Devoir Surveillé 11 - Eléments de Correction

Exercice 1
Partie A : Etude de la matrice A

1. $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $(A-I)^3 = (A-I)^2(A-I) = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Puisque $(A-I)^3$ est la matrice nulle, on a $A^3 - 3A^2 + 3A = I$ autrement dit $A(A^2 - 3A + 3I)A = I$ d'où A inversible.

Partie B : Recherche d'une solution particulière

1. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ comme composée de :
   — la fonction polynomiale $x \mapsto 1+x$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$, à valeurs dans $]0,+\infty[$
   — et de la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.
   Il est important de noter que $1+x$ ne s'annule pas sur l'intervalle considéré (ouvert en -1) car la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ (ni mÃªme dérivable) en 0.

   On dérive deux fois φ pour obtenir $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.
   Pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad ; \quad \varphi''(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

   et donc :

$$\varphi'(0) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \varphi''(0) = -\frac{1}{4}.$$

2. La fonction φ étant de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0 (sur un intervalle ouvert contenant 0), elle y admet un développement limité à l'ordre 2 donné par la formule de Taylor-Young :

$$\varphi(x) = \underbrace{\varphi(0)}_{=1} + \underbrace{\varphi'(0)}_{=\frac{1}{2}} x + \underbrace{\frac{\varphi''(0)}{2}}_{=-\frac{1}{8}} x^2 + x^2 \varepsilon(x) \qquad \text{avec } \varepsilon \longrightarrow_0 0$$

   Le réel α recherché vaut donc $-\frac{1}{8}$.

3. En développant selon « $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac)$ », on a :

$$\begin{aligned} \big(P(x)\big)^2 &= \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right)^2 \\ &= 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(-\frac{x^2}{8}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} \times \left(-\frac{x^2}{8}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{64} \end{aligned}$$

4. On obtient donc :

$$\big(P(C)\big)^2 = P^2(C) = I + C - \frac{1}{8}C^3 + \frac{1}{64}C^4 = I + C = A$$

(d'après 1., $C^3 = 0$ et donc aussi $C^4 = 0$).

   La matrice $M = P(C)$ vérifie donc bien $M^2 = A$, et :

$$\begin{aligned} M &= P(C) = I + \frac{1}{2}C - \frac{1}{8}C^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Partie C : Résolution complète de l'équation

1. (a) En notant U, V et W les vecteurs-colonnes correspondant respectivement à u, v et w, les relations $v = f(w) - w$ et $u = f(v) - v$ se traduisent ainsi :

$$V = AW - W = CW = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$U = AV - V = CV = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   et on a donc : $v = (1,1,-3)$ et $u = (-6,-6,0)$.

(b) Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, montrer que la famille de trois vecteurs (u, v, w) est une base revient à prouver qu'elle est génératrice, c'est-à-dire que son rang vaut 3 :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(U|V|W) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}-6 & 1 & 1\\ -6 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix} =_{L_2\leftarrow L_2-L_1} \mathrm{rg}\begin{pmatrix}-6 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}\\ &=_{L_2\leftrightarrow L_3} \underbrace{\mathrm{rg}\begin{pmatrix}-6 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} = 3}_{\text{(matrice triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls)}}\end{aligned}$$

(c) Calculons $f(u)$ en utilisant la matrice A :

$$AU = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 2\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\ -6\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\ -6\\ 0\end{pmatrix}$$

donc $f(u) = u$

Les relations de l'énoncé nous donnent directement $f(v)$ et $f(w)$ comme combinaisons linéaires de u, v et w :

$$f(v) = u + v \quad ; \quad f(w) = v + w.$$

On en déduit la matrice de f dans la base (u, v, w) :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = T$$

