Chapitre 2

Notions générales

où on découvre que les "calculs mathématiques" ne se font pas toujours (pas souvent) en utilisant des nombres...

2.1 Logique

2.1.1 Propositions *(ou assertions)*

Une **proposition** est un énoncé décidable, c'est-à-dire un énoncé auquel on peut attribuer une valeur "vraie" ou "fausse".
Parfois, la valeur d'un énoncé dépend d'un ou plusieurs objets.

Exemple : $A(x)$: "x est pair".

Ce n'est donc plus une "proposition". On parle alors de **prédicat** .

Pour alléger le vocabulaire, nous désignerons par **assertion** , soit une proposition, soit un prédicat.

Test 29

Parmi les énoncés qui suivent, quelles sont les assertions ?

-1- π est un entier **-2-** x est pair

-3- Il fait froid **-4-** Douai est une ville agréable

-5- rouge **-6-** Pour tous réels x et y, $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

-7- $(x+y)^2$ **-8-** $(x+y)^2 = x^2 + y^2$

2.1.2 Connecteurs logiques

Les **connecteurs** permettent de définir (de fabriquer) une nouvelle assertion à partir d'une ou plusieurs autres.

Voici les principaux connecteurs :

$\neg$	est la **négation**	(" non ")
$\wedge$	est la **conjonction**	(" et ")
$\vee$	est la **disjonction**	(" ou ")
$\Rightarrow$	est **l'implication**	("implique")
$\Leftrightarrow$	est **l'équivalence**	("équivalent")

Note : L'équivalence se traduit aussi par " si et seulement si "
(qui s'abrège parfois en ssi).

La valeur de l'assertion ainsi définie dépend de celles des assertions utilisées. On l'obtient en consultant une " **table de vérité** ".

A	$\neg A$
V	F
F	V

A	B	A et B	A ou B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Test 30 Indiquez la valeur des propositions du Test précédent

2.1.3 Les quantificateurs

Considérons un prédicat $A(x)$. Un **quantificateur** précède un prédicat.

On obtient une nouvelle assertion qui est une proposition (sa valeur ne dépend plus de x). *Un quantificateur transforme un prédicat en proposition.*

Il y a deux quantificateurs :

$\forall$ est le quantificateur **universel** : La proposition $\forall\, x\ A(x)$ n'est VRAIE que si $A(x)$ est VRAIE indépendamment de l'objet x.

$\exists$ est le quantificateur **existentiel** : La proposition $\exists\, x\ A(x)$ n'est VRAIE que si $A(x)$ est VRAIE pour au moins un objet x.

Remarque : souvent, le prédicat $A(x)$ n'a de sens que pour des éléments d'un même ensemble E (des objets d'un type donné). On écrira alors :

- $\forall\, x \quad x \in E \Rightarrow A(x)$ qu'on abrège en $\forall\, x \in E,\ A(x)$
- $\exists\, x \quad x \in E$ et $A(x)$ qu'on abrège en $\exists\, x \in E,\ A(x)$

Ordre des quantificateurs :
On ne peut pas changer l'ordre des quantificateurs sauf s'ils sont de même nature.

Exemple

- $\forall\, x \in \mathbb{N},\ \exists\, y \in \mathbb{N},\ y = 2x$ est vraie
- $\exists\, y \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{N},\ y = 2x$ est fausse

Par contre :

- $\forall\, x\ \forall\, y\ A(x,y)$ a même valeur que $\forall\, y\ \forall\, x\ A(x,y)$
  on peut écrire $\forall\, x, y\ A(x,y)$
- $\exists\, x\ \exists\, y\ A(x,y)$ a même valeur que $\exists\, y\ \exists\, x\ A(x,y)$
  on peut écrire $\exists\, x, y\ A(x,y)$

2.1.4 Règles de calculs

Ces règles de calculs permettent de transformer une assertion en une assertion équivalente (symbolisée par "$\equiv$" :)

ici, $A \equiv B$ signifie que la proposition $A \Leftrightarrow B$ est VRAIE

On les démontre facilement en utilisant une "table de vérité".

