.3 Racines carrées complexes

$z \in \mathbb{C}$ est une racine carrée complexe de Z si et seulement si $z^2 = Z$. C'est donc une racine d'ordre 2. Ainsi :

tout complexe non nul admet deux racines complexes opposées.

Un calcul algébrique est très simple soit $z = x + iy$, $Z = X + iY$, $x, y, X, Y \in \mathbb{R}$

$$Z = z^2 \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^2 - y^2 \\ Y = 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^2 - y^2 \\ |Z| = x^2 + y^2 \\ xy \text{ du signe de } Y \end{cases}$$

Test 103

Utiliser une racine carrée pour calculer $\sin \frac{\pi}{8}$.
On pourra remarquer que $(e^{i\frac{\pi}{8}})^2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

4.3.4 Équations du second degré

Une équation du second degré est de la forme

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0$$

Les solutions de cette équation sont

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a} \quad \text{où } \delta \text{ est une racine carrée complexe de } \Delta = b^2 - 4ac.^6$$

connaître la décomposition canonique

Relations entre coefficients et racines

- Les solutions z_1, z_2 ^a de l'équation

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0$$

vérifient

$$s = z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad p = z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

- Les complexes z_1, z_2 de somme s et de produit p

sont les solutions de l'équation

$$z^2 - sz + p = 0$$

^{a.} racines distinctes ou confondues.

**4.4 Nombres complexes et géométrie plane****4.4.1 Angles****Rappel :**

Dans le plan orienté :

- les angles de vecteurs (de demi-droites) sont mesurés "modulo 2π "
- les angles de droites sont mesurés "modulo π "
- il est commode d'identifier un angle et une de ses mesures

Soit $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ quatre points du plan complexe (rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$). Nous avons :

- $(\vec{i}, \vec{OA}) \equiv \arg(a) [2\pi]$ (si $O \neq A$)
- $(\vec{OA}, \vec{OB}) \equiv \arg\left(\frac{b}{a}\right) [2\pi]$ (si $O \neq A$ et $O \neq B$)

6. Δ est le **discriminant** de l'équation.

$$\bullet \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})} \equiv \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) [2\pi] \quad (\text{si } A \neq B \text{ et } C \neq D)$$

Ceci permet de traduire facilement :

- Le parallélisme $AB \parallel CD \Leftrightarrow (d-c)\overline{(b-a)} = \overline{(d-c)}(b-a)$
- L'alignement A, B, C alignés $\Leftrightarrow AB \parallel AC$
- L'orthogonalité $AB \perp CD \Leftrightarrow (d-c)\overline{(b-a)} + \overline{(d-c)}(b-a) = 0$

Test 104 Quelle est l'interprétation géométrique de $\arg(b-a) \equiv \arg(c-a) [2\pi]$?

Test 105 Soit $A(i)$, $B(-1)$ et $C(2-i)$. Trouver les points M de l'axe des réels tels que AM soit la bissectrice de (AB, AC) .

4.4.2 Transformations du plan

A toute transformation du plan F , on associe une application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout complexe z , affine d'un point M du plan, associe le complexe z' , affine du point M' du plan tel que $M' = F(M)$.

On dit F est représentée par f dans le plan complexe.

- ▷ Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. La **translation de vecteur $\vec{u}$** est l'application du plan sur lui-même qui, à tout point M du plan associe le point M' défini par

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

Complexe

La translation de vecteur $\vec{u}$ d'axe b est représentée par l'application f du plan complexe sur lui-même qui à tout z complexe, d'image M associe l'unique complexe z' , d'image M' définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto z + b \end{aligned}$$

- ▷ Soit Ω un point du plan, d'axe ω et θ un réel. La **rotation de centre Ω et d'angle θ** est la transformation du plan qui à tout point M du plan différent de Ω , d'axe z , associe le point M' , d'axe z' , défini par :

$$\widehat{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})} \equiv \theta [2\pi]$$

avec $\Omega M = \Omega M'$. L'image de Ω est lui-même.

Complexe

La rotation de centre Ω d'axe ω et d'angle θ réel est représentée par l'application f du plan complexe sur lui-même qui à tout z complexe, d'image M associe le complexe z' , d'image M' , définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \omega + e^{i\theta}(z - \omega) \end{aligned}$$

- ▷ Soit Ω un point du plan, d'axe ω et k un réel non nul. L'**homothétie de centre Ω et de rapport k** est la transformation du plan qui à tout point M du plan, d'axe z , associe le point M' , d'axe z' , défini par :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$$

Complexe

L'homothétie de centre Ω d'axe ω et de rapport $k \neq 0$ est représentée par l'application f du plan complexe sur lui-même qui à tout z complexe, d'image M associe le complexe z' , d'image M' , définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \omega + k(z - \omega) \end{aligned}$$

- ▷ On appelle **similitude directe du plan** toute application du plan sur lui-même représentée par l'application $f : z \mapsto az + b$ où $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Ainsi les translations, homothéties et rotations sont des similitudes directes planes particulières.

Géométrie

Soit s une similitude directe, d'écriture complexe $z \mapsto az + b$ où $a \neq 0$. Soient A et B deux points distincts du plan d'images respectives A' et B' par s .

- L'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ ne dépend pas des points A et B choisis, il est égal à $\arg(a)$.
Cet angle est appelé angle de la similitude.
- Le quotient $\frac{A'B'}{AB}$ ne dépend pas des points A et B choisis, il est égal à $|a|$.
Ce réel positif est appelé rapport de la similitude.
- Une similitude directe qui n'est pas une translation admet un unique point fixe, appelé centre de la similitude.

Th. ▷ Description complète d'une similitude directe plane

soit s une similitude directe de rapport k et d'angle θ . Deux cas sont possibles :

- s est une translation ($k = 1$ et $\theta \equiv 0$ modulo 2π).
- sinon, la similitude admet un point fixe Ω d'affixe ω , elle est alors la composée de
 - l'homothétie h de centre Ω et de rapport k
 - la rotation r de centre Ω et d'angle θ

De plus h et r commutent : $h \circ r = r \circ h$. L'écriture complexe de s est alors

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto ke^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$

Analytique → géométrie

Considérons l'application du plan orienté

$$F : M(z) \mapsto M'(z') \text{ représentée par } f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto az + b$$

- Si $a = 1$, F est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b .

Lorsque $a \neq 1$, F est :

- une **homothétie** : ssi $a \in \mathbb{R}^*$
 - son rapport est a
 - son centre Ω est l'unique point invariant d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$
- une **rotation** : ssi $|a| = 1$
 - son angle est $\arg(a)$
 - son centre Ω est l'unique point invariant d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$
- une **similitude directe** :
 - son rapport est $|a|$
 - son angle est $\arg(a)$
 - son centre Ω est l'unique point invariant d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$

Similitude déterminée par quatre points :

A, B, C, D sont quatre points distincts d'affixes respectives a, b, c, d .

Test 106 Montrer qu'il existe une unique similitude plane directe S telle que $S(A) = B$ et $S(C) = D$.

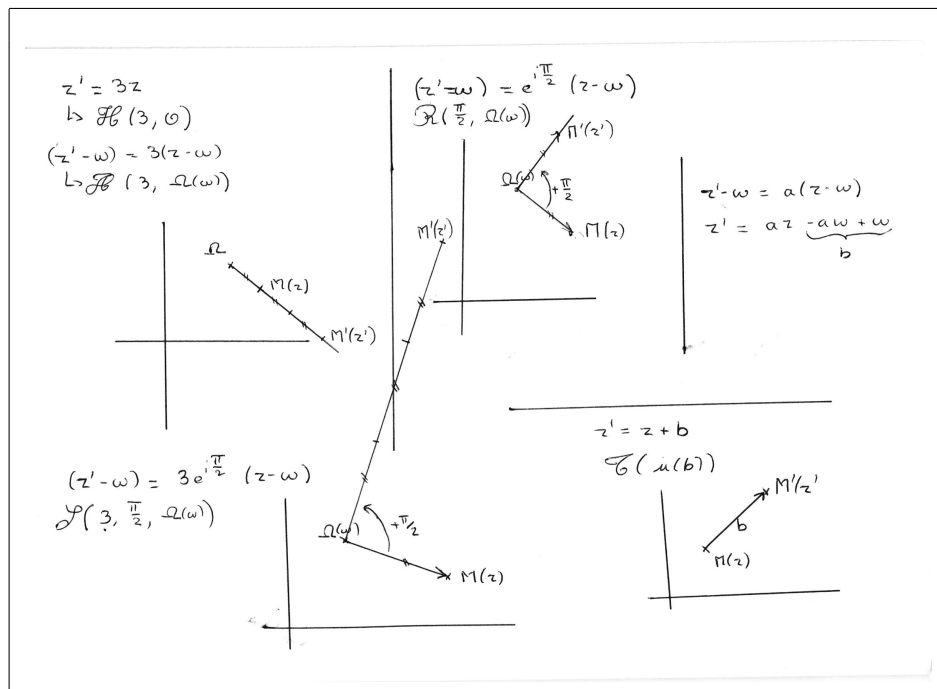
Application numérique : $a = 2 - i$, $b = 2 + 3i$, $c = 1 + 2i$, $d = -5 + 4i$.

Test 107 Déterminer les éléments de la composée $h_1 \circ h_2$ des deux homothéties $h_1(\Omega_1(1), 2)$ et $h_2(\Omega_2(i), -3)$.

La composée de deux homothéties est-elle toujours une homothétie ?

Test 108 Soit $A(1 - 3i)$, $B(2 - i)$. Trouver les affixes des points C et D tels que $ABCD$ soit un carré.