(d) Puisque A et T représentent l'endomorphisme f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement, en notant $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (donc inversible), on a :

$$P^{-1}AP = T.$$

2. (a) Supposons que $N^2 = T$. Alors :

$$NT = NN^2 = N^3 = N^2N = TN.$$

En posant $N = \begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$, la relation $NT = TN$ s'écrit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}a & a+b & b+c\\ d & d+e & e+f\\ g & g+h & h+i\end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}a+d & b+e & c+f\\ d+g & e+h & f+i\\ g & h & i\end{pmatrix}}$$

ce qui nous donne le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& a+d\\ a+b &=& b+e\\ b+c &=& c+f\\ d &=& d+g\\ d+e &=& e+h\\ e+f &=& f+i\\ g+h &=& h\\ h+i &=& i\end{array}\right. \quad \underline{\text{ssi}} \quad \left\{\begin{array}{rcl} d &=& 0\\ a &=& e\\ b &=& f\\ g &=& 0\\ d &=& h\\ e &=& i\\ g &=& 0\\ h &=& 0\end{array}\right. \quad \underline{\text{ssi}} \quad \left\{\begin{array}{l} a = e = i\\ d = g = h = 0\\ b = f\end{array}\right.$$

Par conséquent, si $N^2 = T$, alors N est de la forme $\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(b) Si $N^2 = T$, alors avec les notations de la question précédente :

$$N^2 = \begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2 & 2ab & b^2+2ac\\ 0 & a^2 & 2ab\\ 0 & 0 & a^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 &=& 1\\ 2ab &=& 1\\ b^2+2ac &=& 0\end{array}\right. \quad \underline{\text{ssi}} \quad \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1\\ b &=& \frac{1}{2}\\ c &=& -\frac{1}{8}\end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -1\\ b &=& -\frac{1}{2}\\ c &=& \frac{1}{8}\end{array}\right.$$

On obtient donc deux solutions possibles :

$$N_1 = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ et } N_2 = -N_1 = \begin{pmatrix}-1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8}\\ 0 & -1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

et on vérifie qu'il s'agit effectivement de solutions à l'équation (${N_1}^2 = {N_2}^2 = T$).

3. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En posant $N = P^{-1}MP$, on a :

$$M^2 = A \ \underline{\text{ssi}}\ \left(PNP^{-1}\right)^2 = A \ \underline{\text{ssi}}\ PN^2P^{-1} = A \ \underline{\text{ssi}}\ N^2 = P^{-1}AP \ \underline{\text{ssi}}\ N^2 = T$$

L'équation $M^2 = A$ admet donc exactement deux solutions :

$$M_1 = PN_1P^{-1} \quad \text{et} \quad M_2 = PN_2P^{-1} \ (= -M_1).$$

4. La matrice nulle n'étant pas solution de l'équation $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble E n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 2

1. f est dérivable sur $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ f'(x) = -\frac{\cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

   f' est nulle en 0 et strictement positive sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$. Comme f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, ceci suffit pour dire que f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

   f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ donc f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur l'intervalle $\left[f(0), f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = [1, \sqrt{2}]$.

   $$\boxed{f \text{ réalise une bijection de } I = \left[0, \tfrac{\pi}{4}\right] \text{ sur l'intervalle } J = [1, \sqrt{2}].}$$

2. Désolé et pardon aux familles de courbes tout ça...

   Retenons que dans un plan muni d'un repère orthonormé la représentation graphique $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ de f^{-1} est l'image de la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de f par la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$.

   Notons que $f'(0) = 0$ et $f'(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$.

   Notons encore que f est convexe sur I car f'' existe et est positive sur I (voir plus loin...).

3. Soit x un élément de J. $x = f\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{\cos(f^{-1}(x))}$ Alors $\cos\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{x}$

   $f^{-1}(x)$ est un élément de $[0, \frac{\pi}{4}]$ donc $\sin\left(f^{-1}(x)\right)$ est positif.

   Donc $\sin\left(f^{-1}(x)\right) = \left|\sin\left(f^{-1}(x)\right)\right| = \sqrt{\sin^2\left(f^{-1}(x)\right)} = \sqrt{1 - \cos^2\left(f^{-1}(x)\right)} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$ Finalement :

   $$\boxed{\forall x \in J,\ \cos\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall x \in J,\ \sin\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$$

4. f est dérivable et de dérivée strictement positive (donc non nulle) sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$.