- négation : $(\text{non } V) \equiv F \quad (\text{non } F) \equiv V$
- idempotence : $(A \text{ et } A) \equiv A$
- Influence du VRAI et du FAUX : $(A \text{ et } V) \equiv A \quad (A \text{ et } F) \equiv F$
  $(A \text{ ou } V) \equiv V \quad (A \text{ ou } F) \equiv A$

☐ Commutative

- commutativité : $(A \text{ et } B) \equiv (B \text{ et } A) \quad (A \text{ ou } B) \equiv (B \text{ ou } A)$

☐ Associative

- associativité :
  - du " et " : $\big(A \text{ et } (B \text{ et } C)\big) \equiv \big((A \text{ et } B) \text{ et } C\big)$
    Les parenthèses sont inutiles. On écrit A et B et C
  - du " ou " : $\big(A \text{ ou } (B \text{ ou } C)\big) \equiv \big((A \text{ ou } B) \text{ ou } C\big)$
    Les parenthèses sont inutiles. On écrit A ou B ou C

☐ Distributive

- distributivité :
  - le " et " est distributif par rapport au " ou "
    $\big(A \text{ et } (B \text{ ou } C)\big) \equiv \big((A \text{ et } B) \text{ ou } (A \text{ et } C)\big)$
  - le " ou " est distributif par rapport au " et "
    $\big(A \text{ ou } (B \text{ et } C)\big) \equiv \big((A \text{ ou } B) \text{ et } (A \text{ ou } C)\big)$
- l'équivalence : $(A \Leftrightarrow B) \equiv \big((A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow A)\big)$

Test 31

Peut-on dire que le " et " est distributif par rapport au " et " ?
que le " ou " est distributif par rapport au " ou " ?

Note : nous venons de découvrir qu'en Mathématiques, les calculs ne se font pas uniquement avec des nombres. Ici, les objets manipulés sont des assertions. Nous retrouvons ici la plupart des "résultats usuels" :

$$x \times 1 = x \quad x \times 0 = 0, \quad x \times (y+z) = (x \times y) + (x \times z) \quad \text{etc.}$$

2.1.5 Négation des assertions

Négation des connecteurs Les résultats qui suivent se démontrent facilement en utilisant une "table de vérité".

- non (non A) $\equiv A$
- non (A et B) $\equiv$ (non A) ou (non B)
- non (A ou B) $\equiv$ (non A) et (non B)
- non ($A \Rightarrow B$) $\equiv \big(A$ et (non $B)\big)$

Nous avons donc :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{non}\,(A \Rightarrow B) \equiv \big(A \text{ et } \text{non}\,B\big)\\ (A \Rightarrow B) \equiv (\text{non}\,A) \text{ ou } B\end{array}}$$

Test 32

Formez la négation de P : A et $(B \Rightarrow A)$, puis transformez ce résultat [a].
Qu'en déduisez-vous pour cette proposition ?

a. Il faut ruser en remplaçant (au bon endroit) X par (X et V)

Négation des quantificateurs
Ces négations suivent les "règles de bon sens" :

- non $\big(\forall\ x\ A(x)\big) \equiv \big(\exists\ x\ \text{ non } A(x)\big)$
- non $\big(\exists\ x\ A(x)\big) \equiv \big(\forall\ x\ \text{ non } A(x)\big)$

Test 33

Quelle est la négation de

$$\exists\ x \in E,\ \big(P(x) \text{ ou } \big(\forall\ z \in E,\ \exists\ y \in F,\ P(z) \Rightarrow Q(y)\big)\big)$$

Test 34

✠ Pourquoi $\big(\exists\ x\ P(x)\big)$ et $\big(\exists\ x\ Q(x)\big) \not\equiv \exists\ x\ \big(P(x) \text{ et } Q(x)\big)$?
✠ Elles sont liées par une implication. Justifiez-la et donnez un contre-exemple qui prouve que ce n'est pas une équivalence (on pourra prendre $P(x)$: "x est pair", et $Q(x)$: "x est impair".
✠ Que pensez-vous de $\big(\exists\ x\ P(x)\big)$ ou $\big(\exists\ x\ Q(x)\big)$

Test 35

Faire un travail comparable avec $\big(\forall\ x\ P(x)\big)$ et $\big(\forall\ x\ Q(x)\big)$
puis avec $\big(\forall\ x\ P(x)\big)$ ou $\big(\forall\ x\ Q(x)\big)$

Attention : dans le cas des écritures $\forall\ x \in E, A(x)$ et $\exists\ x \in E, A(x)$, la négation n'agit pas sur "$\in$" (voir 2.1.3).

