

Programme de Colle 21

Chapitre 18 : Fractions rationnelles

Corps des Fractions rationnelles

- Définition, représentant
- Degré, opérations et degré
- Représentant irréductible, irréductible unitaire
- Zéros et pôles d'une fraction rationnelle irréductible

Décomposition en éléments simples

- Définition, partie entière et partie fractionnaire
- Décomposition pour un dénominateur égal à un produit de poly premiers entre eux 2 à 2.
- Décomposition pour un dénominateur égal à une puissance d'un polynôme.
- Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ et dans $\mathbb{R}(X)$

Méthodes pratiques

- Cas d'un pôle simple
- Astuces (substituer une valeur réelle, complexe, limite, parité, $\mathbb{C}(X) \rightarrow \mathbb{R}(X)$, symétries)
- Application aux calculs de primitives

Démonstrations possibles

- Existence des représentants irréductibles
- Existence de la décomposition pour un dénominateur produit de polynômes premiers entre eux.
- Pôle simple et application à la décomposition de $\frac{P'}{P}$ où P scindé.
- Formule du rang
- Cardinal de la réunion disjointe de deux ensemble finis
- P_A est une probabilité

Chapitre 19 : Espaces vectoriels de dimension finie

Dimension

- Espace à générateur fini, Théorème de la base incomplète et conséquences
- Cardinal d'une famille génératrice, dimension d'un espace vectoriel
- Espaces isomorphes
- Dimension d'un SEV, d'un espace produit, d'une somme (Grassmann)
- Nouvelle caractérisation des sev supplémentaires
- Rang d'une famille de vecteurs

Chapitre 20 : Probabilités

Ensembles et cardinaux

- Cardinal, cardinal d'une partie d'un ensemble fini
- Cardinal d'une union disjointe, d'une union quelconque, cardinal d'un produit cartésien
- Injection et surjection entre ensembles finis

Espace probabilisé fini

- Vocabulaire des événements, espace probabilisable des événements élémentaires
- Probabilité, propriétés de calcul

Programme de Colle 22

Chapitre 19 : Espaces vectoriels de dimension finie

Dimension

- Espace à générateur fini, Théorème de la base incomplète et conséquences
- Cardinal d'une famille génératrice, dimension d'un espace vectoriel
- Espaces isomorphes
- Dimension d'un SEV, d'un espace produit, d'une somme (Grassmann)
- Nouvelle caractérisation des sev supplémentaires
- Rang d'une famille de vecteurs

Chapitre 20 : Probabilités

Ensembles et cardinaux

- Cardinal, cardinal d'une partie d'un ensemble fini
- Cardinal d'une union disjointe, d'une union quelconque, cardinal d'un produit cartésien
- Injection et surjection entre ensembles finis

Espace probabilisé fini

- Vocabulaire des événements, espace probabilisable des événements élémentaires
- Probabilité, propriétés de calcul, crible de Poincaré et inégalité de Boole
- Probabilité conditionnelle, propriétés de calcul, Bayes, probabilités composées, indépendance, indépendance mutuelle

Démonstrations possibles

- Formule du rang
- Cardinal de la réunion disjointe de deux ensemble finis
- P_A est une probabilité

- Système complet d'événements, probabilités totales

Dénombrement

- Equiprobabilité, probabilité uniforme sur les événements élémentaires
- Combinaison, p-liste, arrangement, permutation

Chapitre 21 : Matrices

Calcul matriciel

- Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$,
- Transposition, SEV des matrices symétriques et antisymétriques
- Isomorphisme d'EV $\mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$

Matrices inversibles

- Régularité et inversibilité
- Inversibilité d'un produit
- Matrices de passage

Rang et trace d'une matrice

- Définition de rang, invariance par multiplication par une inversible
- Caractérisation du rang, manipulations élémentaires
- Matrices semblables
- Définition de trace, égalité pour des matrices semblables, trace d'un endomorphisme