   Alors f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right) =]1, \sqrt{2}] = J - \{1\}$. Donc :

   $$\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable } J - \{1\}.}$$

   Remarque f est croissante sur I et $f'(0) = 0$ alors $\lim_{x\to 1} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x-1} = \infty$; en particulier $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admet une demi-tangente "verticale" au point d'abscisse 1.

   Soit x un élément de $J - \{1\}$. $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{\cos^2\left(f^{-1}(x)\right)}{\sin(f^{-1}(x))} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}} = \frac{1}{x^2}\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}$

   Comme x est positif : $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

   $$\boxed{\forall x \in J - \{1\},\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$$

5. f^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$ donc f^{-1} possède un développement limité en $\sqrt{2}$ à l'ordre 1 qui est :

   $f^{-1}(x) = f^{-1}(\sqrt{2}) + \left(f^{-1}\right)'(\sqrt{2})\,(x - \sqrt{2}) + o(x - \sqrt{2})$.

   Notons que $f^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$ et $\left(f^{-1}\right)'(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Alors :

   f^{-1} possède un développement limité en $\sqrt{2}$ à l'ordre 1 qui est :

   $$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \sqrt{2}) + o(x - \sqrt{2}).}$$

Etude des dérivées successives de f

6. $x \to \cos x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et non nulle sur I. donc :

   $$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I.}$$

7. Montrons par récurrence, que pour tout n dans $\mathbb{N}$ (qui peut le plus peut le moins !), il existe un polynôme P_n tel que $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$

   • Considérons le polynôme $P_0 = 1$. $\forall x \in I,\ f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{\cos x} = \frac{P_0(\sin x)}{\cos^{0+1}(x)}$ La propriété est vraie pour $n = 0$.

   • Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$. Il existe un polynôme P_n tel que $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$

   $\forall x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = \frac{\cos x\, P_n'(\sin x)\ \cos^{n+1}(x) - P_n(\sin x)\,(n+1)\,(-\sin x)\ \cos^n(x)}{\cos^{2n+2}(x)}$

   $\forall x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = \frac{\cos^n(x)}{\cos^{2n+2}(x)}\left[\cos^2(x)\,P_n'(\sin x) + (n+1)\,\sin x\,P_n(\sin x)\right]$

   $\forall x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{\cos^{n+2}(x)}\left[(1 - \sin^2(x))\,P_n'(\sin x) + (n+1)\,\sin x\,P_n(\sin x)\right]$

   Posons alors $P_{n+1} = (1 - X^2)\,P_n' + (n+1)\,X\,P_n$. P_{n+1} est un polynôme et $\forall x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(\sin x)}{\cos^{(n+1)+1}(x)}$

   Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}, \text{ il existe un polynôme } P_n \text{ tel que } \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}}$$

   Remarque Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

   Supposons qu'il existe un second polynôme Q_n tel que $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{Q_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$

Alors $\forall x \in I,\ Q_n(\sin x) = P_n(\sin x)$ donc $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ (Q_n - P_n)(\sin x) = 0$.

Ceci donne encore : $\forall z \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right],\ (Q_n - P_n)(z) = 0$.

Alors $Q_n - P_n$ est un polynôme qui admet une infinité de racines c'est donc le polynôme nul. Par conséquent $Q_n = P_n$.

Finalement pour tout n dans $\mathbb{N}$, il existe un unique polynôme P_n tel que $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$

8. $\forall x \in I,\ f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{P_1(\sin x)}{\cos^{1+1}(x)}$ avec $P_1 = X$.

   $\forall x \in I,\ f''(x) = \frac{1}{\cos^4(x)}\left[\cos x\, \cos^2(x) - (\sin x)\, 2\,(-\sin x)\cos x\right] = \frac{1}{\cos^3(x)}\left[1 - \sin^2(x) + 2\,\sin^2(x)\right]$.

