

Devoir Surveillé 10

Le vendredi 23 Mai 2025

16h-18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

1. On définit la fonction φ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 0$.

(a) Donner le développement limité de φ au voisinage de 0 à l'ordre 4.

(b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(c) Soit la fonction ψ définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $\psi(t) = \frac{t}{\sin t}$ si $t \neq 0$ et $\psi(0) = 1$.

Montrer que ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Préciser $\psi'(0)$.

2. Soit a et b réels tels que $a < b$. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, à valeurs réelles. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt \quad \text{tend vers 0 lorsque } \lambda \text{ tend vers } +\infty \quad (1)$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit S_n sur $[0, \pi]$ par : $S_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kt)$.

(a) Montrer, *sans récurrence*, que : $\forall t \in]0, \pi[, \quad S_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}$ (2)

Calculer $S_n(0)$ et $S_n(\pi)$.

(b) Calculer la valeur de l'intégrale $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt$.

Exercice 2

Dans tout le problème, on confond polynôme et application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_k[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré au plus k . On définit l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] ; P(0) = P(4) = 0\}$ et le polynôme $W = X(X-4)$.

PARTIE 1 : Etude d'endomorphismes.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$.

2. Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $\phi(Q) = W.Q$. Montrer que l'application $\phi : Q \mapsto W.Q$ est une application linéaire définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ et à valeurs dans E puis que c'est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans E .

3. En déduire une base et la dimension de E .

4. Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$, on considère le polynôme $\Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X)$.

Ainsi si par exemple $Q = X^2 - 3X + 5$, on a : $\Delta(Q) = ((X+1)^2 - 3(X+1) + 5) - (X^2 - 3X + 5)$.

- (a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
 - (b) Déterminer pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$ le degré du polynôme $\Delta(Q)$ en fonction de celui de Q .
 - (c) Déterminer le noyau et l'image de Δ .
 - (d) Etablir : $\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$.
5. On définit l'endomorphisme f de E suivant : $f = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$, où ϕ^{-1} est l'application réciproque de ϕ .
- (a) Montrer que $f \circ f \circ f = 0$.
 - (b) Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f .

PARTIE 2 : Etude d'un produit scalaire.

On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P_1, P_2) \in \mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X], \quad \langle P_1, P_2 \rangle = \sum_{k=0}^4 P_1(k) P_2(k)$$

6. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$.

On munit dorénavant $\mathbb{R}_4[X]$ de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\| \cdot \|$.

On définit les trois polynômes suivants :

$$L_1 = (X - 2)(X - 3), \quad L_2 = (X - 1)(X - 3) \text{ et } L_3 = (X - 1)(X - 2).$$

7. Montrer que la famille (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
8. (a) Exprimer pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) en fonction de $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$.
- (b) Exprimer $\Delta(L_1)$, $\Delta(L_2)$ et $\Delta(L_3)$ dans cette même base, et en déduire que la matrice de l'endomorphisme Δ dans la base (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3/2 & 2 \end{pmatrix}$.
9. On note pour tout i dans $\{1, 2, 3\}$, $M_i = W L_i$.
- (a) Montrer que pour tout i dans $\{1, 2, 3\}$, $M_i(i)$ est non nul.
On note alors pour tout i dans $\{1, 2, 3\}$, $N_i = \frac{1}{M_i(i)} M_i$.
 - (b) Montrer que (N_1, N_2, N_3) est une base orthonormée du sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}_4[X]$.
10. Déterminer la matrice de l'application linéaire ϕ dans les bases (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ et (N_1, N_2, N_3) de E .
11. Déterminer la matrice de l'endomorphisme f dans la base (N_1, N_2, N_3) de E .

12. On note pour tout P de $\mathbb{R}_4[X]$, $u(P) = \sum_{i=1}^3 P(i) N_i$.

- (a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.
- (b) Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_4[X], \forall j \in \{1, 2, 3\}, \langle P - u(P), N_j \rangle = 0$.
- (c) En déduire que u est la projection orthogonale sur E .
- (d) Déterminer le projeté orthogonal de $Q = X^2(X - 2)(X - 3)$ sur E .