- non $\big(\forall\ x \in E,\ A(x)\big) \equiv \big(\exists\ x \in E,\ \text{ non } A(x)\big)$
- non $\big(\exists\ x \in E,\ A(x)\big) \equiv \big(\forall\ x \in E,\ \text{ non } A(x)\big)$

Test 36

Sauriez-vous justifier les deux résultats suivants ?
- non $\big(\forall\ x \in E,\ A(x)\big) \equiv \big(\exists\ x \in E,\ \text{ non } A(x)\big)$
- non $\big(\exists\ x \in E,\ A(x)\big) \equiv \big(\forall\ x \in E,\ \text{ non } A(x)\big)$

2.1.6 Différents modes de raisonnements

Nécessité des raisonnements
Rien n'est plus dangereux qu'une "évidence" ou une "généralisation hâtive".

Exemples

Calculer $1! + 1$, $2! + 1$, $3! + 1$. Qu'en déduisez-vous ?
Que pensez-vous de la proposition "si A a le même nombre d'éléments que B, et $A \subset B$, alors $A = B$" ?

Test 37

Calculer $1 + 2^{(2^i)}$ pour $i = 0, 1, 2, 3$. Ces nombres sont-ils premiers ? Que peut-on en déduire ?

CC BY NC SA

Différentes formes de raisonnement Une propriété toujours vraie est un théorème. En mathématiques, on exploite des théorèmes pour montrer que d'autres propositions sont vraies (ce qui en fait des théorèmes !).

— par **déduction directe** :

$$\big(A \text{ et } (A \Rightarrow B)\big) \Rightarrow B$$

Donc, si A est vraie et que $A \Rightarrow B$ est un théorème, alors B est vraie.

Ceci est le mode de raisonnement le plus courant.

— par **transitivité** :

$$\big((A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow C)\big) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

qui se généralise facilement à plus de deux propositions.
Ainsi, si A est vraie, et $A \Rightarrow A_1$, $A_1 \Rightarrow A_2$, $\cdots$, $A_{n-1} \Rightarrow A_n$ sont des théorèmes, alors A_n est vraie.

Cette généralisation se fait par récurrence [1].

— par **exclusion** :

$$\big(\text{non } A \text{ et } \big(A \text{ ou } B\big)\big) \Rightarrow B$$

Si seulement deux cas sont possibles et que ce n'est pas le premier, alors le deuxième cas est vrai.

— par **disjonction des cas** :

$$\big((A \text{ ou } B) \text{ et } (A \Rightarrow C) \text{ et } (B \Rightarrow C)\big) \Rightarrow C$$

est vraie. Si seulement deux cas sont possibles, et que chacun de ces deux cas entraîne C, alors C est vraie.

— par **contraposition** :

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \big((\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A)\big)$$

Ceci permet d'aborder une démonstration sous un angle différent, qui facilite les calculs (ou simplement permettent de démarrer le raisonnement.

— par **l'absurde** :

$$\text{Si } (A \text{ et non } B) \Rightarrow \text{ Faux Alors } (A \Rightarrow B) \text{ est vraie}$$

Réciproque

Attention à ne pas confondre "contraposée" et "**réciproque**" :
la réciproque de $A \Rightarrow B$ est $B \Rightarrow A$ alors que la contraposée est $\text{non}\, B \Rightarrow \text{non}\, A$.
La différence est que, l'implication est vraie si et seulement si sa contraposée l'est, alors qu'il n'y a aucun lien entre la véracité de l'implication directe et réciproque.

1. le principe de récurrence n'est pas une conséquence du calcul de "logique", mais découle des propriétés de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels

2.2 Vocabulaire des ensembles

2.2.1 Généralités

On peut assimiler un **ensemble** E à une collection d'objets [2]. Un tel objet x est appelé **élément** de l'ensemble, ce que l'on note : $x \in E$.

$\in$ est donc le symbole d'**appartenance** . Sa négation se note $\notin$.

— **Ensemble vide** noté $\varnothing$: C'est l'unique ensemble qui vérifie $\forall\ x \quad x \notin \varnothing$ [3]

— **Inclusion** $A \subset B \Leftrightarrow (\forall\ x \quad x \in A \Rightarrow x \in B)$

Test 38

Justifier que, pour tout ensemble A nous avons $\varnothing \subset A$.
Sauriez vous démontrer que l'ensemble vide est le seul ensemble à vérifier cette propriété ? [a]

a. nous avons ici une **caractérisation** de l'ensemble vide (c'est-à-dire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble soit vide.)