   $\forall x \in I,\ f''(x) = \frac{1}{\cos^{2+1}(x)}\left[1 + \sin^2(x)\right]$. Finalement $\forall x \in I,\ f''(x) = \frac{P_2(\sin x)}{\cos^{2+1}(x)}$ avec $P_2 = X^2 + 1$.

   $$\boxed{P_1 = X} \quad \text{et} \quad \boxed{P_2 = X^2 + 1}$$

   Remarque Le tout pouvait s'obtenir encore plus rapidement avec $P_{n+1} = (1 - X^2)\, P'_n + (n+1)\, X\, P_n$.

9. La question précédente $\boxed{\text{et}}$ sa remarque permettent de dire que :

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^{(*)},\ P_{n+1} = (1 - X^2)\, P'_n + (n+1)\, X\, P_n.}$$

   Alors $P_3 = (1-X^2)\, P'_2 + (2+1)\, X\, P_2 = (1-X^2)(2X) + 3\, X\,(1+X^2) = X^3 + 5\, X$.

   $$\boxed{P_3 = X^3 + 5\, X.}$$

10. 5 Montrons par récurrence que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{N}^*$), le terme de plus haut degré de P_n est X^n.

    • La propriété est vraie pour $n = 0$ car $P_0 = 1$ (ou pour $n = 1$ car $P_1 = X$).

    • Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{N}^*$) et montrons la pour $n + 1$.

    P_n est de degré n donc $X P_n$ est de degré $n+1$ et $(1 - X^2)\, P'_n$ de degré au plus $n+1$ (si $n = 0$...).

    Ainsi $P_{n+1} = (1 - X^2)\, P'_n + (n+1)\, X\, P_n$ est de degré au plus $n + 1$.

    Les coefficients de X^{n+1} dans $(1 - X^2)\, P'_n$ et $(n+1)\, X\, P_n$ sont respectivement $-n$ et $n+1$ car le terme de plus haut degré de P_n est X^n.

    Alors le coefficient de X^{n+1} dans P_{n+1} est $-n + (n+1)$ donc 1. Ainsi le terme de plus haut degré de P_{n+1} est X^{n+1} ce qui achève la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ P_n \text{ est de degré } n \text{ et son coefficient dominant est 1.}}$$

2.3. Etude de la suite d'intégrales.

11. 1 Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. f est continue sur $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ donc f^n également. Alors $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x)]^n dx$ existe.

    $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **est bien définie.**

    $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} = \left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1.$

    $$\boxed{I_2 = 1.}$$

12. $\forall t \in \mathbb{R} - \{-1, 1\},\ \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1+t+1-t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1+t}{1-t^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1-t}{1-t^2} = \frac{1/2}{1-t} + \frac{1/2}{1+t}$

    $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} - \{-1, 1\},\ \frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} \text{ avec } a = b = \frac{1}{2}}$$

13. $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos^2(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin' x}{1-\sin^2(x)} dx.$

    Posons $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ u(x) = \sin x$. u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et définit une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

    Le changement de variable $t = \sin x = u(x)$ donne alors

    $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin' x}{1-\sin^2(x)} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 1 - t^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) = \frac{1}{2}\Big[-\ln|1-t| + \ln|1+t|\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$

    $I_1 = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right| - \ln\left|\frac{1+0}{1-0}\right|\right] = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right).$

    $I_1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}\right) = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)^2 = \ln(\sqrt{2}+1).$

    $$\boxed{I_1 = \ln(\sqrt{2}+1).}$$

14. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{n+1}(x) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^{n+1}(x)} - \frac{1}{\cos^n(x)}\right).$

    $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos x}{\cos^{n+1}(x)}.$

    Or $0 \leq \frac{\pi}{4}$ et $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ \frac{1-\cos x}{\cos^{n+1}(x)} \geq 0$ donc $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos x}{\cos^{n+1}(x)} \geq 0.$ Finalement :

    $$\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

15. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ (hum !).

