Devoir Surveillé 11

Le vendredi 6 Juin 2025, 14h-16h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : Etude de la matrice A

1. Calculer les matrices $(A-I)^2$ et $(A-I)^3$.
2. La matrice A est-elle inversible ?

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note pour tout $x \in]-1,1[, \varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Justifier que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.
2. Déterminer un réel α non nul tel que : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + o(x^2)$
3. On note $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.
4. Soit $C = A - I$. En utilisant les résultats de la question 1, vérifier que $(P(C))^2 = A$. Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A. Dans cette partie, on pose : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soient u, v et w les vecteurs définis par : $\begin{cases} w = (1,0,1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{cases}$
   (a) Calculer les vecteurs v et u.
   (b) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.
   (d) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1}AP$.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire alors que N est de la forme : $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ où a, b et c sont trois réels.

   (b) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ n'admet que deux solutions : N_1 et N_2.

3. Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ n'admet que deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.

4. L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ ainsi que la suite réelle $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivante : $\begin{cases} I_0 = \dfrac{\pi}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[f(x)\right]^n dx \end{cases}$

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.
2. Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1}.
3. Justifier que : $\forall x \in J, \quad \cos\left(f^{-1}(x)\right) = \dfrac{1}{x}$ et $\sin\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}$
4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et montrer que :
$$\forall x \in J \setminus \{1\}, \quad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$
5. En déduire le développement limité en $\sqrt{2}$ de f^{-1} à l'ordre 1.
6. Justifier que f est de classe C^∞ sur I, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f sur I.
7. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n tel que :
$$\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$$
8. Déterminer les polynômes P_1 et P_2.
9. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1} = (1 - X^2)P_n' + (n+1)X.Pn$
   En déduire le polynôme P_3.
10. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.
11. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie. Calculer I_2.
12. Déterminer les réels a et b, tels que : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{a}{1-t} + \dfrac{b}{1+t}$.
13. En posant $t = \sin x$, déterminer I_1.
14. Déterminer le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
15. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n \geq \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n x} dx \geq \frac{1}{n^2} \dfrac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)}$
   En déduire le comportement de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
16. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_n$.