

Programme de Colle 9

Chapitre 8 : Les Nombres réels

Notion d'ordre

- Définition de relation d'ordre sur un ensemble E
- Définition de majorant, minorant, plus grand et plus petit élément, sup et inf.

Corps des réels

- $\mathbb{R}$ corps commutatif, muni de $\leq$ ordre total compatible avec $+$ et $\times$ par un réel positif
- Propriétés d'Archimède
- Valeur absolue, inégalité triangulaire, distance sur $\mathbb{R}$
- Droite numérique achevée
- Intervalles de $\mathbb{R}$, intervalles et convexité

Approximation dans $\mathbb{R}$

- Congruence : relation d'équivalence, compatibilité avec l'addition
- Partie entière : encadrements
- Tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$
- Approximation décimale d'un réel

Chapitre 9 : Suites Numériques

Généralités

- Suite numérique, constante, stationnaire, opérations sur les suites
- Suite réelle majorée, minorée, bornée, suite complexe bornée
- Suite monotone, croissante, décroissante, méthodes

Limite de suite

- Suite convergente, divergente, unicité de la limite, convergente $\Rightarrow$ bornée
- Opérations sur les limites finies. Limite infinie, opérations sur les limites infinies
- Limites et ordre : passage à la limite d'une inégalité, ordre et limites infinies, théorème d'encadrement (ou des pincements)
- Convergence d'une suite complexe en considérant partie réelle et imaginaire.

Démonstrations possibles

- Unicité s'il existe du plus grand élément
- Premières propriétés de $\leq$ dans $\mathbb{R}$
- Propriétés d'Archimède
- $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$
- Une suite réelle est bornée si et seulement si elle est majorée en valeur absolue
- Unicité de la limite

Programme de Colle 10

Chapitre 8 : Les Nombres réels

Approximation dans $\mathbb{R}$

- Congruence : relation d'équivalence, compatibilité avec l'addition
- Partie entière : encadrements
- Tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$
- Approximation décimale d'un réel

Chapitre 9 : Suites Numériques

Généralités

- Suite numérique, constante, stationnaire, opérations sur les suites
- Suite réelle majorée, minorée, bornée, suite complexe bornée
- Suite monotone, croissante, décroissante, méthodes

Limite de suite

- Suite convergente, divergente, unicité de la limite, convergente $\Rightarrow$ bornée
- Opérations sur les limites finies. Limite infinie, opérations sur les limites infinies

- Limites et ordre : passage à la limite d'une inégalité, ordre et limites infinies, théorème d'encadrement (ou des pincements)
- Convergence d'une suite complexe en considérant partie réelle et imaginaire.

Suites extraites

- Définition, limite d'une suite extraite d'une suite convergente
- Méthode pour l'existence ou la non existence d'une limite (en considérant les termes de rang pair puis impair)

Théorème d'analyse

- Convergence d'une suite réelle monotone
- Convergence de suites réelles adjacentes, théorème des segments emboîtés, approximation décimale d'un réel
- Théorème de Bolzano-Weierstrass
- Caractérisation séquentielle de la densité, $\mathbb{D}$ dense dans $\mathbb{R}$ (et $\mathbb{Q}$ aussi).

Etude pratique

- Arithmétique, géométrie, arithmético-géométrie
- Récurrences linéaires d'ordre 2, suites dépendantes

Démonstrations possibles

- $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$
- Une suite réelle est bornée ssi elle est majorée en valeur absolue
- Unicité de la limite
- Convergence d'une suite croissante majorée
- Convergence des suites adjacentes
- Théorème des segments emboîtés

Programme de Colle 11

Chapitre 9 : Suites Numériques

Suites extraites et théorème d'analyse

- Définition, limite d'une suite extraite d'une suite convergente
- Méthode pour l'existence ou la non existence d'une limite (termes de rang pair et impair)

Théorèmes d'analyse

- Convergence d'une suite réelle monotone
- Suites adjacentes, théorème des segments emboîtés, approximation décimale d'un réel
- Théorème de Bolzano-Weierstrass
- Caractérisation séquentielle de la densité, $\mathbb{D}$ dense dans $\mathbb{R}$ (et $\mathbb{Q}$ aussi).

Etudes pratiques

- Arithmétique, géométrie, arithmético-géométrie
- Récurentes linéaires d'ordre 2, suites dépendantes

Chapitre 10 : Fonctions d'une variable réelle

$\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

- $|f|$, f^+ , f^- , $\sup(f, g)$, $\inf(f, g)$
- Fonctions bornées, majorées, minorées, extremum (absolu ou relatif), borne sup, borne inf
- Monotonie, sens de variation d'une composée, utilisation du taux d'accroissement
- Parité, symétrie, périodicité

Etude locale

- limite, continuité en un point, unicité, prolongement par continuité
- limite et fonction bornée, limite et signe
- limite séquentielle
- limite à droite, à gauche, lien entre les différentes limites
- Opérations et composition, limite et ordre
- limite aux bornes d'une fonction monotone

Démonstrations possibles

- Convergence d'une suite croissante majorée
- Convergence des suites adjacentes
- Théorème des segments emboîtés
- Unicité de la limite d'une fonction f en a (démonstration pour une limite finie).
- Théorème de limite séquentielle pour la limite d'une fonction en a .
- Limite aux bornes d'une fonction monotone

Programme de Colle 12

Chapitre 10 : Fonctions d'une variable réelle

$\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

- $|f|$, f^+ , f^- , $\sup(f, g)$, $\inf(f, g)$
- Fonctions bornées, majorées, minorées, extremum (absolu ou relatif), borne sup, borne inf
- Monotonie, sens de variation d'une composée, utilisation du taux d'accroissement
- Parité, symétrie, périodicité

Etude locale

- limite, continuité en un point, unicité, prolongement par continuité
- limite et fonction bornée, et signe, séquentielle, à droite, à gauche

- Opérations et composition, limite et ordre, limite aux bornes d'une fonction monotone

Fonctions continues sur un intervalle

- continuité sur un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment
- f monotone sur I et $f(I)$ intervalle $\Rightarrow f$ continue sur I
- Bijection continue

Chapitre 11 : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

- Division euclidienne, relation "divise"
- Relation de congruence, classes d'équivalence,
- Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$, PPCM, PGCD, Algorithme d'Euclide
- Théorème de Gauss et de Bézout

Démonstrations possibles

- Unicité de la limite d'une fonction f en a (démonstration pour une limite finie).
- Théorème de limite séquentielle pour la limite d'une fonction en a .
- Limite aux bornes d'une fonction monotone
- L'image continue d'un segment est un segment
- Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$
- Théorème de Bézout et de Gauss
- Joyeux Noël et bonnes vacances !