

## Programme de Colle 25

### Chapitre 23 : Intégration sur un segment

#### Continuité uniforme

- Définition, lien avec la continuité
- Théorème de Heine

#### Fonctions en escalier

- subdivision d'un segment, définition de fonction en escalier sur un segment
- définition d'intégrale d'une fonction en escalier, propriétés de linéarité, Chasles, croissance

#### Fonctions continues par morceaux

- Définition, fonction continue par morceaux sur un segment bornée
- Approximation uniforme et encadrement d'une fonction continue sur un segment par des fonctions en escalier
- Intégrale d'une fonction continue par morceaux
- Linéarité, Chasles, Croissance, Cauchy-Schwarz, Minkowski, valeur moyenne, inégalité de la moyenne
- Fonction continue positive d'intégrale nulle et cas d'égalité de Cauchy-Schwarz

#### Fonction définie par une intégrale

- Théorème de Leibniz, égalité de la moyenne
- Formule de Taylor avec reste intégrale et inégalité de Taylor-Lagrange

#### Approximation d'une intégrale

- Somme de Riemann, approximation de l'intégrale d'une fonction continue, Lipschitzienne

### Chapitre 24 : Espaces euclidiens

#### Produit scalaire, norme associée

- Définition du produit scalaire sur un  $\mathbb{R}$ -ev, espace préhilbertien, espace euclidien
- Produits scalaires canoniques de  $\mathbb{R}^n$  et de  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$
- Expression analytique d'un produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz
- Définition de norme, inégalité triangulaire inversée
- Norme euclidienne, identités de polarisation et du parallélogramme,

#### Orthogonalité

- Définition, propriétés de l'orthogonal d'une parti
- Familles orthogonales, liberté, relation de Pythagore

### *Démonstrations possibles*

- Approximation uniforme d'une fonction continue par des fonctions en escalier
- Fonction continue positive d'intégrale nulle
- Théorème de Leibniz
- Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité pour un produit scalaire
- Norme associée à un produit scalaire
- Propriétés de l'orthogonal d'une parti

# Programme de Colle 26

## Chapitre 24 : Espaces euclidiens

### Produit scalaire, norme associée

- Définition du produit scalaire sur un  $\mathbb{R}$ -ev, espace préhilbertien, espace euclidien
- Produits scalaires canoniques de  $\mathbb{R}^n$  et de  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$
- Expression analytique d'un produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz
- Définition de norme, inégalité triangulaire inversée
- Norme euclidienne, identités de polarisation et du parallélogramme,

### Orthogonalité

- Définition, propriétés de l'orthogonal d'une parti
- Familles orthogonales, liberté, relation de Pythagore

### Espaces euclidiens

- Orthogonalisation de Gram-Schmidt
- Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormale
- Supplémentaire orthogonal, hyperplan et vecteur normal
- Projection orthogonal, caractérisation avec le produit scalaire, calcul de l'image, distance à un SEV
- Symétrie orthogonale, caractérisation avec le produit scalaire

### *Démonstrations possibles*

- Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité pour un produit scalaire
- Norme associée à un produit scalaire
- Propriétés de l'orthogonal d'une parti
- Supplémentaire orthogonal
- Caractérisation des projecteurs orthogonaux avec le produit scalaire
- Bijection entre E et son dual

## Programme de Colle 27

### Chapitre 24 : Espaces euclidiens

#### Produit scalaire, norme associée

- Définition du produit scalaire sur un  $\mathbb{R}$ -ev, espace préhilbertien, espace euclidien
- Produits scalaires canoniques de  $\mathbb{R}^n$  et de  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$
- Expression analytique d'un produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz
- Définition de norme, inégalité triangulaire inversée
- Norme euclidienne, identités de polarisation et du parallélogramme,

#### Orthogonalité

- Définition, propriétés de l'orthogonal d'une parti
- Familles orthogonales, liberté, relation de Pythagore

#### Espaces euclidiens

- Orthogonalisation de Gram-Schmidt
- Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormale
- Supplémentaire orthogonal, hyperplan et vecteur normal
- Projection orthogonal, caractérisation avec le produit scalaire, calcul de l'image, distance à un SEV
- Symétrie orthogonale, caractérisation avec le produit scalaire

### Chapitre 25 : Fonctions de 2 variables

#### Définitions

- Parties ouvertes de  $\mathbb{R}^2$ , fonctions de 2 variables
- Limites, limites et applications partielles
- Continuité, opérations sur les fonctions continues, continuité des projections canoniques

#### Dérivées partielles

- Dérivée selon un vecteur, propriétés
- Dérivées partielles premières
- Fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , DL d'ordre 1
- Dérivée selon un vecteur et dérivées partielles, plan tangent
- Différentielle de  $f$

### *Démonstrations possibles*

- Supplémentaire orthogonal
- Caractérisation des projecteurs orthogonaux avec le produit scalaire
- Bijection entre  $E$  et son dual
- Limites et applications partielles
- Continuité d'une composée
- Plan tangent

## Programme de Colle 28

### Chapitre 25 : Fonctions de 2 variables

#### Définitions

- Parties ouvertes de  $\mathbb{R}^2$ , fonctions de 2 variables
- Limites, limites et applications partielles
- Continuité, opérations sur les fonctions continues, continuité des projections canoniques

#### Dérivées partielles

- Dérivée selon un vecteur, propriétés
- Dérivées partielles premières
- Fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , DL d'ordre 1
- Dérivée selon un vecteur et dérivées partielles, plan tangent
- Différentielle de  $f$

#### *Démonstrations possibles*

- Limites et applications partielles
- Continuité d'une composée
- Plan tangent
- Linéarité de l'espérance
- Calcul de la variance
- Inégalité de Markov et Bienaymé-Tchebychev

#### Notion de Gradient

- Définition et propriétés
- interprétation géométrique, application au DL d'ordre 1

#### Dernières propriétés

- Dérivée d'une composée
- Extremum d'une fonction de deux variables

### Chapitre 26 : Espérance et variance

- Espérance : définition, linéarité, variable centrée
- Moment d'une VAR finie, variance, propriétés de calcul de la variance, écart-type, VAR réduite
- Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev