Devoir Surveillé 10 - Eléments de Correction

Exercice 1
Partie I : Étude d'endomorphismes

1. Notons que le polynôme nul est dans E, donc E est non vide.
   Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
   $$(\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = 0 \text{ et } (\lambda P + Q)(4) = \lambda P(4) + Q(4) = 0.$$
   Donc $\lambda P + Q \in E$ et puisque $E \subset \mathbb{R}_4[X]$ par définition, $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_4[X].}$
2. ϕ est une application linéaire car pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on a $\phi(\lambda P + Q) = W(\lambda P + Q) = \lambda WP + WQ = \lambda\phi(P) + \phi(Q)$.
   De plus, si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $\deg \phi(P) = \deg P + \deg W \leq 4$ et donc $\phi(P) \in \mathbb{R}_4[X]$.
   De plus
   $$\phi(P)(0) = W(0)P(0) = 0 \text{ et } \phi(P)(4) = W(4)P(4) = 0$$
   donc ϕ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans E.
   Si $P \in \operatorname{Ker}(\phi)$, alors $WP = 0$. Or si $x \in]0, 4[$, $W(x) \neq 0$, et donc $P(x) = 0$. Ainsi, P possède une infinité de racines et donc $P = 0$. Ceci prouve donc que ϕ est injectif.
   Enfin, si $Q \in E$, alors notons $P \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}_1[X]$ le quotient et le reste de la division euclidienne de Q par W, c'est-à-dire les polynômes tels que $Q = PW + R$.
   Alors $0 = Q(0) = P(0)W(0) + R(0) = R(0)$ et $0 = Q(4) = P(4)W(4) + R(4)$, de sorte que R possède deux racines, qui sont 0 et 4.
   Puisque R est de degré au plus un, c'est que $R = 0$, et donc $Q = WP = \phi(P)$.
   Ainsi, ϕ est surjectif, ce qui achève de prouver que $\boxed{\phi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}_2[X] \text{ sur } E.}$

   La preuve ci-dessus utilise uniquement l'existence de la division euclidienne. Si l'on se souvient qu'il y a de plus unicité de cette division euclidienne, alors de manière unique, $Q = WP + R$. On prouve de même que précédemment que $R = 0$, et alors il existe un ***unique*** *polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $Q = WP = \phi(P)$. Donc tout élément de E admet un unique antécédent par ϕ : ϕ est une bijection de $\mathbb{R}_2[X]$ sur E.*
3. De la question précédente, on déduit que E est de même dimension que $\mathbb{R}_2[X]$ et donc $\boxed{\dim E = 3.}$
   De plus, l'image par ϕ d'une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$ est une famille génératrice de E, et donc (W, WX, WX^2) est une famille génératrice de E. Étant de cardinal $3 = \dim E$, $\boxed{\text{c'est une base de } E.}$

(a) Si $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $\deg Q(X+1) = \deg Q$ et donc $\deg \Delta(Q) \leq \deg Q$, de sorte que $\Delta(Q) \in \mathbb{R}_2[X]$.
Si $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
$$\Delta(\lambda P+Q) = \lambda P(X+1)+Q(X+1)-(\lambda P(X)+Q(X)) = \lambda(P(X+1)-P(X))+(Q(X+1)$$
Donc $\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].}$

(b) Soit $Q = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors
$$\Delta(Q) = a(X+1)^2+b(X+1)+c-(aX^2+bX+c) = a(X^2+2X+1)+bX+b+c-aX^2-bX-$$
Si $\deg Q = 2 \Leftrightarrow a \neq 0$, alors $\deg \Delta(Q) = 1$.
Si $\deg Q = 1 \Leftrightarrow a = 0, b \neq 0$, alors $\deg \Delta(Q) = 0$.
Si $\deg Q \leq 0 \Leftrightarrow a = b = 0$, alors $\Delta(Q) = 0 \Leftrightarrow \deg \Delta(Q) = -\infty$.

(c) D'après la question précédente, on a $\Delta(Q) = 0 \Leftrightarrow \deg Q \leq 1$. Donc $\boxed{\operatorname{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]}$, l'ensemble des polynômes constants.
De plus, la question précédente prouve que $\operatorname{Im}(\Delta) \subset \mathbb{R}_1[X]$. Mais par le théorème du rang,
$$\dim \operatorname{Im}(\Delta) = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim \operatorname{Ker}(\Delta) = 3 - 1 = 2 = \dim \mathbb{R}_1[X].$$
On en déduit que $\boxed{\operatorname{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_1[X].}$

(d) Nous avons prouvé en 4.b que $\deg \Delta(Q) \leq \deg Q - 1$.
Donc pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $\deg(\Delta \circ \Delta \circ \Delta)(Q) \leq \deg Q - 3 \leq -1$.
Et donc pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[X], (\Delta \circ \Delta \circ \Delta)(Q) = 0$. Ceci prouve bien que $\boxed{\text{l'endomorphisme } \Delta^3 \text{ est nul.}}$

(a) On a $f^3 = \left(\phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}\right)^3 = \phi \circ \Delta^3 \circ \phi^{-1} = \boxed{0.}$

(b) ϕ est injectif, donc pour $P \in E$,
$$f(P) = 0 \Leftrightarrow \Delta \circ \phi^{-1}(P) = 0 \Leftrightarrow \phi^{-1}(P) \in \mathbb{R}_0[X] \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : P = \lambda W.$$
Ainsi, $\operatorname{Ker}(f) = \{\lambda W, \lambda \in \mathbb{R}\}$. $\boxed{\text{Une base de } f \text{ est alors formée du seul vecteur } W.}$
Par le théorème du rang, on a alors $\dim \operatorname{Im}(f) = 2$.
Or, on a $W = W\Delta(X) = (\phi \circ \Delta \circ \phi^{-1})(WX) = f(WX) \in \operatorname{Im}(f)$ et de même
$$2WX = W\Delta(X^2 - X) = (\phi \circ \Delta \circ \phi^{-1})(W(X^2 - X)) = f(W(X^2 - X)) \in \operatorname{Im}(f).$$
Or, $(W, 2WX)$ est une famille libre car formée de deux vecteurs non colinéaires.
Elle est de cardinal $2 = \dim \operatorname{Im}(f)$: $\boxed{\text{c'est une base de } \operatorname{Im}(f).}$

Partie II : Étude d'un produit scalaire

6. Soient $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}_4[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\langle \lambda P_1 + P_2, Q\rangle = \sum_{k=0}^{4} (\lambda P_1 + P_2)(k) Q(k) = \lambda \sum_{k=0}^{4} P_1(k)Q(k) + \sum_{k=0}^{4} P_2(k)Q(k) = \lambda\langle P_1, Q\rangle + \langle P_2, Q\rangle.$$

Ainsi, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire par rapport à la première variable.

Pour $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_4[X]$, on a

$$\langle P_1, P_2\rangle = \sum_{k=0}^{4} P_1(k)P_2(k) = \sum_{k=0}^{4} P_2(k)P_1(k) = \langle P_2, P_1\rangle.$$

Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique, et donc bilinéaire symétrique.

Pour $P \in \mathbb{R}_4[X]$, on a

$$\langle P, P\rangle = \sum_{k=0}^{4} P(k)^2 \geq 0.$$

Et si $\langle P, P\rangle = 0$, alors c'est que

$$\forall k \in [\![0, 4]\!], P(k)^2 = 0 \Leftrightarrow P(k) = 0.$$

Alors P possède 5 racines distinctes et est de degré au plus 4, donc $P = 0$.
Ainsi, on a bien $\langle P, P\rangle = 0 \Leftrightarrow P = 0$, ce qui achève de prouver que $\boxed{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_4[X].}$

7. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$.
Alors en évaluant en $X = 1$, il vient

$$0 = \lambda_1 L_1(1) + \lambda_2 L_2(1) + \lambda_3 L_3(1) = 2\lambda_1.$$

Et donc $\lambda_1 = 0$. De même en évaluant en $X = 2$, il vient

$$0 = \lambda_2 L_2(2) + \lambda_3 L_3(2) = -3\lambda_2.$$

Donc $\lambda_2 = 0$, et puisque $L_3 \neq 0$, nécessairement, $\lambda_3 = 0$.
Ainsi, (L_1, L_2, L_3) est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$. Elle est de cardinal $3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$, et donc c'est $\boxed{\text{une base de } \mathbb{R}_2[X].}$

(a) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, et soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3), c'est-à-dire tels que

$$P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3.$$

En évaluant en $X = 1$, il vient $P(1) = \lambda_1 L_1(1) = 2\lambda_1$.
De même, en évaluant en $X = 2$ puis $X = 3$, il vient $P(2) = -\lambda_2$ et $P(3) = 2\lambda_3$.
Donc on a

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{P(1)}{2}, \lambda_2 = -P(2), \lambda_3 = \frac{P(3)}{2}.}$$

(b) On a, en utilisant la définition de Δ puis le résultat de la question 8.a,

$$\begin{aligned}
\Delta(L_1) &= L_1(X+1) - L_1(X) = (X-1)(X-2) - (X-2)(X-3) = 2(X-2) = -\\
\Delta(L_2) &= L_2(X+1) - L_2(X) = X(X-2) - (X-1)(X-3) = -\frac{1}{2}L_1 - L_2 + \frac{3}{2}L_3\\
\Delta(L_3) &= L_3(X+1) - L_3(X) = X(X-1) - (X-1)(X-2) = -2L_2 + 2L_3
\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice de Δ dans la base (L_1, L_2, L_3) est

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3/2 & 2 \end{pmatrix}.}$$

(a) Les racines de W sont 0 et 4, et donc pour tout $i \in \{1, 2, 3\}, W(i) \neq 0$.
De plus, on remarque que i n'est pas racine de L_i, de sorte que $L_i(i) \neq 0$.
Ainsi, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}, M_i(i) = W(i)L_i(i) \neq 0$.