— **Égalité** : deux ensembles sont égaux si et seulement si ils sont constitués des mêmes éléments.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } A = B &\Leftrightarrow \big(\forall\ x \quad x \in A \Leftrightarrow x \in B\big) \\ &\Leftrightarrow \big(\forall\ x \quad x \in A \Rightarrow x \in B\big) \text{ et } \big(\forall\ x \quad x \in B \Rightarrow x \in A\big) \\ &\Leftrightarrow (A \subset B) \text{ et } (B \subset A) \end{aligned}$$

Test 39 A-t-on $\varnothing \in \varnothing$? $\varnothing \subset \varnothing$?

Test 40 Soient $A = \{6k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $B = \{2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $A \subset B$.

Test 41 Soit $f : x \mapsto x^2,\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Montrer que $[1; +\infty[\subset f(\mathbb{R})$.

Test 42 Dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère $A(1,3)$ et $B(2,5)$.
Soit $\mathcal{C} = \{M(x,y) \text{ tel que } y - 2x - 1 = 0\}$. Montrer que $(AB) = \mathcal{C}$.

Test 43 Dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère $A(1,3,0)$, $B(2,5,0)$ et $C(3,0,1)$.
Soit $\mathcal{C} = \{M(x,y,z) \text{ tel que } -2x + y + 7z - 1 = 0\}$
et soit $\mathcal{P} = \left\{M(x,y,z) \text{ tel qu'il existe } (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}\right\}$.
Montrer que $\mathcal{P} = \mathcal{C}$.

2.2.2 Produit cartésien

Le **Produit cartésien** de deux ensembles A et B est un ensemble noté $A \times B$, dont les éléments sont des couples (a,b), avec $a \in A$ et $b \in B$.

$$A \times B = \big\{x \mid \exists a \in A,\ \exists b \in B,\ x = (a,b)\big\}$$ [4]

Note : si $A = B$, alors $A \times B$ est noté A^2.

Test 44 A-t-on $A \subset A^2$?

Test 45 Montrer que $E \times F = \varnothing \Leftrightarrow \big(E = \varnothing \text{ ou } F = \varnothing\big)$. On pourra utiliser la contraposée.

Test 46 Montrer que $E \times F \neq F \times E \Rightarrow E \neq F$. On pourra encore utiliser la contraposée.

2. En fait, la définition mathématique d'un ensemble est très délicate et déborde largement le programme de la classe.

3. Dans la théorie des ensembles, on démontre que l'ensemble vide existe et est unique

4. Généralement, on tolère la notation plus rapide $A \times B = \big\{(a,b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\big\}$ [mais cette notation est dangereuse s'il faut utiliser une négation, car les "$\exists$" sont sous-entendus.]

CC BY NC SA

2.2.3 Ensemble des parties d'un ensemble

Encore une construction d'ensemble :
L'**ensemble des parties** [5] d'un ensemble E est un ensemble, noté $\mathcal{P}(E)$, dont les éléments sont (tous) les sous-ensembles de E.

Ainsi : $\boxed{\mathcal{P}(E) = \{X \mid X \subset E\}}$ donc $\boxed{X \subset E \Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(E)}$.

Ne pas se perdre :
- ▶ un sous-ensemble A de E devient un élément
- ▶ mais ce n'est pas un élément de E
- ▶ c'est un élément de "l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E"

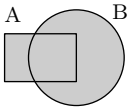
Test 47 Expliciter $\mathcal{P}(E)$ dans les cas : $E = \{a\}$, $E = \{a, b\}$, $E = \{a, b, c\}$.
Note : nous montrerons plus tard que, si E est un ensemble fini, alors, $\operatorname{Card} \mathcal{P}(E) = 2^{\operatorname{Card} E}$ où Card désigne le "nombre d'éléments".

Test 48 Exprimer $\mathcal{P}(\varnothing)$, $\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\varnothing)\right)$, $\mathcal{P}\left(\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\varnothing)\right)\right)$

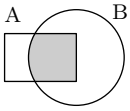
2.2.4 Intersection et réunion d'ensembles

Avec deux ensembles A et B on en crée deux autres :

La **réunion** notée $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$



L'**intersection** notée $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$



Si A et B sont des éléments de $\mathcal{P}(E)$, il en est de même pour $A \cup B$ et $A \cap B$.
Ce sont des lois de compositions internes [6].