    $I_n - \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n(x)dx - \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}} \cos^n(x)dx$

    Distinguons alors deux cas.

    • Supposons n supérieur ou égal à 2.

    $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2} > 0$ et $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right],\ \frac{1}{\cos^n(x)} \geq 0$ alors $\int_0^{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}} \cos^n(x) \geq 0.$

    Par conséquent $I_n - \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^n(x) \geq 0$ et $I_n \geq \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^n(x)$

• Supposons que n soit égal à 1.

Alors $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{4} - 1 < 0$ et $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}, 0\right],\ \frac{1}{\cos^n(x)} > 0$ ce qui donne $\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{0} \cos^n(x)dx > 0$.

Donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}} \cos^n(x)dx < 0$ et $I_n < \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^n(x)dx$!!

Dans la suite de cette question nous supposerons pudiquement que n est supérieur ou égal à 2.

$x \to \cos x$ est décroissante et strictement positive sur I donc $x \to \frac{1}{\cos x}$ est croissante et strictement positive sur I (ce qui n'est pas nouveau !).

Alors $x \to \frac{1}{\cos^n(x)}$ est croissante sur $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ donc sur $\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}, \frac{\pi}{4}\right]$

Alors $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2} < \frac{\pi}{4}$ et $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}, \frac{\pi}{4}\right],\ \frac{1}{\cos^n(x)} \geq \frac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)}$

Donc $\int_x^{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}} \frac{\pi}{4}\cos^n(x) \geq \int_x^{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}} \frac{\pi}{4}\cos^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)\right) \frac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)}$ Finalement :

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ I_n \geq \int_x^{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}} \frac{\pi}{4}\cos^n(x) \geq \frac{1}{n^2} \frac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)}}$$

Posons $\forall n \in \geq 2, h_n = \frac{1}{n^2} \frac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)}$

Soit n un élément de ≥ 2. $h_n > 0$ et $\ln(h_n) = -2\ln n - n \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)\right)$.

$\ln(h_n) = n\left[-2\frac{\ln n}{n} - \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)\right)\right]$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)\right) = \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\ln\sqrt{2}$.

Alors $\lim_{n\to\infty}\left[-2\frac{\ln n}{n} - \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)\right)\right] = \ln\sqrt{2} > 0$ donc $\lim_{n\to\infty} \ln h_n = \infty$. Par conséquent $\lim_{n\to\infty} h_n = \infty$.

Or $\forall n \in \geq 2,\ I_n \geq h_n$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} I_n = \infty.}$$

16. 6 $I_2 = 1 = \frac{(\sqrt{2})^0}{0+1} + \frac{0}{0+1} I_0$ donc l'égalité est vraie pour $n = 0$ (oui, I_0 n'a pas une forme intégrale...).

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{n+2}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} \frac{1}{\cos^n(x)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan'(x) \frac{1}{\cos^n(x)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan'(x)\cos^{-n}(x)$.

Un intégration par parties alors évidente donne : $I_{n+2} = \left[\tan x \cos^{-n}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,(-n)\,(-\sin x)\,\cos^{-n-1}(x)$.

$I_{n+2} = \tan\frac{\pi}{4}\cos^{-n}\left(\frac{\pi}{4}\right) - 0 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,(-n)\,(-\sin x)\,\cos^{-n-1}(x)$.

$I_{n+2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-n} - n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\sin x \frac{1}{\cos^{n+1}(x)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-n} - n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(x)}{\cos^{n+2}(x)}$.

$I_{n+2} = (\sqrt{2})^n - n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^{n+2}(x)} = (\sqrt{2})^n - n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{n+2}(x) + n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n(x) = (\sqrt{2})^n - n\,I_{n+2} + n\,I_n$.

Alors $(n+1)\,I_{n+2} = (\sqrt{2})^n + n\,I_n$ et donc $I_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_n$. Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} - \frac{n}{n+1} I_n.}$$