(b) Soit $i \in \{1, 2, 3\}$. Alors

$$\|N_i\|^2 = \langle N_i, N_i\rangle = \frac{1}{M_i(i)^2}\langle M_i, M_i\rangle = \frac{1}{M_i(i)^2}\sum_{k=0}^{4} M_i(k)^2.$$

Mais $M_i(0) = M_i(4) = 0$, et pour $k \in \{1, 2, 3\}, k \neq i$, on a $M_i(k) = 0$.
Donc $\|N_i\|^2 = \frac{1}{M_i(i)^2} M_i(i)^2 = 1$, et donc $\|N_i\| = 1$.
Pour $j \neq i$, on a

$$\langle N_i, N_j\rangle = \sum_{k=0}^{4} N_i(k)N_j(k) = N_i(i)N_j(i).$$

Mais $i \neq j$, de sorte que $N_j(i) = 0$. Ainsi, $\langle N_i, N_j\rangle = 0$.

Nous avons bien prouvé que pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $\langle N_i, N_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Donc (N_1, N_2, N_3) est une famille orthonormée de E. En particulier, elle est libre, et étant de cardinal 3, $\boxed{\text{c'est une base de orthonormée de } E.}$

10. Pour $i \in \{1,2,3\}$, on a

$$\phi(L_i) = WL_i = M_i = M_i(i)N_i.$$

Or, on a $M_1(1) = -6, M_2(2) = 4, M_3(3) = -6$, de sorte que la matrice de ϕ dans les bases (L_1, L_2, L_3) et (N_1, N_2, N_3) est

$$\boxed{N = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.}$$

11. Notons $\mathcal{B} = (L_1, L_2, L_3)$ et $\mathcal{C} = (N_1, N_2, N_3)$, de sorte que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\phi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Delta) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\phi^{-1}) = N \times M \times N^{-1}.$$

Soit encore

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 \\ -6 & -9 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 3/4 & 0 \\ 0 & -1 & 4/3 \\ 1 & -9/4 & 2 \end{pmatrix}}.$$

(a) Puisque $N_1, N_2, N_3 \in E \subset \mathbb{R}_4[X]$, il est clair que u est à valeurs dans $\mathbb{R}_4[X]$. Si $P, Q \in \mathbb{R}_4[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$u(\lambda P + Q) = \sum_{i=1}^{3} (\lambda P + Q)(i) N_i = \lambda \sum_{i=1}^{3} P(i) N_i + \sum_{i=1}^{3} Q(i) N_i = \lambda u(P) + u(Q).$$

Donc u est linéaire : $\boxed{\text{c'est un endomorphisme de } \mathbb{R}_4[X].}$

(b) Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$ et $j \in \{1,2,3\}$. Alors

$$\langle P - u(P), N_j \rangle = \langle P, N_j \rangle - \langle u(P), N_j \rangle = \sum_{k=0}^{4} P(k) N_j(k) - \sum_{i=1}^{3} P(i) \langle N_i, N_j \rangle.$$

Mais pour tout $k \in [\![0, 4]\!]$, $N_j(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ 1 & \text{si } k = j \end{cases}$, et $\langle N_i, N_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$.

Donc $\sum_{k=0}^{4} P(k) N_j(k) = P(j)$ et $\sum_{i=1}^{3} P(i) \langle N_i, N_j \rangle = P(j)$. Ainsi, on a bien

$$\boxed{\langle P - u(P), N_j \rangle = P(j) - P(j) = 0.}$$

(c) *Notons que* $\langle P, N_i \rangle N_i = P(i)$, *de sorte que* $u(P) = \sum_{i=1}^{3} \langle P, N_i \rangle$, *avec* (N_1, N_2, N_3) *une base orthonormée de* E. *Nous reconnaissons alors une formule donnée dans le cours pour la projection orthogonale sur* E. *Toutefois, l'énoncé demandait de "déduire" ce résultat de la question précédente, donc essayons de l'utiliser...*

Notons que $u(N_i) = N_i(i) N_i = N_i$, et donc si $P \in E$, alors $u(P) = P$.
La question précédente prouve que pour tout $P \in \mathbb{R}_4[X]$, $P - u(P) \in E^{\perp}$, et il est évident que $u(P) \in \mathrm{Vect}(N_1, N_2, N_3) = E$. Or, $P = \underbrace{u(P)}_{\in E} + \underbrace{(P - u(P))}_{\in E^{\perp}}$.
Donc par unicité de la décomposition de P dans la somme directe $\mathbb{R}_4[X] = E \oplus E^{\perp}$, $u(P)$ est la composante suivant E de P, et donc $\boxed{u \text{ est la projection orthogonale sur } E.}$

(d) Il s'agit d'utiliser le résultat de la question précédente : le projeté orthogonal de Q sur E est

$$u(Q) = \sum_{i=1}^{3} Q(i) N_i = Q(1) N_1 = \boxed{2N_1.}$$