Ces lois vérifient les propriétés suivantes : $\forall\, A, B, C \in \mathcal{P}(E)$,

	pour l'union	*pour l'intersection*
Associativité	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
qu'on note	$A \cup B \cup C$	$A \cap B \cap C$
Commutativité	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
élément neutre	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap E = A$
élément absorbant	$A \cup E = E$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
Idempotence	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$

☐ Neutre
☐ Absorbant
☐ Idempotente

Th. ▷ **Distributivité**

On peut également indiquer la **distributivité** qui permet de travailler avec les deux lois simultanément :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Test 49 Comparer $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ et $\mathcal{P}(A \cup B)$

Th. ▷ **Caractérisation de l'inclusion par l'union ou par l'intersection**

$$\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E), \quad \begin{cases} A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \\ A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \end{cases}$$

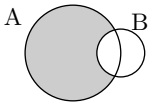
Test 50 Montrer que $\left.\begin{array}{l} A \cup C = B \cup C \\ A \cap C = B \cap C \end{array}\right\} \Rightarrow A = B$

5. On dit aussi : "ensemble des sous-ensembles de E"
6. ce sont des opérations dans $\mathcal{P}(E)$

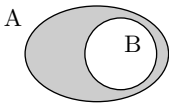
2.2.5 Différence et complémentaire

A partir de deux ensembles on en crée un autre :

La **différence** de deux ensembles A et B est un ensemble.
On le note $A - B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$.



Le **complémentaire** dans A de B est aussi $A - B$ mais uniquement si $B \subset A$. On peut le noter :
$A - B = \complement_A B$ (ou, plus rarement, $\overline{B}^{\,A}$ ou $A \backslash B$).



Th. ▷ **Les lois de Morgan**

Les lois de Morgan [a] lient l'opérateur complémentaire aux opérateurs union et intersection.

$$\forall\, A, B \subset E, \qquad \complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$$
$$\text{et} \qquad \complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$$

a. Auguste (ou Augustus) De Morgan (27 juin 1806 à Madurai (Tamil Nadu) - 18 mars 1871) est un mathématicien et logicien britannique, né en Inde. Il est le fondateur avec Boole de la logique moderne ; il a notamment formulé les lois de De Morgan.

Test 51

A et B sont des sous-ensembles de E. Montrer $(A \cap B) \cup \left(A \cap \complement_E B\right) = A$:

1. en utilisant les définitions
2. en utilisant les propriétés des opérations
3. en utilisant une table de vérité

2.2.6 Familles d'ensembles

Si on manipule un petit nombre d'ensembles, on peut les désigner par une lettre (latine, grecque ou autre) $A, B, C, \cdots, E, F, \cdots$.

S'ils sont plus nombreux, on n'utilise une seule lettre accompagnée d'un "indice" :

- en quantité finie, on les numérote : $A_1, A_2, \cdots, A_n$.
- on peut même en avoir une infinité : $A_1, A_2, A_3, \cdots$
- parfois, ils sont si nombreux, qu'utiliser des nombres entiers ne suffit plus. On remplace alors les numéros (entiers) par des indices quelconques.

On parle alors de **famille indexée** , qu'on note : $(A_i)_{i \in I}$ avec I un ensemble quelconque.
i est une lettre **muette** , c'est-à-dire qu'elle n'intervient pas dans la signification de la formule. On peut la remplacer par toute autre lettre (sauf celles qui ont déjà une signification - et donc ne sont plus "muettes" -).

Th. ▷ **Réunion et intersection d'une famille d'ensembles**

C'est une généralisation de la réunion et de l'intersection de deux ensembles :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists\, i \in I, \quad x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall\, i \in I, \quad x \in A_i\}$$

Les propriétés usuelles se généralisent (associativité, distributivité, etc)

Test 52

Pour tout $h \in R_+^*$, on pose $J_h =]-h; h[$. Montrer que : $\bigcup_{h \in R_+^*} J_h = \mathbb{R}$ et $\bigcap_{h \in R_+^*} J_h = \{0\}$

Test 53

$I \neq \varnothing$. Monter que $\bigcup_{i \in I} A_i = \varnothing \;\Leftrightarrow\; \forall\, i \in I\,,\; A_i = \varnothing$.

CC BY NC SA

2.3 Vocabulaire des applications

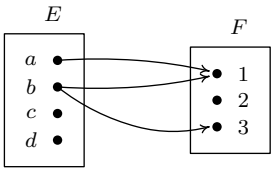
2.3.1 définitions

Une **correspondance** (ou **relation**) f entre les éléments de E et les éléments de F est un triplet $f = (E, F, G)$ où $G \subset E \times F$

$$\forall\, x, y \in E \times F, \quad xfy \Leftrightarrow (x, y) \in G$$

- E est l'ensemble de **départ**,
- F est l'ensemble d'**arrivée**,
- G est le **graphe** de la correspondance.