Test 109 **Un grand classique** (qu'il faut connaître...) Montrer que les trois points $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ forment un triangle équilatéral direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$



Exercices

Dans tous ces exercices, lorsque des coordonnées sont utilisées, il est sous-entendu que le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct fixé $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Calcul dans $\mathbb{C}$

Calculs algébriques de base

Exercice 1

Déterminer l'écriture algébrique des complexes suivants :

$$1. \frac{1}{5 - 11i} \quad \left| \quad 2. \frac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^2 - (2 + i)^2} \quad \right| \quad 3. \frac{(2 + i)^3 + (1 - i)^2}{1 + i + (2i - 1)^2}.$$

Exercice 2

Ecrire sous forme polaire les complexes suivants :

1. $-4i + 4$.
2. $\sqrt{2} - i\sqrt{6}$.

Exercice 3

Donner les écritures algébriques (simples) de $v = (1 - i\sqrt{3})^{11}$ et $w = \left(\frac{2 - 2i}{\sqrt{3} + i}\right)^{20}$.

Exercice 4

Soit z un complexe non nul. Exprimer simplement, uniquement à l'aide de $|z|$, $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$, les réels $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)$ et $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$.

Exercice 5

Soit $\omega > 0$, et f une fonction réelle de la variable réelle. Démontrer l'équivalence des trois énoncés suivants.

1. Il existe A et B réels tels que quel que soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

2. Il existe C complexe tels que quel que soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(t) = C \exp(i\omega t) + \overline{C} \exp(-i\omega t)$$

3. Il existe $K \geq 0$ et $\phi \in \mathbb{R}$ tels que quel que soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(t) = K \cos(\omega t - \phi)$$

Exercice 6

Utilisation de l'inégalité triangulaire

Soient z_1 et z_2 deux complexes. Montrer que

$$|z_1| + |z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2| \leq 2(|z_1| + |z_2|)$$

Calculs de sommes

Soient a , b et x trois réels (choisis de sorte que les expressions aient un sens).

Exercice 7

Simplifier $A = \sum_{k=0}^n \cos(ka + b)$ et $B = \sum_{k=0}^n \sin(ka + b)$.

Exercice 8

Simplifier $\sum_{k=0}^n \frac{\cos(ka)}{\cos^k a}$.

Relations coefficients-racines**Exercice 9**

Résoudre l'équation suivante d'inconnue n dans $\mathbb{Z}$:

$$\left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n - \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n = 0$$

Exercice 10

Soit $\alpha = \exp\left(\frac{2i\pi}{7}\right)$. On pose $S = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$ et $T = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6$.

1. Montrer que S et T sont complexes conjugués, et que $\operatorname{Im}(S) > 0$.
2. Calculer $S + T$ et ST .
3. En déduire S et T .

Complexes et géométrie**Exercice 11**

Déterminer l'expression analytique de la rotation de centre $A(2, 4)$ et d'angle $\pi/2$.

Exercice 12

Caractériser géométriquement la transformation $z \mapsto \frac{i-1}{\sqrt{2}}z + 5i$.

Exercice 13

Trouver l'ensemble des nombres complexes z tels que les points d'affixe z , z^2 et z^3 soient alignés.

Racines n -ièmes**Exercice 14**

Déterminer les racines cubiques de $1 + i\sqrt{3}$.

Exercice 15

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 2.

1. Calculer les racines n -ièmes de $-i$ et de $1 + i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - z + 1 - i = 0$.
3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$

4.5 Exercices Complémentaires

Exercice 1

Utilisation des propriétés algébriques de la conjugaison

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. On pose $Z = \frac{1+iz}{1-iz}$.

1. Pour quels z complexes Z est-il réel ?
2. Pour quels z complexes Z est-il de module 1 ?
3. Pour quels z complexes Z est-il imaginaire pur ?

Exercice 2

Simplifier $\sum_{k=0}^n \cos^2(ka)$ et $\sum_{k=0}^n \sin^2(ka)$.

Exercice 3

Exprimer $\cos(nx)$ et $\frac{\sin(nx)}{\sin x}$ comme polynômes en $\cos x$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants :

$$\left. \begin{array}{l} 1. \begin{cases} z_1 + z_2 = 3 \\ z_1 z_2 = 2 \end{cases} \\ 2. \begin{cases} z_1 + z_2 = i \\ z_1 z_2 = i - 1 \end{cases} \end{array} \right| \begin{array}{l} 3. \begin{cases} e^{z_1} + e^{z_2} = 2 \\ e^{z_1+z_2} = 1 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 5

Déterminer analytiquement l'homothétie de rapport -2 et de centre $B(0, 1)$.

Exercice 6

Déterminer géométriquement la transformation $z \mapsto (\sqrt{3} + 3i)z + 1$.

Exercice 7

Calculer de deux manières différentes les racines complexes quatrièmes de -4 .