- Probabilités composées et totales
- Régularité d'un produit
- Caractérisation du rang

Programme de Colle 23

Chapitre 20 : Probabilités

Ensembles et cardinaux

- Cardinal, cardinal d'une partie d'un ensemble fini
- Cardinal d'une union disjointe, d'une union quelconque, cardinal d'un produit cartésien
- Injection et surjection entre ensembles finis

Espace probabilisé fini

- Vocabulaire des événements, espace probabilisable des événements élémentaires
- Probabilité, propriétés de calcul, crible de Poincaré et inégalité de Boole
- Probabilité conditionnelle, propriétés de calcul, Bayes, probabilités composées, indépendance, indépendance mutuelle
- Système complet d'événements, probabilités totales

Dénombrement

- Equiprobabilité, probabilité uniforme sur les événements élémentaires
- Combinaison, p-liste, arrangement, permutation

Chapitre 21 : Matrices

Calcul matriciel

- Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$,

Démonstrations possibles

- Probabilités composées et totales
- Régularité d'un produit
- Caractérisation du rang
- Loi d'une VAR $f(X)$

- Transposition, SEV des matrices symétriques et antisymétriques

- Isomorphisme d'EV $\mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$

Matrices inversibles

- Régularité et inversibilité
- Inversibilité d'un produit
- Matrices de passage

Rang et trace d'une matrice

- Définition de rang, invariance par multiplication par une inversible
- Caractérisation du rang, manipulations élémentaires
- Matrices semblables
- Définition de trace, égalité pour des matrices semblables, trace d'un endomorphisme

Chapitre 22 : Variables aléatoires

Généralités

- Définition VAR finie, opérations de VAR
- Loi d'une Variable aléatoire, probabilités totales, loi conditionnelle
- VAR $f(X)$, loi
- Lois particulières (uniforme, binomiale)
- Couples de VAR : lois conjointes, marginales, conditionnelles, indépendance

- Pour deux VAR X, Y indépendantes, $P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)P(Y \in B)$

- Somme de VAR binomiales indépendantes et de même paramètre

Programme de Colle 24

Chapitre 21 : Matrices

Calcul matriciel

- Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, Transposition, SEV des matrices symétriques et antisymétriques, isomorphisme d'EV $\mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$

Matrices inversibles

- Inversibilité d'un produit, matrices de passage

Rang et trace d'une matrice

- Définition de rang, caractérisation du rang, matrices semblables
- Définition de trace, égalité pour des matrices semblables, trace d'un endomorphisme

Chapitre 22 : Variables aléatoires

- Définition VAR finie, opérations de VAR
- Loi d'une Variable aléatoire, probabilités totales, loi conditionnelle
- VAR $f(X)$, loi
- Lois particulières (uniforme, binomiale)
- Couples de VAR : lois conjointes, marginales, conditionnelles, indépendance

Démonstrations possibles

- Loi d'une VAR $f(X)$
- Pour deux VAR X, Y indépendantes, $P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)P(Y \in B)$
- Somme de VAR binomiales indépendantes et de même paramètre
- Approximation uniforme d'une fonction continue par des fonctions en escalier
- Inégalité de Cauchy-Schwarz
- Fonction continue positive d'intégrale nulle

Chapitre 23 : Intégration sur un segment

Continuité uniforme

- Définition, lien avec la continuité, théorème de Heine

Fonctions en escalier

- subdivision d'un segment, définition
- définition d'intégrale, propriétés de linéarité, Chasles, croissance

Fonctions continues par morceaux

- Définition, fonction continue par morceaux sur un segment bornée
- Approximation uniforme et encadrement d'une fonction continue sur un segment par des fonctions en escalier
- Intégrale d'une fonction continue par morceaux
- Linéarité, Chasles, Croissance, Cauchy-Schwarz, Minkowski, valeur moyenne, inégalité de la moyenne
- Fonction continue positive d'intégrale nulle et cas d'égalité de Cauchy-Schwarz