On peut la visualiser par un diagramme sagittal



$G = \{(a, 1), (b, 1), (b, 3)\}$

Test 54 Peut-on parler de la "correspondance réciproque ?
Dans l'affirmative, quel en est le graphe ?

Une **fonction** est une correspondance (E, F, G), telle qu'à tout élément de E est associé au plus un élément de F :

$$\forall\, x \in E, \quad \text{Card}\left\{y \in F \mid (x, y) \in G\right\} \leqslant 1$$

la notation $x\, f\, y$ est modifiée en $\boxed{y = f(x)}$
E est l'ensemble de **départ**
F est l'ensemble d'**arrivée**

L'**ensemble de définition de f** est l'ensemble des $x \in E$ qui sont effectivement associés à un $y \in F$
y est **l'image** de x par f

□ Application

Une **application** [7] de E vers F est une fonction de E vers F définie sur E

Ainsi : si f est une application, tout élément de l'ensemble de départ possède une image et une seule
On note : $\text{f} : \begin{cases} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$

L'ensemble des applications de E dans F est noté $\boxed{\mathcal{F}(E, F)}$ ou encore $\boxed{F^E}$

Test 55 Soit $E \neq \varnothing$. La relation $f = (E, \mathcal{P}(E), G)$ où $(a, A) \in G \Leftrightarrow a \in A$ définit-elle une application ?

2.3.2 Image directe et réciproque d'un sous-ensemble

Si $f : E \to F$ est une application, alors :

□ Im. directe

- l'**image** par f de $E' \subset E$ est $f(E') = \left\{y \in F \mid \exists\, x \in E', \quad y = f(x)\right\}$

On accepte la notation $f(E') = \left\{f(x) \mid x \in E'\right\}$ [8]

□ Im. réciporoque

- l'**image réciproque** par f de $B \subset F$ est $\overset{\vee}{f}(B) = \left\{x \in E \mid f(x) \in B\right\}$

Certains ouvrages utilisent la notation $f^{-1}(B)$ [9]

7. Le programme ne distingue pas "fonction" et "application". On surmonte l'ambiguïté en énonçant "soit la fonction définie sur E...".

8. Mais cette notation présente l'inconvénient de masquer le "$\exists$".

9. Mais cette notation utilise f^{-1} alors que f n'est peut-être pas bijective. Nous lui préférerons la notation $\overset{\vee}{f}(B)$. Ce symbole $\vee$ est l'accent antiflexe appelé hatchek du tchèque "háček".

Test 56

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$, et $A = \{-2, 1\}$.
Déterminer $f(A)$, $\overset{\vee}{f}(A)$, $f\big(\overset{\vee}{f}(A)\big)$ et $\overset{\vee}{f}\big(f(A)\big)$

Test 57

Soit $f : E \to F$.
1 : Si $A \subset E$, montrer que $\overset{\vee}{f}\big(f(A)\big) \supset A$.
2 : Si $B \subset F$, montrer que $f\big(\overset{\vee}{f}(B)\big) \subset B$.

Test 58

Soit $f : E \to F$, et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Comparer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.

2.3.3 Restrictions, prolongements, composée

□ **Restriction**

Restriction : si $E' \subset E$, la restriction de f à E' est l'application notée $f|_{E'}$ définie par $\big(E', F, G \cap (E' \times F)\big)$

Si $f' = f|_{E'}$ pour tout élément x de E' : $f(x) = f'(x)$ [10]

□ **Prolongement**

Prolongement : g est un prolongement [11] de f si et seulement si f est une restriction de g.

Application induite [12] par f de $E' \subset E$ vers $F' \subset F$: notée $f|_{E'}^{F'}$

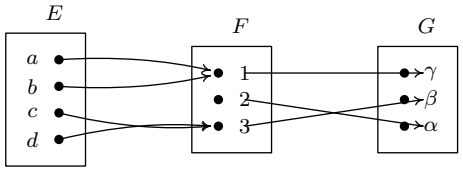
c'est l'application $\begin{cases} E' & \to & F' \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$ (lorsque $f(E') \subset F'$)

Composée : Soient f et g des applications telles que

$$f : E \to F \text{ et } g : F \to G$$

On définit $g \circ f$ comme l'application de E dans G telle que

$$\forall x \in E,\ g \circ f(x) = g(f(x))$$



2.3.4 Injection, surjection, bijection

Généralement, la correspondance réciproque f^{-1} d'une application f n'est pas une application ?

■ pour que f^{-1} soit une fonction, il faut que f soit injective

□ **Injection**

Injection l'application $f : E \to F$ est injective

ssi $\quad \forall\, x, y \in E, \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

ssi $\quad \forall\, x, y \in E, \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

ssi tout élément de F possède au plus un antécédent.

■ pour que f^{-1} soit définie sur F, il faut que f soit surjective

□ **Surjection**

Surjection l'application $f : E \to F$ est surjective

ssi $\quad \forall\, y \in F, \quad \exists\, x \in E, \quad y = f(x)$

ssi tout élément de F possède au moins un antécédent.

■ pour que f^{-1} soit une application , il faut que f soit bijective

Bijection l'application $f : E \to F$ est bijective

ssi f est injective et surjective. ssi tout élément de F possède exactement un antécédent.

C'est seulement dans ce cas que f^{-1} est l'**application réciproque**.

et elle est également bijective.

CC BY NC SA

Th. ▷ **Composition d'injections, surjections**

Soit $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$:
- f et g injectives $\Rightarrow$ $g \circ f$ injective
- f et g surjectives $\Rightarrow$ $g \circ f$ surjective
- $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective
- $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective

Test 59 Utiliser des représentations sagittales très simples pour montrer que les réciproques du théorème sur la composition des injections et surjections sont fausses

Remarque : la notion d'injection est souvent importante dans la transformation et la résolution des équations.

Exemples
- $x+1 = \sqrt{x+3}$ n'est pas équivalent à $(x+1)^2 = x+3$, même si on se limite à l'ensemble de définition $[-3, +\infty[$.
- Par contre : $e^x = e^{x^2}$ est équivalent à $x = x^2$.

2.3.5 Famille d'éléments

Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{N}$.
Une application $f : I \to E$ est parfois appelée

famille d'éléments de E **indexée** par I

La famille est alors notée $(x_i)_{i \in I}$, où $x_i \in E$ désigne l'image de i par f.

i est l'**indice** de x_i.

Exemples
- une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties d'un ensemble E est une application de I vers $\mathcal{P}(E)$.
- Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.
- Pour $J \subset I$: $(x_i)_{i \in J}$ est une **sous-famille** de la famille $(x_i)_{i \in I}$ Cela correspond à une restriction de l'application $I \to E$

10. C'est pourquoi, par commodité, on utilise souvent la même lettre pour f et sa restriction.
11. Remarquer "la restriction" qui est unique pour E' donné, et "un prolongement" (qui n'est généralement pas unique)
12. On dit aussi **"co-restriction"** .

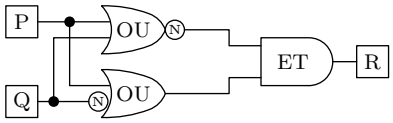
2.4 Exercices

Exercice 1

Un circuit électronique simplifier la proposition suivante :

$$R : \text{non } \big(P \text{ ou } Q\big) \text{ et } \big(P \text{ ou non } Q\big)$$

En déduire un circuit électronique simple, équivalent au circuit ci-contre.



Exercice 2

Démontrer l'équivalence : $\left.\begin{array}{l}(A \cap B) \subset (A \cap C)\\(A \cup B) \subset (A \cup C)\end{array}\right\} \Leftrightarrow B \subset C$

Exercice 3

Dresser, en fonction des valeurs des propositions P, Q et R, les tables de vérités des propositions $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R)$ et $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$.

Exercice 4

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (que l'on ne suppose ni dérivable, ni continue). Traduire les énoncés suivants, ainsi que leur contraire, avec des quantificateurs.

1. f ne s'annule nulle part.
2. f est la fonction nulle.
3. f est croissante.
4. f est strictement décroissante.
5. f est monotone.
6. f est constante.

Exercice 5

Soit E un ensemble, et A et B deux parties de E. Montrer que

$$A \subset B \Leftrightarrow \complement_E(A) \supset \complement_E(B) \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \setminus B = \varnothing$$

Exercice 6

Exprimer à l'aide de quantificateur les phrases suivantes

1. I est une partie de $\mathbb{N}$ qui ne contient aucun nombre pair.
2. I est une partie de $\mathbb{N}$ qui ne contient aucun triplet consécutif.

Exercice 7

Pour chacun des énoncés suivants, convertir en langage formalisé, ou inversement convertir en langage usuel ; donner la négation, et enfin, démontrer l'énoncé ou sa négation selon qu'il est vrai ou faux.

1. Tout nombre réel possède un inverse.
2. Il existe un entier naturel n tel que $n! < n^n$.
3. Soit un nombre entier, si son carré est pair alors ce nombre est pair.

Exercice 8

Soit a un nombre réel. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$

CC BY NC SA

Exercice 9

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à valeurs positives. Montrer (en rédigeant soigneusement) que la fonction $f+g : x \mapsto f(x)+g(x)$ est également à valeurs positives.

Exercice 10

E est un ensemble non vide, f, g, h trois applications de E dans E telles que $f \circ g = h$, $h \circ f = g$ et h bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 11

On considère l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{cases}$ L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 12

Etudier l'injectivité et la surjectivité (voire, à défaut, l'image) des applications suivantes

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto 2x+1$.
2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$.
3. $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ x \mapsto x^2$.
4. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ x \mapsto x^2$.
5. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ n \mapsto n+1$.
6. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ n \mapsto n+1$.

Exercice 13

Soient E, F et G trois ensembles, et deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.

Exercice 14

Fonction caractéristique d'un ensemble

Soit E un ensemble. Etant donné $A \in \mathcal{P}(E)$, on appelle fonction indicatrice (ou parfois fonction caractéristique) de A et l'on note $\mathbb{1}_A$ la fonction qui à $x \in E$ associe 1 si $x \in A$ et 0 sinon. Montrer les propriétés suivantes des fonctions indicatrices (A et B étant deux parties quelconques de E), on pourra faire une disjonction de cas pour les 3 premières questions :

1. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
2. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$
3. $\mathbb{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbb{1}_A$
4. $\Phi : A \mapsto \mathbb{1}_A$ est bijective de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{F}\big(E; \{0;1\}\big)$.

Exercice 15

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles. Exprimer en fonction des A_n les ensembles correspondant aux propriétés suivantes.

1. x n'appartient a aucun des A_n .
2. x appartient à tous les A_n à partir du rang p.
3. x appartient à un seul des A_n
4. x appartient à au moins un des A_n
5. x appartient à tous les A_n sauf un.
6. x appartient à tous les A_n.

2.5 Exercices Complémentaires

Exercice 1
Comparer $(A - B) \cap C$ et $(A \cap C) - (B \cap C)$
Même chose avec la réunion.

Exercice 2
On note A, B, C, D quatre assertions.

1. Montrer que $(A \vee B) \wedge (C \vee D) \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge D)$.
2. Résoudre le système $\begin{cases} (x-1)(y+2) = 0 \\ (x-2)(y-1) = 0 \end{cases}$.

Exercice 3
Soit E un ensemble, et A, B et C trois parties de E. Montrer les équivalences suivantes :

1. $\begin{cases} A \cap B \subset A \cap C \\ A \cup B \subset A \cup C \end{cases}$ si et seulement si $B \subset C$.
2. $A \cup B = A \cap C$ si et seulement si $B \subset A \subset C$

Exercice 4
Les formules suivantes sont-elles des tautologies (autrement dit toujours vraies)

1. $P \vee ((P \vee Q) \Leftrightarrow Q)$.
2. $(P \vee R) \wedge (Q \vee \neg R)$ si $(P \vee Q)$

Exercice 5
Montrer que les assertions suivantes sont des tautologies, en utilisant une table de vérité puis le langage courant :

1. $R \Rightarrow (S \Rightarrow R)$
2. $R \Rightarrow (\neg R \Rightarrow S)$
3. $(R \Rightarrow S) \Rightarrow [(S \Rightarrow T) \Rightarrow (R \Rightarrow T)]$

Exercice 6
Déterminer, en énumérant leurs éléments, les ensembles suivant : $\mathcal{P}(\varnothing)$, $\mathcal{P}(\{0;1\})$, $\mathcal{P}(\{x_1;x_2;x_3\})$ et $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\{0;1\})\big)$.

Exercice 7
Soient trois ensembles A, B et C, et $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications.

1. On suppose que f ou g est constante. Montrer (en rédigeant avec soin) que $g \circ f$ est constante.
2. La réciproque est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

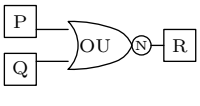
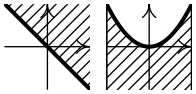
Exercice 8
Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on dit que f est continue si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, \quad |x - y| < \eta \quad \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

On dit que f est uniformément continue si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x - y| < \eta \quad \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

CC BY NC SA

1. Justifier (à l'aide de la définition) que la fonction $x \mapsto 2x$ est uniformément continue.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est continue.
3. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue.

Indications exos 1 et 11